ZB

MOMČILO UŠĆUMLIĆ
PAVLE MILIČIĆ

ZBIRKA ZADATAKA IZ VIŠE MATEMATIKE II

IV IZDANJE

Naučna knjiga
BEOGRAD, 1984.

PREDGOVOR

„Zbirka zadataka iz više matematike I", koja je već doživela treće izdanje i „Zbirka zadataka iz više matematike II", koja se prvi put sada pojavljuje, čine jednu celinu koja obuhvata programe matematike na višim školama i programe matematike na prve dve godine većine fakulteta u našoj zemlji, kao i neke delove programa poslediplomskih studija.

Uloživši sve svoje višegodišnje iskustvo sa izvođenja nastave, prvenstveno smo želeli da ovim dvema knjigama pomognemo studentima na savlađivanju gradiva u toku studija i u toku sistematskog pripremanja za ispit.

Pri izradi knjige koristili smo sve postojeće zbirke koje su u upotrebi kod nas, bilo da su strane ili domaće, ali veliki broj zadataka su originalnog karaktera. Svi zadaci imaju rezultate ili rešenja. Veliki broj zadataka je urađen ili je dato uputstvo za rešavanje. Poređani su po oblastima, od prostijih do složenijih, a na početku svake oblasti date su najvažnije definicije i teoreme koje se koriste u zadacima te i sledećih oblasti.

I za ovu Zbirku, kao i za treće izdanje prve Zbirke, recenzenti su bili vanredni profesori Prirodno-matematičkog fakulteta dr D. Adnađević i dr M. Marjanović, koji su svojim primedbama i sugestijama doprineli da pojedini delovi u knjizi postanu preciznije i tačnije izloženi. I ovog puta im se na tome najsrdačnije zahvaljujemo.

Posebno se zahvaljujemo magistru matematičkih nauka M. Trifunoviću na saradnji u pisanju knjige.

Veliku zahvalnost dugujemo vanrednom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta dr V. Dajoviću na njegovoj inicijativi za pisanje ovih Zbirki i na podrškama.

Zahvaljujemo se dipl. ing. A. Miličiću na izradi crteža i kolektivima Građevinske knjige i Beogradskog grafičkog zavoda koji su uspešno realizovali pojavu ovih knjiga.

Kao i do sada bićemo zahvalni svima koji nam ukažu na omaške, greške i nedostatke ove knjige.

Beograd
8. XII. 1969.

Pisci

PREDGOVOR TREĆEM IZDANJU

U trećem izdanju otklonjen je veliki broj štamparskih grešaka i omaški iz prethodna dva izdanja, što će, nesumnjivo olakšati korišćenje knjige. Zato dugujemo osobitu zahvalnost M. Vučkoviću, asistentu Prirodno-matematičkog fakulteta u Kragujevcu, koji je izuzetno savesno i stručno pregledao celu knjigu i uočio pomenute nedostatke.

Beograd, 24. IX 1981.

Pisci

S A D R Ž A J

Matematika II

Matematika III

Glava I

REDOVI

§ 1. Redovi sa pozitivnim članovima

1° Konvergencija reda. Brojni red

(1) $$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

je konvergentan ako postoji konačan limes

$$\lim_{n\to\infty} S_n=S$$

gde je $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ (delimična suma reda (1)) i S zbir reda (1). U protivnom slučaju, kaže se da red (1) divergira.

2° Cauchyev kriterijum. Potreban i dovoljan uslov da red (1) konvergira jeste da za proizvoljno $\varepsilon>0$ postoji prirodan broj $N=N(\varepsilon)$ takav da je za $n>N$ i $p>0$

$$|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon.$$

Specijalno je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, ako red konvergira.

3° Testovi upoređivanja. Neka je, pored (1), dat red

(2) $$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

1) Ako je za $n>n_0$ ispunjena nejednakost

$$0\leqslant a_n\leqslant b_n$$

tada iz konvergencije reda (2) sledi konvergencija reda (1) i iz divergencije reda (1) sledi divergencija reda (2).

2) Ako je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k \qquad (0<k<\infty)$$

tada iz konvergencije reda (1), za $k<\infty$, sledi konvergencija reda (2), a iz divergencije reda (2), za $k>0$, sledi divergencija reda (1).

Kao komparativni red (2) često se upotrebljava red $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ koji konvergira za $p>1$ i divergira za $p<1$.

4° D'Alembertov test. Ako je

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q \qquad (a_n>0),$$

tada je za $q<1$ red (1) konvergentan. Ako je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q>1$, red (1) je divergentan.

5° Cauchyev test. Ako je

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=q \qquad (a_n>0),$$

tada je za $q<1$ red (1) konvergentan a za $q>1$ divergentan.

6° Raabeov test. Ako je

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=p \qquad (a_n>0),$$

tada je za $p>1$ red (1) konvergentan a za $p<1$ divergentan.

7° Gaussov test. Neka je

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\frac{\mu}{n}+\frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}} \qquad (a_n>0),$$

gde je θ_n ograničena funkcija od n i $\varepsilon>0$. Tada red (1) konvergira za $\lambda>1$ i za $\lambda=1$ ako je $\mu>1$. Za $\lambda<1$ i za $\lambda=1$ ako je $\mu\leqslant 1$, red (1) divergira.

8° Cauchyev integralni test. Ako je $f(x)$ $(x>0)$ nenegativna nerastuća funkcija, tada red

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

konvergira ili divergira istovremeno sa integralom

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx.$$

Za sledeće redove naći delimičnu sumu S_n i limes $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n.$ **2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}.$ **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}.$

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+k)(n+k+1)}$ $(k\in N).$ **5.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^k}-\frac{1}{(n+1)^k}\right].$ **7.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$ **8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}\right)$ $(a>0).$

9. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}$ gde pozitivni brojevi a_n obrazuju aritmetički niz.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2n^2}$.   **11.** 1° $\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx\,(|q|<1)$; 2° $\sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos nx\ \ (|q|<1)$.

12. Površine ograničene krivom $y=e^{-x}\sqrt{\sin x}$ $(x>0)$ i x-osom rotiraju oko x-ose. Naći zbir zapremina tela koja nastaju ovom rotacijom.

Na osnovu opšteg člana reda, a_n, zaključiti da sledeći redovi divergiraju:

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$.   **14.** $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\alpha \quad (0<\alpha<\pi)$.

15. $\sum_{n=0}^{\infty} \cos n\alpha \left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.   **16.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.   **17.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+a}}$.

Odrediti granice kojima teže sledeći izrazi kad $n\to\infty$:

18. $a_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} e^{-k}$.   **19.** $a_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln k$.   **20.** $a_n=\frac{1}{n^{1+\alpha}}\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}\ (\alpha>-1)$.

21. Na osnovu Cauchyevog kriterijuma dokazati da konvergencija reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ povlači konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, gde je $A_n=\sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i$ $(p_1=1,$ $p_n<p_{n+1}$, $n=1, 2, \ldots)$.

22. Pokazati da je u prethodnom zadatku $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty} A_n$.

Koristeći Cauchyev kriterijum dokazati da sledeći redovi konvergiraju:

23. $a_0+\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{b^i}\cdot(|a_i|<b,\ b>1)$.   **24.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x^n}{n^2}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx-\cos(n+1)x}{n}$.

26. Koristeći Cauchyev kriterijum dokazati da red $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira.

Znajući da je red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ konvergentan za $\alpha>1$ i divergentan za $\alpha\leq 1$ ispitati konvergenciju sledećih redova:

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$.   **28.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.   **29.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}\ (a>0)$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$.   **31.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n(2n-1)}}$.   **32.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}}$.

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(an+b)^p}\quad (a>0)$.   **34.** $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a}-1)\ \ (a>1)$.

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2\right)$.   **36.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$.

37. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right)$.   **38.** $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{x}{n}\ \ (x\neq 0)$.   **39.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sin\frac{1}{n}}{\sqrt{n^2+1}}$.

40. $\sum_{1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n+1}}-1\right)^p$.   **41.** $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{3^n}$.   **42.** $\sum_{n=2}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{\alpha} \ln\frac{n-1}{n+1}$.

43. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.   **44.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\alpha}}$.   **45.** $\sum_{n=3}^{\infty} \ln\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}$.

46. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$.   **47.** $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$.   **48.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left[e^3-\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{3n^2}\right]^p$.

Za dovoljno velike vrednosti n važi sledeća Stirlingova formula

$$n!=\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n+\frac{\theta_n}{12n}} \qquad (0<\theta_n<1).$$

Koristeći ovu formulu ispitati konvergenciju sledećih redova:

49. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.   **50.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.   **51.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n!}{n\ln n}$.   **52.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

53. Dokazati da je red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ divergentan ako je $a_1, a_2, a_3, \ldots$ aritmetički niz.

54. Da li je konvergentan red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ ako je $a_1, a_2, a_3, \ldots$ geometrijski niz?

55. Ako je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ (a_n>0)$ konvergentan, dokazati da je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ takođe konvergentan. Primerom pokazati da obrnuto ne važi.

56. Iz konvergencije redova $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ sledi konvergencija sledećih redova:

1° $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$; 2° $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)^2$; 3° $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$. Dokazati.

57. Ako je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan i ako je za dovoljno veliko n $a_n > a_{n+1} > 0$ tada je $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$. Dokazati.

Koristeći D'Alambertov test ispitati konvergenciju sledećih redova:

58. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$. **59.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$. **60.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ $(a>0)$.

61. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$. **62.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n!}$. **63.** $\sum_{n=0}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$ $(x>0)$.

64. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^y}$ $(x>0,\ y>0)$. **65.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$.

66. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$ $(a>0)$.

67. 1° $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\cdots(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2})$;

2° $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{5}-\sqrt[3]{5})(\sqrt{5}-\sqrt[5]{5})\cdots(\sqrt{5}-\sqrt[2n+1]{5})$.

68. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n>0)$ konvergira, dokazati da može biti $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$.

69. Dokazati da je red $\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{n} \frac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha}$ konvergentan za svako α i x.

Koristeći Cauchyev test ispitati konvergenciju sledećih redova:

70. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^n}$ $(a>1)$. **71.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}$. **72.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n$ $(x>0)$.

73. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{a_n}\right)^n$, gde je $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $x>0$, $a_n>0$. **74.** $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{n(n+1)}$.

75. $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{n^2+1}{n+1}}$. **76.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\left(a+\frac{1}{n}\right)^n}$ $(a>0)$. **77.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{a^n+b^n}$ $(a>1,\ b>1)$.

78. Ako D'Alembertov test rešava pitanje konvergencije nekog reda onda ga rešava i Cauchyev test. Obrnuto ne važi. Dokazati.

79. Primeniti D'Alembertov i Cauchyev test na red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gde je $a_{2k-1} = \frac{2^{k-1}}{3^{k-1}}$, $a_{2k} = \frac{2^{k-1}}{3^k}$ $(k=1, 2, \ldots)$ i potvrditi drugi deo teoreme u prethodnom zadatku.

80. Ako je $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q$ $(a_n>0)$ tada je red za $q<1$ konvergentan a za $q>1$ divergentan. Dokazati.

Ispitati konvergenciju redova:

81. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a+(-1)^n b}{a^n}$ $(a>b>1)$. **82.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{a^n}$ $(a>1)$.

83. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$. **84.** $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{|x|^{n^2}+|y|^{n^2}}$.

Koristeći Raabeov test ispitati konvergenciju redova:

85. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$. **86.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}$.

87. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}$.

88. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(a+\sqrt{1})(a+\sqrt{2})\cdots(a+\sqrt{n})}$ $(a>0)$. **89.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

90. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^\alpha}$ $(a>0)$.

91. $\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{n} \frac{\ln(1+k)}{\ln(1+a+k)}$ $(a>0)$.

Koristeći Gaussov test ispitati konvergenciju redova:

92. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p$. **93.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{q(q+1)\cdots+(q+n-1)}\right]^\alpha$ $(p>0,\ q>0)$.

Koristeći Cauchyev integralni test ispitati konvergenciju redova:

94. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. **95.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ $(\alpha>1)$.

96. 1° $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^3 n\ln^2(\ln n)}$; 2° $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n\ln(\ln n)}$.

97. Neka je $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ $(a>1)$. 1° Pokazati da se, ako se umesto S uzme $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^a}$, čini greška manja od $\frac{1}{a-1}\cdot\frac{1}{n^{a-1}}$. 2° Dodajući još da je $\Sigma=S_n+\int_n^{\infty}\frac{dx}{x^a}$, pokazati da je S između $\Sigma-\frac{1}{2n^a}$ i Σ. 3° Pokazati da je

$$\Sigma-\frac{1}{2n^a}+\frac{a}{12(n+1)^{a+1}}<S<\Sigma-\frac{1}{2n^a}+\frac{a}{12(n-1)^{a+1}}.$$

98. Ako je $a_n>a_{n+1}>0$ za svako n dovoljno veliko, dokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ i red $\sum_{n=1}^{\infty}2^n a_{2^n}$ istovremeno konvergiraju i divergiraju.

Ispitati konvergenciju redova:

99. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+a}-\sqrt{n+b}}{n^a}$ $(a>0,\ b>0)$. **100.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\ln\frac{n+1}{n}\right)$.

101. $\sum_{n=1}^{\infty}5^{-\sqrt[3]{n}}$. **102.** $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{\frac{a\log_\lambda n+b}{c\log_\lambda n+d}}$ $(\lambda>1)$.

§ 2. Redovi sa promenljivim predznacima članova i operacije sa konvergentnim redovima

1° Apsolutna konvergencija. Kaže se da red

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

konvergira apsolutno ako konvergira red

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|.$$

U tom slučaju konvergira i red (1). **Zbir apsolutno konvergentnog reda ne zavisi od poretka sabiranja njegovih članova.**[1]

Ako red (1) konvergira a red (2) divergira, kaže se da red (1) uslovno konvergira. **Zbir uslovno konvergentnog reda promenom poretka sabiranja njegovih članova može imati proizvoljnu vrednost (Riemannova teorema).**

2° Testovi konvergencije.

1) *Leibnizov test.* Naizmenični red

$$b_1-b_2+b_3-b_4+\cdots+(-1)^{n-1}b_n+\cdots \qquad (b_n>0)$$

konvergira ako je $b_n>b_{n+1}$ $(n=1,2,\ldots)$ i $\lim_{n\to\infty}b_n=0$.

U tom slučaju za ostatak reda $R_n=(-1)^n b_{n+1}+(-1)^{n+1}b_{n+2}+\cdots$ važi ocena

$$R_n=(-1)^n\theta_n b_{n+1} \qquad (0<\theta_n<1).$$

2) *Abelov test.* Red $\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$ konvergira ako konvergira red $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ i ako brojevi b_n obrazuju monotono ograničen niz.

3) *Dirichletov test.* Red $\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$ konvergira ako su delimične sume $A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ ograničene i ako b_n monotono teži nuli kad $n\to\infty$.

3° Operacije sa redovima. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ i red $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ konvergiraju tada je:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$;

2) $\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n$.

gde je $c_n=a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1$ i bar jedan od datih redova apsolutno konvergira.

Primenom Leibnizovog testa dokazati konvergenciju redova:

103. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^a}$ $(a>0)$. **104.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$.

Može se dokazati da iz

105. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=A,\quad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=B,\quad \sum_{n=1}^{\infty}c_n=C\quad \left(c_n=\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu b_{n-\nu+1}\right)$ sledi $AB=C$ (Abel)

Ispitati apsolutnu i uslovnu konvergenciju redova:

106. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(\sqrt{2})^n}{\sqrt{n}}$. **107.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\operatorname{tg}\frac{1}{n}$. **108.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$.

109. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)a^{2n}}$.

110. Da li se može primeniti Leibnizov test na red

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\cdots?$$

Konvergira li dati red?

111. Znajući da je $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2$ naći sumu reda

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}+\cdots$$

koji je nastao od datog reda premeštanjem njegovih članova.

Primenom Dirichletovog testa dokazati konvergenciju sledećih redova:

112. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n}$. **113.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$. **114.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{\ln n}$.

115. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\alpha$ gde je $a_{n-1} > a_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. **116.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{n} \sin \frac{n\pi}{4}$.

117. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos \frac{\pi n^2}{n+1}$.

Primenom Abelovog testa dokazati konvergenciju redova:

118. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$.

119. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} \frac{\sqrt{n}}{n+a}$ $(a>0)$. **120.** $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$.

Pokazati da sledeći redovi konvergiraju i izračunati njihov zbir sa tačnošću od 0,01.

121. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4}$. **122.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)(n+2)}$.

Koliko članova reda treba sabrati da bi se dobio zbir sa tačnošću 10^{-6}:

123. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+1}}$. **124.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^\circ}{\sqrt{n}}$.

125. Dokazati da je $\frac{1}{2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^a} < 1$ $(a>0)$.

126. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha-1)^n \alpha^n}{(2^n+1)\ln(n+1)}$.

Ispitati uslovnu i apsolutnu konvergenciju redova:

127. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n}$. **128.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin^{2n} x}{n}$. **129.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\ln n}$.

130. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^a$. **131.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{b^n+n}$ $(b>0)$. **132.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{4}}{n^a}$.

133. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^a}$ $(0<x<\pi)$. **134.** $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^a}\right)$.

135. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(\sqrt{n}+(-1)^{n-1})^a}$.

136. Ako su redovi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentni, može li biti red $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ konvergentan? Posmatrati redove: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$.

137. Da bi red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ $(c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1)$ bio konvergentan, moraju li oba reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ biti konvergentna?

138. Transformacijom članova reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n \sin n^2$, pokazati da ovaj red konvergira i da mu je zbir između 0 i 1.

139. Ako je $a_1 = 1$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{4} + \frac{(-1)^n}{2}$, ispitati apsolutnu i uslovnu konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$.

Naći zbirove sledećih redova:

140. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{2^n}\right)$. **141.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)+1}{n(n+1)}$.

142. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{3-4n}{6}\pi}{2n}$.

143. Koristeći jednakost $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$ naći zbir reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}}$.

144. Naći Cauchyev proizvod reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ sa samim sobom i pokazati da tako dobijeni red ne konvergira iako dati red konvergira.

145. Koristeći Cauchyev proizvod pokazati da je $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}} = 16$ pa zatim naći zbir reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

146. Dokazati da je $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\right) = 1$.

§ 3. Ponovljeni i dvojni redovi

Data je beskonačna matrica

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\cdots a_{1n}\cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\cdots a_{2n}\cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\cdots a_{3n}\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}\cdots a_{mn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}.$$

Neka su elementi matrice A, a_{ij}, bilo kako poređani u niz

(1) $$u_1,\ u_2,\ u_3,\ldots$$

i neka je pomoću njega formiran red

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

koji daje „zbir" svih elemenata matrice A. Najčešće se upotrebljavaju sledeća tri metoda nalaženja „zbira" svih elemenata matrice A:

1° Metod trougla. Obrazuju se zbirovi:

$$S_1=a_{11},\quad S_2=S_1+a_{12}+a_{21},\quad S_3=S_2+a_{13}+a_{22}+a_{31},\ldots$$

i traži se granična vrednost niza

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ldots$$

Ako ova granična vrednost postoji i konačna je, kaže se da red (2) $\left(u_n=\sum_{i=1}^{n} a_{i\,\overline{n-i+1}}\right)$ konvergira po Cauchyu i zbir mu je

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n.$$

2° Metod konačnih pravougaonika. Obrazuje se konačan zbir

$$A_{nm}=\sum_{i,j=1}^{i=n,\,j=m} a_{ij}$$

i traži se dvojni limes

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} A_{nm}.$$

Ako ovaj limes postoji i konačan je, kaže se da dvojni red

(3) $$\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}$$

konvergira i zbir mu je

$$S=\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} A_{nm}.$$

3° Metod beskonačnih pravougaonika. Ako sve vrste matrice A obrazuju konvergentne redove

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}=A_i$$

i ako red

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i$$

konvergira, kaže se da konvergira ponovljeni red

(4) $$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}.$$

Takođe je ponovljeni i red

(4′) $$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

4° Važnije teoreme. 1) Ako red (2) apsolutno konvergira tada je

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

2) Ako red $\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|$ konvergira tada konvergiraju i redovi $\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ i važi $\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

3) Ako red $\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|$ konvergira tada je

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{i}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}.$$

4) Za konvergenciju dvojnog reda (3), pod uslovom $a_{ij}>0$, potrebno je i dovoljno da su mu delimične sume

$$A_{nm}=\sum_{i,j=1}^{i=n,\,j=m} a_{ij}$$

ograničene.

5) Neka su članovi niza (1) elementi matrice A i neka se svi članovi matrice A nalaze u nizu (1). Ako bilo koji od redova (2), (3), (4), (4′), posle zamene njihovih članova sa apsolutnim vrednostima, konvergira, tada konvergiraju svi i imaju isti zbir.

147. Ispitati konvergenciju dvojnog reda $\sum_{i,k=1}^{\infty}\frac{1}{i^p k^q}$.

148. Dokazati da dvojni red $\sum_{i,k=1}^{\infty}\frac{1}{(i+k)^p}$ konvergira za $p>2$.

149. Naći zbir ponovljenog reda $\sum\limits_{m=2}^{\infty}\sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{1}{m^k}$.

150. Neka je: $a_{ij}=\dfrac{i-j}{2^{i+j-2}}\dfrac{(i+j-3)!}{(i-1)!\,(j-1)!}$ $(i>1,\ j>1)$,

$$a_{i1}=2^{-(i-1)}\ (i>1),\quad a_{1j}=-2^{-(j-1)}\ (j>1),\quad a_{11}=0.$$

Pokazati da je: 1° $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_{ij}=1$; 2° $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{ij}=-1$.

151. Neka je $r<p$. Dokazati da iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n}|u_\nu|^r\right)^{\frac{1}{r}}$ sledi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n}|u_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

152. Neka je $r<p$. Dokazati da iz konvergencije reda $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u(n,m)|^r\right)^{\frac{1}{r}}$ sledi konvergencija reda $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u(n,m)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Mogu li sigme $\sum\limits_{m=1}^{\infty}$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ promeniti mesta pa da iskaz važi?

Dokazati da je:

153. $\sum\limits_{m,n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(p+n)^m}=\dfrac{1}{p+1}$ $(p>-1)$. **154.** $\sum\limits_{m=2,\,n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n)^m}=\ln 2$.

155. $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(4n-1)^{2m+1}}=\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{2}\ln 2$.

156. $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(4n-1)^{2m}}=\dfrac{1}{4}\ln 2$. **157.** $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(4n-2)^{2m}}=\dfrac{\pi}{8}$.

158. Pokazati da je $\sum\limits_{p,q=1}^{\infty}\dfrac{x_p x_q}{p+q+1}>0$ ako je $0<\sum\limits_{p=1}^{\infty}x_p^2<\infty$.

159. Neka je: $\sum\limits_{p=1}^{\infty}x_p^2=1$, $\sum\limits_{p=1}^{\infty}y_p^2=1$ i neka red $\sum\limits_{p,q=1}^{\infty}a_{pq}x_p y_q$ konvergira.

Pokazati da su sledeća dva iskaza ekvivalentna:

1) red $\sum\limits_{q=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{p=1}^{\infty}a_{pq}x_p\right)y_q$ konvergira,

2) red $\sum\limits_{p=1}^{\infty}\left|\sum\limits_{q=1}^{\infty}a_{pq}y_q\right|^2$ konvergira.

160. Neka je: $\sum\limits_{p=1}^{\infty}x_p^2=1$, $\sum\limits_{q=1}^{\infty}y_q^2=1$. Dokazati da je

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{x_p y_q}{p+q+1}<\pi.$$

161. Kaže se da beskonačna matrica $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ preslikava niz $\{x_n\}$ u niz $\{x_n'\}$ ako je $x_n'=\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{nj}x_j$ $(n=1,2,\ldots)$.

Pokazati da beskonačna matrica A, kod koje je $\lim\limits_{n\to\infty}a_{nk}=0$, transformiše svaki ograničen niz u nula niz tada i samo tada kada je $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|=0$.

162. Posmatrajući $I_n=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}t\left[\sum\limits_{r=1}^{n}(-1)^r(x_r\cos rt-y_r\sin rt)\right]^2dt$ i koristeći:

$$\int_{-\pi}^{\pi}t\sin mt\,dt=\frac{(-1)^{m+1}2\pi}{m},\quad \int_{-\pi}^{\pi}t\cos mt\,dt=0\ (m \text{ ceo broj različit od nule}),$$

pokazati da je $I_n=2(S_n-T_n)$ gde je

$$S_n=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\frac{x_p y_q}{p+q},\qquad T_n=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}{}'\frac{x_p y_q}{p-q}$$

($\sum'$ označava da se pri sabiranju izostavljaju članovi gde je $p=q$). Ako je:

$$S=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{x_p y_q}{p+q},\quad T=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}{}'\frac{x_p y_q}{p-q},\quad \sum_{p=1}^{\infty}x_p^2=\sum_{q=1}^{\infty}y_q^2=1,$$

dokazati da je: $|S|<\pi$, $|T|<2\pi$.

§ 4. Funkcionalni redovi

1° Oblast konvergencije. Skup X, onih vrednosti x, za koje funkcionalni red

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

konvergira, zove se *oblast konvergencije*.

2° Uniformna konvergencija. Kaže se da niz funkcija

$$u_1(x),\ u_2(x),\ u_3(x),\ldots$$

uniformno konvergira na skupu X ako za svako $x\in X$ postoji funkcija $u(x)=\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x)$ i ako, za proizvoljno $\varepsilon>0$, postoji broj $N=N(\varepsilon)$ takav da je

$$|u(x)-u_n(x)|<\varepsilon$$

za svako $n>N$ i za svako $x\in X$.

Funkcionalni red (1) je uniformno konvergentan na skupu X ako na tom skupu uniformno konvergira niz njegovih delimičnih suma

$$S_n(x)=\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu(x) \qquad (n=1,2,3,\ldots).$$

3° Cauchyev kriterijum za uniformnu konvergenciju. Da bi red (1) uniformno konvergirao na skupu X, potrebno je i dovoljno da za svako $\varepsilon>0$ postoji broj $N=N(\varepsilon)$, takav da je za $n>N$ i $p>0$ ispunjena nejednakost

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|=\left|\sum_{\nu=n+1}^{n+p} u_\nu(x)\right|<\varepsilon \qquad (x\in X).$$

4° Testovi uniformne konvergencije.

1) *Weierstrassov test.* Red (1) konvergira apsolutno i uniformno na skupu X ako postoji konvergentan brojni red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ takav da je za svako $x\in X$

$$|u_n(x)|<c_n \qquad (n=1,2,\ldots).$$

2) *Abelov test.* Red

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, b_n(x)$$

uniformno konvergira na X ako red $\sum a_n(x)$ konvergira uniformno na X i ako je niz funkcija $b_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ ograničen i monoton za svako $x\in X$.

3) *Dirichletov test.* Red (2) uniformno konvergira na X ako su delimične sume $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(x)$ ograničene i ako niz $b_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ za svako $x\in X$ monotono i uniformno konvergira ka nuli kad $n\to\infty$.

5° Osobine funkcionalnih redova. 1) Zbir uniformno konvergentnog reda neprekidnih funkcija je neprekidna funkcija.

2) Ako funkcionalni red (1) uniformno konvergira na intervalu (a, b) i ako postoji $\lim_{x\to a} u_n(x)=A_n$ $(n=1,2,\ldots)$ tada: a) red $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ konvergira i b) važi jednakost

$$\lim_{x\to a}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\lim_{x\to a} u_n(x)\right\}.$$

3) Ako su članovi konvergentnog reda (1) neprekidno diferencijabilne funkcije na intervalu (a, b) i ako red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ uniformno konvergira na (a,b) tada je za $x\in(a,b)$

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right]'=\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

4) Ako su članovi reda (1) neprekidne funkcije i ako red uniformno konvergira na konačnom segmentu $[a, b]$ tada je

$$(3) \qquad \int_a^b\left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right\}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,dx$$

Ako $\int_a^b\left\{\sum_{i=n+1}^{\infty} u_i(x)\right\}dx\to 0$ za $n\to\infty$ onda je formula (3) tačna i u slučaju beskonačnih granica integracije.

Odrediti oblast apsolutne i uslovne konvergencije redova:

163. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2x)^n}{n}$, **164.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$. **165.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{x^n}$.

166. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(x+2)^n}$. **167.** $\sum_{n=1}^{\infty} n\sqrt[3]{\sin^n x}$. **168.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln x)^n}{n}$.

169. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$. **170.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n$. **171.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

172. $\sum_{n=1}^{\infty} n\, e^{-\frac{n}{x}}$. **173.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{n!}$. **174.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sin^n x}{n^2}$. **175.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{e^{nx}}$.

176. Dat je niz funkcija $u_n(x)=x^n$ $(n=1,2,\ldots)$. 1° Pokazati da dati niz konvergira na odsečku $[0, 1]$ i naći mu graničnu vrednost. 2° Pokazati da na odsečku $[0,1]$ niz funkcija ne konvergira uniformno. 3° Da li dati niz konvergira uniformno na odsečku $[0, a]$ $(a<1)$? Za ispitivanje uniformne konvergencije nizova funkcija korisno može da posluži sledeća teorema: Da bi niz $u_n(x)$ uniformno konvergirao graničnoj funkciji $u(x)$ na skupu X potrebno i dovoljno je da je

$$\lim_{n\to\infty}\{\sup_{x\in X}|u_n(x)-u(x)|\}=0.$$

Ispitati običnu i uniformnu konvergenciju nizova funkcija na datim intervalima:

177. $u_n(x)=n(1-x)x^{n-1}$, $x\in[0,1]$. **178.** $u_n(x)=\frac{nx}{1+n+x}$, $x\in[0, 1]$.

179. $u_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$, $x\in(-\infty,\infty)$. **180.** $u_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$, $x\in[a,b]$.

181. $u_n(x)=\operatorname{arc\,tg} nx$, $x\in(0,\infty)$. **182.** $u_n(x)=e^{n(\ln x-1)}$, $x\in(1, e)$.

183. $u_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, 1° $x\in(a, b)$; 2° $x\in(-\infty,\infty)$.

Koristeći Cauchyev kriterijum ispitati uniformnu konvergenciju redova:

184. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ za: 1° $|x|<q<1$; 2° $|x|<1$.

185. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, $x \in [-1, 1]$. **186.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(x+n-1)(x+n)}$, $x \in [0, a]$.

187. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x(1-x)^n$, $x \in [0, 1]$. **188.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$, $x \in [1, \infty]$.

189. Ako red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{n!}$ (Newtonov red) konvergira za $x = x_0$, $x_0 \neq 0, 1, 2, \ldots$, dokazati da konvergira za svako $x > x_0$.

190. Dokazati da iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n e^{-x \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$ sledi konvergencija reda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{n!}$.

191. Dokazati da Newtonov red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{n!}$ i Dirichletov red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n^x}$ imaju istu oblast obične konvergencije i apsolutne konvergencije,

Koristeći Weierstrassov test pokazati da sledeći redovi uniformno konvergiraju u naznačenim intervalima

192. 1° $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^a}$; 2° $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^a}$; $a > 1$, $x \in (-\infty, \infty)$.

193. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$, $x \in (-\infty, \infty)$. **194.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^3}$, $x \in (-\infty, \infty)$.

195. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^4 x^2}$, $x \in (-\infty, \infty)$. **196.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}}$, $x \in [0, \infty]$.

197. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + [\varphi(x)]^2}$, $x \in (-\infty, \infty)$. **198.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 x^2}}{n^2}$, $x \in (-\infty; \infty)$.

199. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, $x \in [a, \infty]$ $(a > 1)$. **200.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n}\right)$, $x \in [-a, a]$.

Ispitati uniformnu konvergenciju sledećih redova na naznačenim intervalima:

201. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$, $x \in (0, \infty)$. **202.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1+2^n x}}{n!}$, $x \in [0, \infty)$.

203. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{2n} e^{-n^2 x^2}$, $x \in (-\infty, \infty)$.

204. Ako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ uniformno konvergira na $[a, b]$, dokazati da i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ uniformno konvergira na $[a, b]$.

205. Ako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$ konvergira uniformno za $x \in [0, \infty)$.

Odrediti oblast definisanosti i oblast neprekidnosti sledećih funkcija:

206. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x e^{-n(x)}$ **207.** $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n$. **208.** $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(1+n^2x^2)}$.

209. Ispitati uslovnu, apsolutnu i uniformnu konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{an}$ $(a \in R)$.

210. Da li se može diferencirati član po član reda $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^n \pi x}{2^n}$, $x \in (-\infty, \infty)$?

211. Koristeći jednakost $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ $(|x| < 1)$ naći zbirove:

1° $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$; 2° $1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots$

Naći limese:

212. $\lim\limits_{x \to 1-0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{x^n}{1+x^n}$. **213.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$.

214. $\lim\limits_{x \to \infty} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{1+2^n x^2}$. **215.** $\lim\limits_{p \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p}}$.

Da li se mogu diferencirati član po član redovi:

216. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$, $x \in (\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$. **217.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$, $x \in (\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$.

218. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{n^2}$. $x \in (-\infty, \infty)$.

Da li se mogu integraliti član po član redovi:

219. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$, $x \in (-\infty, \infty)$. **220.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$, $x \in (-\infty, \infty)$.

221. Naći $\int\limits_0^{\infty} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+x^2}\right) dx$.

222. Neka je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ i neka red $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{|a_n|}$ konvergira.

1° Pokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x-a_n}$ konvergira apsolutno i uniformno na svakom ograničenom i zatvorenom skupu koji ne sadrži tačke $x=a_n$ $(n=1, 2, \ldots)$.

2° Za $a_n=a(1-2^{2n})$, gde a_n $(n=1, 2, \ldots)$ ne pripada odsečku $[a, 2a]$, naći $\displaystyle\int_a^{2a}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x-a_n}\right)dx$.

§ 5. Stepeni redovi

1° Interval konvergencije. Za stepeni red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ postoji broj R takav da za $|x-a|<R$ red konvergira a za $|x-a|>R$ red divergira. Interval $(R-a, R+a)$ zove se *interval konvergencije* a R *poluprečnik intervala konvergencije* reda. Na krajevima intervala konvergencije, red može konvergirati ili divergirati. R se određuje po formuli

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|},$$

ili po formuli

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

ako ovaj limes postoji.

2° Taylorov red. Ako funkcija $f(x)$ u tački $x=a$ ima sve neprekidne izvode tada se u okolini te tačke funkcija može predstaviti na sledeći način

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}_{(a)}}{n!}(x-a)^n.$$

Ovaj red zove se Taylorov red funkcije $f(x)$. Izraz

$$R_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}_{(a)}}{k!}(x-a)^k=\frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad (0<\theta<1)$$

je ostatak Taylorovog reda.

3° Taylorov red nekih funkcija u tački $x=0$.

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad (-\infty<x<\infty),$$

$$\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \qquad (-\infty<x<\infty).$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (-\infty<x<\infty).$$

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n \quad (-1<x<1 \text{ za } \alpha\le-1;\ -1<x\le1 \text{ za } -1<\alpha<0)$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \quad (-1<x\le1).$$

Odrediti poluprečnik konvergencije i ispitati konvergenciju na krajevima intervala konvergencije za sledeće stepene redove:

223. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$. **224.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$. **225.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$.

226. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$. **227.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx^n}{(n+2)(n+3)}$. **228.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$.

229. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^{2n}$. **230.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{na^n}$ $(a>0)$. **231.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n x^n}{n^2+1}$.

232. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n}x^n$. **233.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}x^n$.

234. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{a^n+b^n}$ $(a>0,\ b>0)$. **235.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{na^{n^2}}{n+2}\right)^p\dfrac{x^n}{n!}$ $(a>0,\ p\in R)$.

236. Ako je R_1 poluprečnik konvergencije reda $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ i R_2 poluprečnik konvergencije reda $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n x^n$, šta se može reći o poluprečniku konvergencije redova; 1° $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$; 2° $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n b_n x^n$?

Naći oblast konvergencije redova:

237. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)x^n$. **238.** $1+\dfrac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}=\dfrac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots+$

$$+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1\cdot2\cdot3\cdots n\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n+\cdots.$$

Naći oblast definisanosti funkcija:

239. $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}$ **240.** $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{-n(x+1)}}{n^2}$.

241. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{a^{n^2}}\operatorname{tg}^n x$ $(a>1)$. **242.** $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p\left(\dfrac{\cos x-1}{2}\right)^n$.

243. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n^2} e^{n\frac{1+x}{1-x}}$.

244. Razložiti polinom x^3-2x^2+5x-7 po stepenima od $(x-1)$.

245. Razložiti polinom $x^{10}+2x^9-3x^7-6x^6+3x^4+6x^3-x-2$ u red po stepenima $(x-1)$ i pokazati da je $x=1$ nula trećeg reda ovog polinoma.

246. Razložiti funkciju $f(x)=\frac{1}{a-x}$ $(a\neq 0)$ u red po: 1° stepenima od x; 2° stepenima od $(x-b)$ $(b\neq a)$; 3° stepenima od $\frac{1}{x}$. U svim slučajevima odrediti oblast konvergencije dobijenih redova.

247. Napisati Mac Laurinov red za funkciju $f(x)=\frac{1}{1+x^k}$ (k prirodan broj).

248. Razložiti funkciju $f(x)=\frac{1}{x^2}$ u red po stepenima od $(x+1)$ i naznačiti kada razvoj važi.

249. Razložiti funkciju e^x u red po stepenima $(x+2)$.

250. Razložiti funkciju $\ln x$ u red po stepenima $(x-1)$ i pokazati za koje x važi taj razvoj.

251. Razložiti funkciju $\cos^2 x$ u red po stepenima $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Koristeći razlaganja u stepeni red po x funkcija e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^a$ razložiti u stepeni red po x sledeće funkcije i naznačiti kada ti razvoji važe:

252. $\operatorname{sh} x$. **253.** $\operatorname{ch} x$. **254.** a^x $(a>0)$.

255. $\frac{1}{4-x^4}$. **256.** $\frac{x-3}{(x+1)^2}$. **257.** $e^x \sin x$.

258. $x+\sqrt{1+x^2}$. **259.** e^{-x^3}. **260.** $\frac{12-5x}{6-5x-x^2}$.

261. $\ln(1+3x+2x^2)$. **262.** $\frac{x\cos\alpha-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}$. **263.** $\frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$.

264. $\int\limits_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt$. **265.** $\int\limits_1^x \frac{\operatorname{arc\,tg} t}{t}\,dt$. **266.** $\int \frac{\cos x}{x}\,dx$.

Razvijajući izvod $f'(x)$ u stepeni red po x i integraleći član po član dobijenog reda napisati razvoj u stepeni red po x funkcija:

267. $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x$. **268.** $f(x)=\arcsin x$. **269.** $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

270. $f(x)=\arccos(1-2x^2)$.

Razviti u stepeni red po x sledeće funkcije:

271. $x\cos 2x$. **272.** $\ln\frac{1+x}{1-x}$. **273.** $(1+x^2)\operatorname{arc\,tg} x$.

274. $(1+e^x)^2$. **275.** $\ln^2(1-x)$.

Napisati prva četiri člana stepenog reda po x sledećih funkcija:

276. $\operatorname{tg} x$. **277.** $e^{\cos x}$. **278.** $(1+x)^x$.

279. Kolika je greška ako se zbir reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ zameni zbirom prvih 100 članova?

280. Proceniti grešku ako se zbir reda $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ zameni zbirom prvih n članova?

281. Ako za dovoljno veliki broj $n \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<k<1$ tada za ostatak reda R_n važi procena $|R_n|<|a_n|\frac{k}{1-k}$. Dokazati.

282. Koristeći razvoj $\operatorname{arc\,tg} x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ izračunati broj π sa pet tačnih decimalnih mesta.

283. Koristeći odgovarajuće stepene redove izračunati sledeće vrednosti sa tačnošću od 0,0001

1° $\cos 10°$; 2° $\sin 1°$; 3° $\sin\frac{\pi}{4}$; 4° $\arcsin 1$; 5° $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}$; 6° $\sqrt{e}$.

Razvijajući podintegralnu funkciju u stepeni red izračunati integrale:

284. $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ sa tačnošću do 10^{-5}. **285.** $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$ sa tačnošću 10^{-3}.

286. $\int\limits_0^{\pi/4} \sin x^2\,dx$ sa tačnošću 10^{-3}. **287.** $\int\limits_0^{1/2} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\,dx$ sa tačnošću 10^{-2}.

288. $\int\limits_0^{1/5} \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}\,dx$ sa tačnošću 10^{-3}.

Naći zbirove sledećih redova:

289. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$. **290.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n^2(2n-1)}$. **291.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$.

292. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}$. **293.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$. **294.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$.

295. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)}$. **296.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{2n(2n-1)}$.

Integracijom član po član naći zbirove sledećih redova:

297. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$. **298.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+3)x^{2n}}{n!}$.

299. Naći zbir reda $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+2}\,\frac{x^n}{n!}$.

Razlaganjem podintegralne funkcije u stepeni red po x izračunati sledeće integrale:

300. $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$, znajući da je $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

301. $\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}\,dx$, znajući da je $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

302. $\int_0^1\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx$. **303.** $\int_0^1\ln x\,\ln(1-x)\,dx$.

304. Dat je integral $I(a)=\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}$ ($a>0$. Razviti funkciju $\frac{1}{x^2+a^2}$ u stepeni red po $\frac{x}{a}$ za $0<x<a$ i u stepeni red po $\frac{a}{x}$ za $x>a$, pa zatim iskoristiti jednakost $\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx=\int_0^{a}\frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx+\int_a^{\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx$ i naći $I(a)$ integraleći član pc član u dobijenim redovima.

305. Znajući da je $\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}\varphi\,d\varphi=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{\pi}{2}$, dokazati da se dužina luka elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ može izraziti u obliku konvergentnog brojnog reda

$$s=10\pi\left\{1-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\frac{(4/5)^{2n}}{2n-1}\right\}.$$

306. Dat je integral $I(a)=\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 ax}{x(e^{2x}-1)}\,dx$. 1° Pokazati da je

$$\frac{d}{da}\{I(a)\}=\int_0^{\infty}\left\{\frac{d}{da}\left[\frac{\sin^2 ax}{x(e^{2x}-1)}\right]\right\}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}e^{-kx}\sin ax\right)dx.$$

2° Koristeći jednakost $cth\,x=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2+n^2\pi^2}$ i 1° naći $I(a)$ u obliku elementarne funkcije.

307. Dat je integral $I=\int_0^{\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos ax\,dx$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$ Za $-\min(\alpha,\beta)<a<\min(\alpha,\beta)$ razviti $\cos ax$ u stepeni red, pokazati da znak integrala i znak sumiranja mogu razmeniti mesta i na osnovu toga izračunati I u obliku elementarnih funkcija.

308. Koeficijenti a_n stepenog reda $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ su uzastopne cifre decimalnog broja koji se dobija pretvaranjem razlomka $\frac{4}{7}$ u decimalni broj. Odrediti poluprečnik konvergencije i zbir toga reda.

309. Dat je red $f_\lambda(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^\lambda x^{n-1}$ $(\lambda\in R)$.

1° Odrediti interval konvergencije i ispitati konvergenciju na krajevima intervala.

2° Pokazati da je $f_{\lambda+1}(x)=\frac{d}{dx}[xf_\lambda(x)]$.

310. Dat je red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)^a}{n(n+1)(n+2)}x^n$ $(a\in R)$.

1° Ispitati uslovnu, apsolutnu i uniformnu konvergenciju reda.

2° Za $a=1$ i $x=1$ sumirati dati red.

311. Dat je potencijalni red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^n+a^n)\,n^{\alpha n}}{n!}\,x^n$ gde su a i α realni parametri.

1° Odrediti poluprečnik konvergencije datog reda u zavisnosti od a i α.

2° Za $\alpha=1$ i $a\geqslant 2$ ispitati konvergenciju na krajevima intervala konvergencije.

3° Za $\alpha=0$ i $a=-\frac{1}{3}$ sumirati dati red.

4° Sumirati red $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!}\,x^{2k}$.

312. Dat je red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+n}{n!\,n^{\alpha n}}\,x^n \quad (\alpha\in R)$.

1° Odrediti poluprečnik konvergencije datog reda u zavisnosti od parametra α.

2° Za $\alpha=-1$ ispitati konvergenciju datog reda na granicama intervala konvergencije.

3° Za $\alpha=0$ naći zbir datog reda.

313. Dat je red $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}$.

1° Naći oblast definisanosti funkcije $f(x)$.

2° Napisati $f(x)$ u konačnom obliku.

3° Naći zbir reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n^2-1)\,9^n}$.

314. Dat je red $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \operatorname{sh}(n+1)\,a \quad (a>0)$.

1° Naći poluprečnik konvergencije i ispitati konvergenciju na krajevima intervala konvergencije.

2° Pokazati da je zbir reda jednak $\frac{\operatorname{sh} a}{1-2x\operatorname{ch} a+x^2}$.

315. 1° Naći oblast konvergencije redova

$$f(r,\theta)=\sum_{k=0}^{\infty} r^k\cos k\theta,\quad \varphi(r,\theta)=\sum_{k=1}^{\infty} r^k \sin k\theta.$$

2° Napisati $f(r,\theta)$ i $\varphi(r,\theta)$ u konačnom obliku.

316. Pokazati jednakost $\int_0^{\infty} \sin x^2\,dx=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} |\sin x^2|\,dx$ pa na osnovu toga dokazati da integral $\int_0^{\infty}\sin x^2 dx$ konvergira. Da li iz konvergencije integrala $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ sledi da je $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$?

Dokazati da konvergiraju integrali:

317. $\int_0^{\infty}\cos x^2\,dx$. **318.** $\int_0^{\infty}(-1)^{E(x^2)}\,dx$.

319. Pokazati da je $\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\,dx=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x}\,dx$, pa koristeći srednju vrednost integrala $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ i dobijenu jednakost dokazati da integral $\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ divergira.

320. Ispitati apsolutnu i uslovnu konvergenciju integrala $\int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+x+1}\,dx$ predstavljajući ga redom.

§ 6. Fourierovi redovi

1° **Dirichletovi uslovi.** Kaže se da funkcija $f(x)$ ispunjava Dirichletove uslove u intervalu (a,b) ako je u tom intervalu:

1) uniformno ograničena, tj. $|f(x)|<M$ za svako $x\in(a,b)$ gde je M konstanta; 2) ima ne više od konačnog broja tačaka prekida i sve su prvog reda, tj. u svakoj tački prekida ξ postoji konačan levi i desni limes; 3) ima ne više od konačnog broja pravih ekstremuma.

2° **Teorema o razlaganju u Fourierov red.** Ako funkcija ispunjava Dirichletove uslove u intervalu $(-l,l)$, tada se za svaku tačku x-tog intervala, za koju je $f(x)=\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$, funkcija može predstaviti Fourierovim redom:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{1}$$

gde je:

(2) $$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n=0,\,1,\,2,\ldots)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n=1,\,2,\,3,\ldots).$$

Specijalno: a) ako je $f(x)$ parna, tada je

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l} \quad \text{gde je } a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n=0,\,1,\,2,\ldots)$$

b) ako je $f(x)$ neparna, tada je

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{l} \quad \text{gde je } b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n=1,\,2,\ldots).$$

3° **Integracija Fourierovog reda.** Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna na intervalu $(-l,\,l)$ tada se red (1), koji može biti i divergentan, može integraliti član po član u tom intervalu.

321. Pokazati da funkcija $f(x)=\dfrac{E(x)}{1+x^2}$ na svakom konačnom intervalu ispunjava Dirichletove uslove.

322. Pokazati da funkcija $f(x)=\arcsin(\sin x)$ na svakom konačnom intervalu ispunjava Dirichletove uslove.

323. Da li funkcija $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ ispunjava Dirichletove uslove na intervalu $(-l,\,l)$?

324. 1° Razviti u Fourierov red funkciju $f(x)=x$ u razmaku $(-\pi,\,\pi)$.

2° Za koje je x funkcija jednaka zbiru reda?

3° Izraziti $\dfrac{\pi}{2}$ u obliku konvergentnog brojnog reda.

4° Naći zbir reda $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

325. 1° Funkciju $f(x)=|x|$ razviti u Fourierov red u razmaku $(-\pi,\,\pi)$.

2° Naći zbir reda $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

326. 1° Periodičnu funkciju $f(x)=x^2$ za $x\in[-\pi,\,\pi]$, sa periodom 2π, razviti u Fourierov red u razmaku $[-\pi,\,\pi]$.

2° Sumirati redove: a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

327. 1° Pokazati da se Fourierovi koeficijenti periodične funkcije $f(x)$ sa periodom $2l$ mogu izračunati po obrascima:

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{\lambda}^{\lambda+2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n=0,\,1,\,2,\ldots),$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{\lambda}^{\lambda+2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n=1,\,2,\,3,\ldots)$$

gde je λ proizvoljan broj.

2° Razložiti periodičnu funkciju $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ za $x\in[0,\,2\pi]$, sa periodom 2π, u Fourierov red.

328. Razložiti funkciju $f(x)=\begin{cases} x, & x\in\left(0,\,\dfrac{\pi}{2}\right]\\ \pi-x, & x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\,\dfrac{3\pi}{2}\right)\\ x-2\pi, & x\in\left[\dfrac{3\pi}{2},\,2\pi\right)\end{cases}$

u Fourierov red.

329. 1° Razložiti u Fourierov red funkciju $f(x)=\begin{cases}\pi x-x^2, & x\in(0,\,\pi)\\ x^2-3\pi x+2\pi^2, & x\in(\pi,\,2\pi).\end{cases}$

2° Pokazati da je $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$.

Razviti u Fourierov red na naznačenim intervalima sledeće funkcije

330. $f(x)=\begin{cases} ax, & -\pi<x<0\\ bx, & 0<x<\pi\end{cases}$ u intervalu $(-\pi,\,\pi)$.

331. $f(x)=\cos 3x$ u intervalu $(-\pi,\,\pi)$.

332. $f(x)=\sin ax$ u intervalu $(-\pi,\,\pi)$, $(a\neq 0,\,\pm 1,\,\pm 2,\ldots)$.

333. $f(x)=e^x$ u intervalu $(-l,\,l)$.

334. $f(x)=\operatorname{ch} ax$ u intervalu $(-\pi,\,\pi)$.

335. $f(x)=\sum_{i=1}^{n}(a_i\cos ix+b_i\sin ix)$ u intervalu $(-\pi, \pi)$.

336. $f(x)=x\cos x$ u intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$.

Razložiti u Fourierov red sledeće periodične funkcije

337. $f(x)=\sin\frac{5}{6}x,\ x\in(-\pi,\pi);\ f(x)=f(x+2\pi)$.

338. $f(x)=x(\pi-x),\ x\in[0,\pi);\ f(x)=f(x+\pi)$.

339. $f(x)-\operatorname{sg}n(\cos x)$. 340. $f(x)=\arcsin(\sin x)$. Pokazati da je

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin 2nx=x \text{ za } x\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

341. $f(x)=(\pi^2-x^2)^2,\ x\in[-\pi,\pi];\ f(x)=f(x+2\pi)$. Izračunati zbir reda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}.$$

342. Funkciju $f(x)=x^2$ za $|x|<l$ razviti u Fourierov red i naći zbirove

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \text{ i } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

343. Funkciju $f(x)=\begin{cases} e^{tx}, & x\in(0,2\pi)\\ 1, & x=0, x=2\pi\end{cases}$, $f(x+2\pi)=f(x)$ razviti u Fourierov red i pokazati da je $\pi\operatorname{ctgh}(\pi t)=\frac{1}{t}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t}{n^2+t^2}$, $(t\neq 0)$.

344. $f(x)=\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|$. 345. $f(x)=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.

Razlaganjem u stepeni red po α naći Fourierov red sledećih periodičnih funkcija po x:

346. $\frac{\alpha\sin x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}$ $(|\alpha|<1)$. 347. $\frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}$ $(|\alpha|<1)$.

348. $\frac{\alpha\cos x-\alpha^2}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}$ $|\alpha|>1$.

349. Funkciju $f(x)=\begin{cases} x, & x\in(0,1)\\ 2-x, & x\in(1,2)\end{cases}$ u intervalu $(0,2)$ razložiti:

1° u red sinusa; 2° u red kosinusa.

Razložiti sledeće funkcije u red po sinusima u intervalu $(0, \pi)$:

350. $f(x)=\sin\frac{x}{2}$. 351. $f(x)=\cos 2x$. 352. $f(x)=x^2$.

Razložiti sledeće funkcije u intervalu $(0,\pi)$ u red po kosinusima:

353. $f(x)=x\sin x$. 354. $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\\ -\cos x, & x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\end{cases}$. 355. $f(x)=e^{\alpha x}$.

356. Funkciju $f(x)=\begin{cases} 1, & x\in\left(\frac{3}{2},2\right)\\ 3-x, & x\in(2,3)\end{cases}$, u intervalu $\left(\frac{3}{2},3\right)$, razložiti u red po kosinusima.

357. Pomoću Fourierovog reda funkcije $f(x)$ u intervalu $(-\pi,\pi)$, integracijom član po član, naći u tom intervalu Fourierov red za funkcije x^2, x^3, x^4 itd.

358. Pokazati da se za funkciju $f(x)$ koja ispunjava Dirichletove uslove na $(-\pi,\pi)$ i ima neprekidan treći izvod, Fourierovi koeficijenti mogu izračunati po formulama

$$a_n=\frac{1}{\pi n^3}\int_{-\pi}^{\pi}f'''(x)\sin nx\,dx,\quad b_n=-\frac{1}{\pi n^3}\int_{-\pi}^{\pi}f'''(x)\cos nx\,dx.$$

359. 1° Razviti u potencijalni red po x funkcije:

$$f(x)=e^{x\operatorname{ctg}\alpha}\cos x,\quad \varphi(x)=e^{x\operatorname{ctg}\alpha}\sin x.$$

2° Sumirati redove: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\alpha}{k!}$, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k!}$.

3° Razviti u Fourierov red funkcije $e^{\cos x}\cos(\sin x)$ i $e^{\cos x}\sin(\sin x)$.

§ 7. Beskonačni proizvodi

1° Konvergencija proizvoda. Beskonačni proizvod

$$(1)\qquad p_1p_2\cdots p_n\cdots=\prod_{n=1}^{\infty}p_n\ (p_n>0,\ n=1,2\ldots)$$

je konvergentan ako postoji konačan i različit od nule

$$\lim_{n\to\infty}P_n,$$

gde je P_n tzv. parcijalni proizvod definisan sa $P_n = \prod_{k=1}^{n} p_k$.

Konvergencija proizvoda (1) ekvivalentna je konvergenciji reda

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \ln p_n \tag{2}$$

2° **Apsolutna konvergencija.** Proizvod (1) je apsolutno ili uslovno (ne apsolutno) konvergentan zavisno od toga da li red (2) konvergira apsolutno ili uslovno.

Dokazati jednakosti:

360. $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$. **361.** $\prod_{n=3}^{\infty}\frac{n^2-4}{n^2-1}=\frac{1}{4}$.

362. $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{3}$. **363.** $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^n-2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$.

364. $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\varphi}{2^n}=\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ $(0<\varphi<\pi)$. **365.** $\prod_{n=1}^{\infty}\operatorname{ch}\frac{x}{2^n}=\frac{\operatorname{sh} x}{x}$

366. $\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^{2^n})=\frac{1}{1-x}$ $(|x|<1)$. **367.** $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^n}=a^{-\ln 2}$ $(a>0)$.

Dokazati konvergentnost i naći vrednost proizvoda:

368. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-(-1)^n\frac{1}{n}\right]$. **369.** $\prod_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}$.

Ispitati konvergenciju sledećih beskonačnih proizvoda:

370. $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. **371.** $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^a}\right)$. **372.** $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1}$

373. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^n}{3^n}\right)$. **374.** $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n^2+2}{n^2+1}}$. **375.** $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\Big/\sqrt[n]{n}$.

376. $\prod_{n=3}^{\infty}\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}\Big/\cos\frac{\pi}{n}$. **377.** $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a\sin\frac{1}{n^a}}$. **378.** $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a^n)$.

Ispitati apsolutnu i uslovnu konvergenciju proizvoda:

379. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$. **380.** $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^a}\right)$.

381. $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}$. **382.** $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{\ln n}\right)$.

383. Dokazati da je $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\prod_{k=1}^{\infty}(1-a_k)$ $(0<a_k<1)$.

384. Dokazati da je proizvod $\prod_{n=1}^{\infty}(1\pm a_n)$ $(a_n>0)$ konvergentan tada i samo tada ako je konvergentan red $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

385. Pokazati da tvrđenje u prethodnom zadatku nije tačno ako a_n nije stalnog znaka. Uveriti se, na primer, da proizvod

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdots$$

konvergira iako red

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots \text{ divergira.}$$

386. Dokazati da iz konvergencije proizvoda $\prod_{n=1}^{\infty}p_n$ i $\prod_{n=1}^{\infty}q_n$ sledi konvergencija proizvoda: 1° $\prod_{n=1}^{\infty}p_n q_n$; 2° $\prod_{n=1}^{\infty}p_n/q_n$.

387. Pokazati da proizvod $\Gamma(x)=\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^x\Big/\left(1+\frac{x}{n}\right)$ konvergira apsolutno za svako x različito od nule i svih negativnih celih brojeva.

388. Dokazati da je $\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$. Posle pokazati da je $\Gamma(a+1)=x\,\Gamma(x)$. Proveriti da li je $\Gamma(n+1)=n!$.

389. Za $x\neq k\pi$ (k ceo broj) može se pokazati da važi

$$\sin x = x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right). \tag{*}$$

Pokazati da je $\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)=\frac{1}{x}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{k^2-x^2}$ pa pomoću prethodne jednakosti zaključiti da je $\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}$.

390. Dokazati jednakost

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n(a+b+n)}{(a+n)(b+n)} = \frac{\Gamma(a+1)\,\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)}.$$

391. Koristeći jednakost (*) u zadatku (389) dokazati važnost sledeće Wallisove formule

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{2k-1}\,\frac{2k}{2k+1}.$$

392. Koristeći Wallisovu formulu pokazati da je

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

393. Polazeći od jednačine $\sin 2x = 2x \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{4x^2}{k^2\pi^2}\right)$ pokazati da je

$$\cos x = \prod_{k=1}^{\infty}\left[1-\frac{4x^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right].$$

394. Koristeći prethodni zadatak pokazati da je u određenoj oblasti

$$\operatorname{tg} x = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(2n-1)^2\pi^2-4x^2}.$$

395. Jednakost (*) u zadatku 389 važi za kompleksne vrednosti x. Koristeći još veze $\sin x$ i $\operatorname{sh} x$, pokazati da je

$$\operatorname{sh} x = x \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Dokazati da je:

396. $\operatorname{sh} x = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{4x^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right).$ 397. $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - 2x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\pi^2-x^2}.$

398. $1/\sin x = \frac{1}{x} + 2x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x^2-k^2\pi^2}.$

Glava II

DIFERENCIJALNI RAČUN FUNKCIJA VIŠE REALNIH PROMENLJIVIH

§ 1. Granična vrednost i neprekidnost funkcije više promenljivih

1° **Realni n-dimenzioni prostor R^n.** Neka je R^n skup nizova od n članova ($R^n = \{(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)\}$, $\xi_i \in R$), u kome je zbir dva elementa $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ i $y=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ (koji se zovu vektori ili tačke) definisan sa

$$x+y=(\xi_1+\eta_1,\ \xi_2+\eta_2,\ \cdots,\ \xi_n+\eta_n)$$

a množenje skalara λ i vektora x sa

$$\lambda\cdot(\lambda\xi_1,\ \lambda\xi_2,\ \cdots,\ \lambda\xi_n), \qquad (\lambda \text{ je realan broj}).$$

Ako je rastojanje između tačaka x i y dato sa

$$d(x, y) = \sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+(\xi_2-\eta_2)^2+\cdots+(\xi_n-\eta_n)^2}$$

onda je R^n n-dimenzioni realni metrički prostor.

2° **Konvergencija u R^n.** Niz tačaka $x_m = \left(\xi_1^m, \xi_2^m, \cdots, \xi_n^m\right)$ konvergira tački $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ ako za proizvoljno $\varepsilon>0$ postoji broj N takav da je

$$d(x_m, x)<\varepsilon \quad \text{čim je} \quad m>N.$$

3° **Nivo funkcije $u=c$.** Neka je $u=f(x)=f(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ ($f: D\to R$, $D\subset R^n$) jednoznačna funkcija n nezavisno promenljivih ξ_i ($i=1, 2, \cdots, n$). Skup tačaka $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ za koje $f(x)=c$ (c = const), zove se nivo funkcije $u=c$. Ako je $n=2$ nivo funkcije $u=c$ su nivo linije, a ako je $n=3$ nivo funkcije $u=c$ su nivo površi.

4° **Granična vrednost.** Kazaćemo da je

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$$

ako za proizvoljno $\varepsilon>0$ postoji broj $\delta(\varepsilon, x_0)>0$ takav da je

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

kad god je $0<d(x, x_0)<\delta$.

5° N e p r e k i d n o s t. Funkcija $f(x)$ je neprekidna u tački x_0 ako je

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Funkcija $f(x)$ je neprekidna u oblasti D ako je neprekidna u svakoj tački te oblasti.

6° U n i f o r m n a n e p r e k i d n o s t. Funkcija $f(x)$ je uniformno neprekidna u oblasti D ako za svako $\varepsilon>0$ postoji $\delta>0$ koje zavisi samo od ε, tako da za bilo koje dve tačke $x', x'' \in D$ važi nejednakost

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

čim je $d(x', x'')<\delta$.

Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna u ograničenoj i zatvorenoj oblasti onda je ona u toj oblasti uniformno neprekidna.

399. Označimo sa $\|x\|$ rastojanje tačke x od tačke $(0, 0, \cdots, 0)$. Pokazati da je

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i = \frac{1}{4}[\|x+y\|^2-\|x-y\|^2]$$

gde je

$$x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \quad \text{i} \quad y=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n).$$

400. Izraz $\sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$, iz prethodnog zadatka, zove se skalarni proizvod vektora x i y i označava se sa (x, y).

Pokazati da za skalarni proizvod (x, y) važe jednakosti:

1° $(x, y)=(y, x)$; 2° $(x_1+x_2, y)=(x_1, y)+(x_2, y)$; 3° $(\lambda x, y)=\lambda(x, y)$

401. Dokazati da niz tačaka $x_m=(\xi_1^m, \xi_2^m, \cdots, \xi_n^m)$ konvergira tački $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ tada i samo tada ako ξ_i^k konvergira ka ξ_i za svako $i=1, 2, \cdots, n$.

402. Dokazati da je $f(2a, -a)=\frac{5}{4}$ ukoliko je $f(x, y)=\frac{2x-y}{y-2y}$ i $a\neq 0$.

403. Ako je $f(x, y)=3x^2y-\sqrt{x^6-y^6}$, dokazati da je $f(tx, ty)=t^3f(x, y)$.

404. Pokazati da funkcija $f(x, y)=xy$ zadovoljava funkcionalnu jednačinu

$$f(ax+bu, cy+dv)=acf(x, y)+bcf(u, y)+adf(x, v)+bdf(u, v).$$

405. Funkcija $f(x, y)=\ln x \ln y$ zadovoljava funkcionalnu jednačinu

$$f(xy, uv)=f((x, u)+f(x, v)+f(y, u)+f(y, v).$$ Dokazati.

406. Pokazati da funkcija $f(a, b, c, d)=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$ zadovoljava funkcionalnu jednačinu $f^2(a, b, c, d)=16a^4f(x, b, c, d)$ gde je

$$x=\frac{a^2-b^2-c^2-d^2}{2a}.$$

Naći oblast definisanosti sledećih funkcija:

407. $u=\sqrt{x+y}$. **408.** $u=\sqrt{4-x^2-y^2}$. **409.** $u=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$.

410. $u=\ln[x\ln(y-x)]$. **411.** $u=xy+\sqrt{\ln\frac{R^2}{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2-R^2}$.

412. $u=\sqrt{\frac{3}{2}-\sin\ln xy}$. **413.** $u=\sqrt{\sin\pi(x^2+y^2)}$.

414. $u=\arcsin\frac{x}{y}$. **415.** $u=\arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

416. $u=\operatorname{arctg}\ln(x+y+z-1)$. **417.** $u=\ln\frac{x}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$.

418. $u=\ln(a^2-x^2-y^2-z^2)$.

Ispitati nivo linije sledećih površi:

419. $z=ax+by$. **420.** $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ **421.** $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$.

422. $z=\ln(|x|+|y|)$. **423.** $z=\sqrt{xy}$. **424.** $z=\sin(x^2+y^2)$.

425. $z=\operatorname{sgn}(xy)$. **426.** $z=a^{\frac{2x}{x^2+y^2}}(a>0)$. **427.** $z=\min(|x|, |y|)$.

428. Šta su nivo linije obrtnih površi čija je osa z-osa?

429. Šta su nivo linije konoidne površi čija je direktorna ravan $z=0$, a direktorna prava z-osa?

Naći nivo površi sledećih funkcija:

430. $u=ax+by+cz+d$. **431.** $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$.

432. $u=ax^2+by^2+cz^2$. **433.** $u=|x|+|y|+|z|$.

Pomoću nivo linija utvrditi vrstu sledećih površi:

434. $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$. **435.** $x^2+z^2=f(y)$. **436.** $z=f(ax+by)$.

437. $z=(x-1)f\left(\frac{y}{x-1}\right)+2-x$. **438.** $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$.

439. Neka je $z=f(x^2-y+x)+x^2-xy$, Odrediti funkciju f ako je $z=-x^2$ za $y=x$.

440. Data je familija površi $2e^{-z}-\cos(x+y=\theta(x-y)$ gde je neprekidna funkcija od $x-y$.

1° Odrediti onu od datih površi koja prolazi kroz krivu $y=-x$, $e^z\cos^2 x=1$.

2° Šta su z-nivo linije tako dobijene površi?

441. Naći sledeće, ponovljene limese

$$1°\ \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right); \qquad 2°\ \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right).$$

442. Pokazati da ne postoji dvojni limes $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

443. Da li iz egzistencije dvojnog limesa sledi egzistencija ponovljenih limesa?

444. Ako oba ponovljena limesa postoje i ako su jednaka, dvojni limes ne mora da postoji. Dokazati primerom.

Naći sledeće limese ili ustanoviti da ne postoje:

445. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. **446.** $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.

447. 1° $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\sin\dfrac{x}{x+y}$; 2° $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to\infty}}\sin\dfrac{x}{x+y}$.

448. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x}$. **449.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{a-\sqrt{a^2-xy}}{xy}$.

450. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} e^{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$. **451.** $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x-y}}$.

452. 1° $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x}{x^2+y^2}\ln(x^2+y^2)$. 2° $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x}{x^2+y^2}\ln(x^2+y^2)$.

453. U kojoj oblasti egzistira konačan $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} e^{x^2-y^2}\sin 2xy$?

Ispitati neprekidnost sledećih funkcija:

454. $u(x, y)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}x^i y^j$. **455.** $u=\dfrac{x+y}{x-y}$.

456. $u=\dfrac{1}{\ln(x^2+y^2)}$. **457.** $u=\dfrac{x+y}{x^3+y^3}$. **458.** $u=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

459. $u=\dfrac{1}{xyz}$. **460.** $u=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{x}, & x\neq 0,\ y\neq a,\ z\neq a\\ a^2, & x=0,\ y=a,\ z=a\end{cases}$.

461. $u=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

462. Naći sve prekidne tačke funkcije $u=\dfrac{1}{\sin^2\pi x+\sin^2\pi y}$.

463. Dokazati da je funkcija $f(x, y)=ax+by+c$ (a, b i c date konstante) uniformno neprekidna u svakoj ograničenoj zatvorenoj oblasti.

464. Ispitati uniformnu neprekidnost funkcije $u=\ln(x^2+y^2)$ u oblasti

$$0<x^2+y^2<R^2.$$

465. Ispitati običnu i uniformnu neprekidnost funkcije $u=\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$ u oblasti $0<x^2+y^2<R^2$.

466. Ako je u oblasti D funkcija $f(x, y)$ neprekidna po promenljivoj x i zadovoljava Lipchitzov uslov po promenljivoj y

$$(|f(x, y')-f(x, y'')|<L|y'-y''|,\quad (x, y')\in D,\quad (x, y'')\in D,\quad L=\text{const.}),$$

dokazati da je $f(x, y)$ neprekidna.

467. Proveriti sledeću Jungovu teoremu: Ako je $f(x, y)$ neprekidna posebno po promenljivoj x i posebno po promenljivoj y i ako je monotona po jednoj promenljivoj, onda je ona neprekidna.

§ 2. Parcijalni izvodi i diferencijali. Izvod složene funkcije

1° **Parcijalni priraštaj i totalni priraštaj.** Parcijalni priraštaj po promenljivoj ξ_i je izraz

$$\Delta\xi_i f=f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i+\Delta\xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n)-f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n).$$

Totalni priraštaj je izraz

$$\Delta f=f(\xi_1+\Delta\xi_1, \xi_2+\Delta\xi_2, \dots, \xi_n+\Delta\xi_n)-f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n).$$

2° **Parcijalni izvod.** Prvi parcijalni izvod po promenljivoj ξ_i je limes

$$\frac{\partial f}{\partial\xi_i}=\lim_{\Delta\xi_i\to 0}\frac{f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i+\Delta\xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n)-f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)}{\Delta\xi_i}.$$

k-ti parcijalni izvod po promenljivoj ξ_i je prvi parcijalni izvod po ξ_i od $k-1$-og parcijalnog izvoda po ξ_i.

Uzastopno diferenciranje po pojedinim promenljivim ne zavisi od reda diferenciranja ako su ti parcijalni izvodi neprekidni.

3° Diferencijal. Ako se totalni priraštaj može napisati u obliku

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} a_i \Delta \xi_i + \sigma(\varrho)$$

gde a_i ne zavise od $\Delta \xi_i$ i $\varrho = \sqrt{(\Delta \xi_1)^2 + (\Delta \xi_2)^2 + \cdots + (\Delta \xi_n)^2}$ tada se kaže da je $f(x)$ diferencijabilna u tački $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ a glavni linearni deo priraštaja, $\sum_{i=1}^{n} a_i \Delta \xi_i$, jednak

(1) $$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \xi_i} d\xi_i$$

gde je $d\xi_i = \Delta \xi_i$; $(i=1, 2, \cdots, n)$, zove se diferencijal funkcije f.

Ako su priraštaji $\Delta \xi_i$ dovoljno mali (po apsolutnoj vrednosti) tada je

(2) $$\Delta f \approx df.$$

Formula (1) ostaje u važnosti ako su promenljive ξ_i diferencijabilne funkcije od novih promenljivih.

Diferencijal k-og reda može se simbolički napisati

$$d^k f = \left(\sum_{i=1}^{n} d\xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right)^{(k)} f.$$

4° Izvod složene funkcije. Ako je $u = f(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ gde su ξ_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ diferencijabilne funkcije od nezavisno promenljivih η_k $(k=1, 2, \cdots, m)$ tada je

$$\frac{\partial u}{\partial \eta_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial \eta_k} \quad (k=1, 2, \cdots, m).$$

468. Za funkciju $f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$ naći prve parcijalne izvode u tački $(1, 1)$ *)

469. Ako je u oblasti D $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0$ i $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0$ tada je u toj oblasti $f(x, y) = \text{const}$. Dokazati.

470. Da li je za diferencijabilnost u tački dovoljna egzistencija parcijalnih izvoda u toj tački?

471. Postoje li parcijalni izvodi funkcije $f = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ u tački $(0, 0, 0)$? Da li je funkcija diferencijabilna u toj tački?

*) U prvoj knjizi ove zbirke nalazi se veliki broj zadataka koji dolaze u ovaj paragraf.

Naći prve parcijalne izvode sledećih funkcija:

472. $u = x^2+y^2-2x^2y^2$.

473. $u = \dfrac{x^2+y^2}{xy}$.

474. $u = \ln(x+y^2)$.

475. $u = x^y$.

476. $u = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$.

477. $u = \ln(x^2+y^2+z^2)$.

478. $u = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z$.

479. $u = \prod_{i=1}^{n} \xi_i$.

480. $u = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right)^{\prod_{i=1}^{n} \xi_i}$.

Za sledeće funkcije naći naznačene parcijalne izvode:

481. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, ako je 1° $u = x^2+y^2-2x^2y^2$;

2° $u = e^{xy}$; 3° $u = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{y}{x}$; 4° $u = \sin e^{x+y}$.

482. $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y}$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}$, ako je

$u = ax+by+cx^2+dxy+ey^2+fx^3+gx^2y+hy^3+x^4-4x^2y^2+y^4$.

483. $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, ako je $u = e^{xyz}$.

484. $\dfrac{\partial^{p+q+r} u}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}$, ako je $u = x^p y^q z^r$.

485. Koliko različitih parcijalnih izvoda k-og reda ima funkcija od n promenljivih?

486. Pokazati da je $\left(\dfrac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = \sin \dfrac{u\pi}{2}$, ako je $u = e^x \sin y$.

487. Pokazati da je $\dfrac{x}{y} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{\ln x} \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2u$, ako je $u = x^y$.

488. Pokazati da funkcija $u = \ln \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ zadovoljava Laplasovu diferencijalnu jednačinu $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

489. Funkcija $u = 1/\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$ zadovoljava Laplasovu jednačinu $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ osim u tački $(0, 0, 0)$. Dokazati.

490. Ako je $u=\varphi(x^2+y^2)$ i φ diferencijabilna funkcija, dokazati da je

$$y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Pod pretpostavkom da su φ i ψ diferencijabilne funkcije dovoljan broj puta, dokazati sledeće jednakosti:

491. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial u}{\partial y}=x$ ako je $u=x+\varphi(xy)$.

492. $2x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=2u$ ako je $u=x\varphi\left(\dfrac{x}{y^2}\right)$.

493. $y\dfrac{\partial u}{\partial x}-x\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$ ako je $u=\varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

494. $(x^2-y^2)\dfrac{\partial u}{\partial x}+xy\dfrac{\partial u}{\partial y}=xyu,$ ako je $u=e^y\varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$.

495. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+2y\dfrac{\partial u}{\partial y}=nu,$ ako je $u=x^n\varphi\left(\dfrac{y}{x^2}\right)$.

496. $u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,$ ako je $u=\varphi(x)\psi(y)$.

497. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$ ako je $u=x\varphi(x+y)+y\psi(x+y)$.

498. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$ ako je $u=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)+x\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

499. Ako diferencijabilna funkcija $u=f(x, y, z)$ zadovoljava jednačinu

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=nu,$$

dokazati da je ona homogena stepena homogenosti n.

Naći prvi totalni diferencijal sledećih funkcija:

500. $u=x^2y$. **501.** $u=\dfrac{xy}{x-y}$. **502.** $u=\sin(xy)$.

503. $u=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$. **504.** $u=\dfrac{z}{x^2+y^2}$. **505.** $u=\prod_{i=1}^{n}\xi_i$.

Izračunati sa tačnošću 0,01 sledeće izraze:

506. $1{,}08^{3{,}96}$. **507.** $\dfrac{\sin 1{,}49\cdot\operatorname{arc\,tg}0{,}07}{2^{2{,}95}}$. **508.** $2{,}68^{\sin 0{,}05}$.

509. Ako su x i y dovoljno mali, dokazati da je $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x+y}{1+xy}\approx x+y$.

510. Neka je $f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$. Pokazati da je funkcija $f(x, y)$ neprekidna u okolini tačke (0, 0), da su $f'_x(x, y)$ i $f'_y(x, y)$ ograničene funkcije u okolini te tačke ali da funkcija $f(x, y)$ nije diferencijabilna u toj tački.

511. Pokazati da je funkcija $f(x, y, z)=\sqrt[3]{xyz}$ neprekidna u tački (0, 0, 0) i da postoje parcijalni izvodi $f'_x(0, 0, 0)$, $f'_y(0, 0, 0)$, $f'_z(0, 0, 0)$. Da li je funkcija $f(x, y, z)$ diferencijabilna u tački (0, 0, 0)?

Naći totalni diferencijal naznačenog reda za date funkcije:

512. d^2u; $u=x^3+y^3-3x^2y+3xy^2$. **513.** d^3u; $u=x^3+y^3-3x^2y+3xy^2$.

514. d^3u; $u=f(x, y)$. (Izraziti d^3u preko parcijalnih izvoda funkcije $f(x, y)$ i dx i dy).

515. d^4u; $u=\sin x\cos y$. **516.** d^nu; $u=\varphi(x)\psi(y)$.

517. Dokazati da je za $u=f(x+y+z)$ $d^nu=f^{(n)}(x+y+z)(dx+dy+dz)^n$.

518. Ako je $P(x, y, z)$ homogeni polinom stepena homogenosti n, dokazati da je $d^nP(x, y, z)=n!\,P(dx, dy, dz)$.

519. Naći $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ i $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ ako je $u=v^2\ln w$ a $v=\dfrac{x}{y}$ i $w=3x-2y$.

Naći diferencijal prvog i drugog reda sledećih složenih funkcija:

520. $u=f(z)$ gde je $z=ax+by$; (a i b konstante).

521. $u=x\sin y\cos z$ gde je $y=\ln(x^2+1)$, $z=-\sqrt{1-x^2}$.

522. $u=\sin(u, v, w)$ gde je $u=x^2+y^2$, $v=x^2-y^2$, $w=2xy$.

523. Ako je $y=f(x, t)$ i $F(x, y, t)=0$, tada je

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial t}-\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial t}}.$$ Dokazati.

§ 3. Funkcionalne determinante. Diferenciranje implicitnih funkcija. Smena promenljivih.

1° **Funkcionalne determinante.** Ako funkcije

(1) $$u_i=f_i(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)\ (i=1, 2, \cdots, n)$$

imaju parcijalne izvode u nekoj oblasti, tada se determinanta

$$J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial \xi_2} & \cdots & \dfrac{\partial u_1}{\partial \xi_n} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial \xi_2} & \cdots & \dfrac{\partial u_2}{\partial \xi_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial u_n}{\partial \xi_2} & \cdots & \dfrac{\partial u_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix}$$

naziva *Jakobieva funkcionalna determinanta ili jakobijan.* Označavaćemo je i sa

$$\frac{D(u_1, u_2, \cdots, u_n)}{D(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)}.$$

Ako pored sistema funkcija (1) postoji i sistem

(2) $$\xi_i=\varphi_i(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

sa sličnim osobinama, tada važi

$$\frac{D(u_1, u_2, \cdots, u_n)}{D(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)}\cdot\frac{D(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)}{D(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)}=\frac{D(u_1, u_2, \cdots, u_n)}{D(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)}.$$

2° Egzistencija implicitnih funkcija. Neka funkcije

$$F_i(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, u_1, u_2, \cdots, u_m) \quad (i=1, 2, \cdots, m)$$

zadovoljavaju uslove: 1) anuliraju se u tački $x_0=\left(\xi_1^0, \xi_2^0, \cdots, \xi_n^0, u_1^0, u_2^0, \cdots, u_n^0\right)$; 2) diferencijabilne su u okolini tačke x_0; 3) funkcionalna determinanta

$$\frac{D(F_1, F_2, \cdots, F_m)}{D(u_1, u_2, \cdots, u_m)}$$

je različita od nule u toj tački. Tada sistem jednačina

(3) $$F_i(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, u_1, u_2, \cdots, u_m)=0$$

jednoznačno definiše, u okolini tačke $\bar{x}_0=\left(\xi_1^0, \xi_2^0, \cdots, \xi_n^0\right)$, sistem diferencijabilnih funkcija

$$u_i=f_i(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \quad (i=1\ 2, \cdots, m)$$

koje zadovoljavaju dati sistem i početne uslove

$$f_i\left(\xi_1^0, \xi_2^0, \cdots, \xi_n^0\right)=u_i^0 \quad (i=1, 2, \cdots, m).$$

3° Diferenciranje implicitnih funkcija. Ako su funkcije u_i, iz (3), diferencijabilne tada se diferencijali du_i mogu naći iz jednačina

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial \xi_j}d\xi_j+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial F_i}{\partial u_k}du_k=0 \quad (i=1, 2, \cdots, m)$$

a parcijalni izvodi $\dfrac{\partial u_i}{\partial \xi_j}$ iz jednačina

$$\frac{\partial F_i}{\partial \xi_j}+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial F_i}{\partial u_k}\frac{\partial u_k}{\partial \xi_j}=0 \quad (i=1, 2, \cdots, m;\ j=1, 2, \cdots, n).$$

Za $n=2$ i $m=1$ dobijamo odgovarajući iskaz za egzistenciju implicitne funkcije $F(x, y, z)=0$ i formule za njeno diferenciranje.

4° Smena promenljivih. Ako se u diferencijalnom izrazu

(4) $$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \cdots\right)$$

stavi: $x=f(u, v)$, $y=\varphi(u, v)$ gde su u i v nove nezavisno promenljive, tada se parcijalni izvodi $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, … nalaze iz jednačina

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

Ako se u (4) stavi: $x=f(u, v, w)$, $y=\varphi(u, v, w)$, $z=g(u, v, w)$ gde su u i v nove nezavisno promenljive a w nova funkcija tada se $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, … mogu dobiti iz jednačina

$$\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}+\frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}+\frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}+\frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right),$$

itd.

Naći jakobijane datih sistema funkcija:

524. $x=u+v$, $y=\dfrac{uv}{a}$.

525. $x=u^2-v^2$, $y=2uv$.

526. $x=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{u}{v}$, $y=u^2+v^2$.

527. $x=\varrho\cos\theta,\quad y=\varrho\sin\theta.$

528. $x=u,\quad y=\dfrac{u+v}{u},\quad z=\dfrac{u+v+w}{u+v}.$

529. $x=r\cos\varphi$
$y=r\sin\varphi$
$z=h.$

530. $x=r\cos\theta\cos\varphi$
$y=r\sin\theta\cos\varphi$
$z=r\sin\varphi.$

531. $x=ar\cos^{\alpha}\varphi\cos^{\beta}\psi$
$y=br\sin^{\alpha}\varphi\cos^{\beta}\psi$
$z=cr\sin^{\beta}\psi,$ gde su a, b, c, α, β konstante.

532. Dokazati da je $\dfrac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \cdot \dfrac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} = 1.$

533. Neka je

$$x = \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2+\varsigma^2}, \quad y = \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2+\varsigma^2}, \quad z = \frac{\varsigma}{\xi^2+\eta^2+\varsigma^2}$$

$$\xi = \frac{u}{u^2+v^2+t^2}, \quad \eta = \frac{v}{u^2+v^2+t^2}, \quad \varsigma = \frac{t}{u^2+v^2+t^2}.$$

Proveriti da li je $\dfrac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \varsigma)} \cdot \dfrac{D(\xi, \eta, \varsigma)}{D(u, v, t)} = 1.$

Preslikati date oblasti datim transformacijama:

534. $\{(x, y):\ a<x<b,\ \ c<y<d\}$ transformacijom $\begin{cases} x = u+\alpha \\ y = v+\beta. \end{cases}$

535. $\{(x, y):\ 1<x^2+y^2<4\}$ transformacijom $\begin{cases} x = \varrho\cos\theta \\ y = \varrho\sin\theta. \end{cases}$

536. $\{(x, y):\ (x^2+y^2)^2<2a^2xy\}$ transformaciiom $\begin{cases} x = \varrho\cos\theta \\ y = \varrho\sin\theta. \end{cases}$

537. $\{x, y):\ (x^2+y^2)^3<a^2(x^4+y^4)\}$ transformacijom $\begin{cases} x = \varrho\cos\theta \\ y = \varrho\sin\theta. \end{cases}$

538. $\left\{(x, y):\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}<1\right\}$ transformacijom $\begin{cases} x = a\varrho\cos\theta \\ y = b\varrho\sin\theta. \end{cases}$

539. $\{(x, y, z):\ x^2+y^2+z^2<R^2\}$ transformacijom $\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\psi, \\ y = r\sin\varphi\cos\psi, \\ z = r\sin\psi. \end{cases}$

540. $\left\{(x, y, z):\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}<R^2\right\}$ transformacijom $\begin{cases} x = ar\cos\varphi\cos\psi, \\ y = br\sin\varphi\cos\psi, \\ z = cr\sin\psi. \end{cases}$

541. Dokazati da sistem

$$xe^{u+v}+2uv = 1, \qquad ye^{u-v}-\frac{u}{1+v} = 2x$$

definiše diferencijabilne funkcije $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ takve da je

$$u(1, 2) = 0 \quad \text{i} \quad v(1, 2) = 0.$$

542. Da li sistem

$$u+v = x+y, \qquad \frac{\sin u}{\sin v} = \frac{x}{y},$$

u okolini tačke (1, 1), uz početne uslove $u(1, 1) = 1$, $v(1, 1) = 1$, definiše jednoznačne neprekidne funkcije $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$?

543. Naći izvod $\dfrac{dy}{dx}$ za sledeće funkcije:

1° $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2} = 1$; 2° $x^y = y^x$; 3° $xy+\ln xy = 0$.

544. Ako je $z = x+y\varphi(z)$ i $1-y\varphi'(z)\neq 0$, dokazati da je $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \varphi(z)\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

545. Pokazati da z kao funkcija od x i y definisana jednačinom

$$y = x\varphi(z)+\psi(z)$$

zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

Naći diferencijal du za sledeće implicitne funkcije:

546. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{u^2}{c^2} = 1.$ **547.** $\dfrac{x}{u} = \ln\dfrac{u}{y}+1.$

548. $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 u = 1.$ **549.** $u^3-3(x+y)u^2+z^3 = 0.$

Naći diferencijale du i dv ako je:

550. $u+v = x+y,\quad \dfrac{\sin u}{\sin v} = \dfrac{x}{y}.$

551. $e^{\frac{u}{x}}\cos\dfrac{v}{y} = \dfrac{x}{\sqrt{2}},\quad e^{\frac{u}{x}}\sin\dfrac{v}{y} = \dfrac{y}{\sqrt{2}},\quad x = 1,\quad y = 1,\quad u = 0.$

552. Naći $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ i $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ ako je $ax+by-cu = k\cos(ax+by-cu)$.

553. Proveriti da li funkcija $4\sin(3x+2y+5z) = 3x+2y+5z$ zadovoljava jednačinu $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}+1 = 0.$

554. Naći $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ ako je $x = e^u+u\sin v,\quad y = e^u-u\cos v.$

555. Ako su funkcije y, z i u, od nezavisno promenljive x, definisane sistemom

$$x+y+z+u=a,\quad x^2+y^2+z^2+u^2=b^2,\quad x^3+y^3+z^3+u^3=c^3 \quad \text{naći } \frac{dy}{dx}.$$

556. Pokazati da funkcija $z=z(x, y)$ definisana jednačinom

$$x+y+z=f(x^2+y^2+z^2),$$

gde je f diferencijabilna funkcija, zadovoljava jednačinu

$$(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(z-x)\frac{\partial z}{\partial y}=x-y.$$

557. Pokazati da funkcija $z=z(x, y)$ definisana jednačinom

$$(x^2+y^2+z^2)^3=y^2z$$

zadovoljava jednačinu

$$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2\,xy\frac{\partial z}{\partial y}=2\,xz.$$

558. Ako funkcija $u=u(x, y, z)$ zadovoljava jednačinu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

pokazati da je zadovoljavaju i funkcije:

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z},\ y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}\ \text{ i }\ y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+z\frac{\partial u}{\partial z}.$$

559. Naći $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ i $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ za funkciju $u=u(x, y)$ definisanu sistemom jednačina:

$$u=f(x, y, z, t),\quad g(y, z, t)=0,\quad h(z, t)=0.$$

560. Transformisati jednačinu $x^2y''+2\,xy'+\dfrac{1}{x^3}=0$ smenom $x=\dfrac{1}{t}$.

561. Smenom $x=\operatorname{sh} t$ transformisati jednačinu

$$(1+x^2)y''+\left[x-(\alpha+\beta)\sqrt{1+x^2}\right]y'+\alpha\beta=0.$$

562. Uzimajući y za novu nezavisno promenljivu, transformisati jednačinu

$$y'^2y^{\mathrm{IV}}-10\,y'y''y'''+15\,y''^3=0.$$

563. Uvodeći smenu $x=u+t$, $y=u-t$ gde je $u=u(t)$ transformisati jednačinu

$$y''+(x+y)(1+y')^3=0.$$

564. Dokazati da izraz $S=\dfrac{x'''}{x'}-\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x''}{x'}\right)^2$ ostaje invarijantan u odnosu na smenu $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0)$.

565. Izraziti krivinu krive, izraz $K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$ u polarnim koordinatama.

566. Tangens ugla između tangenta krive $y=y(x)$ u nekoj tački i potega u toj tački dat je obrascem $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{xy'-y}{x+yy'}$. Izraziti ovaj izraz u polarnim koordinatama.

Uzimajući za u i v nove nezavisno promenljive, transformisati jednačine:

567. $(x+y)\dfrac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, ako je $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, $v=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$.

568. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, ako je $u=\dfrac{y}{x}$, $v=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

569. Jednačina $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}=2\dfrac{\partial v}{\partial t}$, smenom $v=ue^{-t}$, prelazi u jednačinu $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=u$. Dokazati!

570. Jednačina $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=u$, smenom $\xi=x-t$, $\eta=x+t$, prelazi u jednačinu $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\dfrac{1}{4}u=0$. Dokazati!

571. Pokazati da jednačina

$$x^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+yz\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}+zx\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}+xy\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=0,$$

smenom: $x=uv$, $y=vt$, $z=tu$, prelazi u jednačinu

$$t^2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+u^2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+v^2\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0.$$

572. Pokazati da jednačina

$x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=z^2$, smenom: $x=t$, $y=\dfrac{t}{1+tu}$, $z=\dfrac{t}{1+tv}$, prelazi u jednačinu $\dfrac{\partial v}{\partial t}=0$, $(v=v(t, u))$.

Uzimajući za u i v nove nezavisno promenljive a w za novu funkciju transformisati jednačine:

573. $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=(y-x)\,z$, ako je $u=x^2+y^2$, $v=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$, $w=\ln z-(x+y)$.

574. $\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=x-y$, ako je $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, $v=\operatorname{arc\,tg} z$, $w=x+y+z$.

575. $y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2}{x}$, ako je $u=\dfrac{x}{y}$, $v=x$, $w=xz-y$.

576. $\dfrac{\partial z}{\partial y}\left(1+\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\left(1+\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}+2\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial x}\left(1+\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

ako je $u=x+z$, $v=y+z$, $w=x+y+z$.

577. Smenom $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ izraz $w=x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ postaje $w=r^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}$. Dokazati.

578. Prelaskom na polarne koordinate: $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, pokazati da izrazi

$$w_1=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \quad \text{i} \quad w_2=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

prelaze u izraze:

$$w_1=\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2;\quad w_2=\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}.$$

579. Transformisati izraze:

$$w_1=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2,\quad w_2=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

prelaskom na polarne koordinate

$$x=r\sin\varphi\cos\theta,\quad y=r\sin\varphi\sin\theta,\quad z=r\cos\varphi.$$

580. Pokazati da se za $F(x, y, z, t)=f(xyzt)$ parcijalna jednačina

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x\,\partial y\,\partial z\,\partial t}=F,$$ smenom $xyzt=u$, svodi na običnu diferencijalnu jednačinu

$$u^3 f^{(4)}+6u^2 f^{(3)}+7u f^{(2)}+f'=f.$$

§ 4. Taylorova formula. Ekstremumi funkcija. Singularne tačke krivih u ravni

1° **Taylorova formula i Taylorov red za funkciju dve promenljive.** Ako funkcija $f(x, y)$ ima u nekoj okolini tačke (a, b) sve parcijalne izvode, do $n+1$-og reda zaključno, tada u toj okolini važi:

$$(1)\qquad f(x, y)=f(a, b)+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(i)} f(a, b)+R_n(x, y),$$

4 Zbirka zadataka iz više matematike I

gde je

$$R_n(x, y)=\frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(n+1)} f[a+\theta_n(x-a),\ b+\theta_n(y-b)]$$

$(0<\theta_n<1)$.

Ako je funkcija $f(x, y)$ beskonačno diferencijabilna i $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x, y)=0$, tada je

$$(2)\qquad f(x, y)=f(a, b)+\sum_{i+j>1}\frac{1}{i!\,j!}\,\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i\,\partial y^j}f(a, b)(x-a)^i(y-b)^j.$$

Specijalni slučajevi formula (1) i (2) su Mac Laurinova formula i Mac Laurinov red za $a=0$, $b=0$.

2° **Ekstremumi funkcija više promenljivih.** 1) *Potreban uslov* da diferencijabilna funkcija $f(x)=f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ima ekstremum u unutrašnjoj tački x_0 oblasti definisanosti D, jeste da je u toj tački $df=0$, tj. da je $\dfrac{\partial f}{\partial \xi_i}=0$ $(i=1, 2, \dots, n)$.

Tačka x_0 zove se stacionarna tačka.

2) *Dovoljan uslov* da funkcija $f(x)$ u tački x_0 ima ekstremum jeste:

a) $df(x_0)=0$ i $d^2f<0$ za $\sum\limits_{i=1}^{n}|d\xi_i|\neq 0$ — maksimum;

b) $df(x_0)=0$ i $d^2f>0$ za $\sum\limits_{i=1}^{n}|d\xi_i|\neq 0$ — minimum.

Specijalno, da bi funkcija $f(x, y)$ imala ekstremum u stacionarnoj tački (x_0, y_0) mora da bude u toj tački $D=AC-B^2>0$,

gde je $A=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $B=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ i $C=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Tada je:

a) maksimum, ako je $D>0$, $A<0$ $(C<0)$;
b) minimum, ako je $D>0$, $A>0$ $(C>0)$.

Ako je $D=0$ slučaj je neodređen.

Ako je $D<0$ nema ekstremuma.

3° **Uslovni ekstremum.** Nalaženje ekstremuma funkcije $f(x)$ pri uslovima $\varphi_i(x)=0$ $(i=1, 2, \dots, m,\ m<n)$ svodi se na nalaženje ekstremuma funkcije

$$F(x)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\,\varphi_i(x).$$

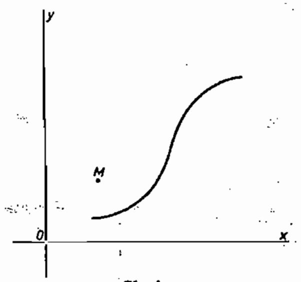
4° **Apsolutni ekstremum.** Diferencijabilna funkcija $f(x)$ dostiže najveću ili najmanju vrednost, u zatvorenoj i ograničenoj oblasti, u stacionarnoj tački ili graničnoj tački te oblasti.

5° **Singularne tačke krivih u ravni.** Tačka $M(x_0, y_0)$ ravne krive $f(x, y)=0$ je singularna ako je istovremeno:

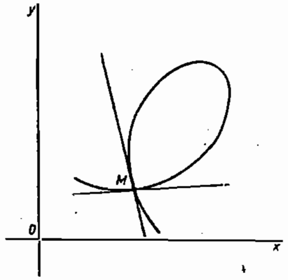
$$f(x_0, y_0)=0,\quad f'_x(x_0, y_0)=0,\quad f'_y(x_0, y_0)=0.$$

Neka u singularnoj tački $M(x_0, y_0)$, svi izvodi drugog reda A, B i C nisu jednaki nuli i neka je $D=AC-B^2$. Tada je tačka M:

a) za $D>0$ izolovana tačka (sl. 1)

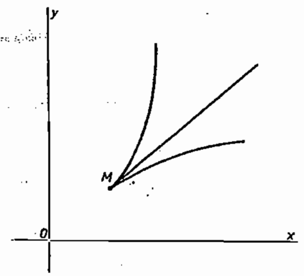


Sl. 1

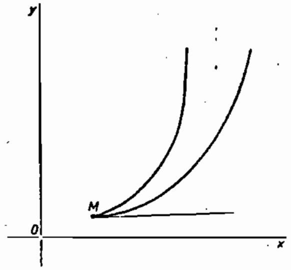


Sl. 2

b) za $D<0$ dvostruka tačka (sl. 2)



Sl. 3



Sl. 4

c) za $D=0$ povratna tačka prve vrste (sl. 3) ili druge vrste (sl. 4) ili izolovana tačka, ili dvostruka tačka sa dodirom (sl. 5)

581. Razložiti funkciju

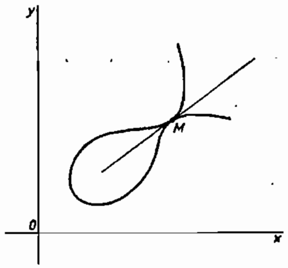
$$f(x, y)=Ax^2+By^2+Cxy+Ex+Fy+G$$

u okolini tačke (a, b) po Taylorovoj formuli.

582. Funkciju $z=f(x, y)$, definisanu jednačinom $z^3-2xz+y=0$, pri čemu je

$$f(1, 1)=1,$$

predstaviti Taylorovim polinomom drugog stepena u okolini tačke $(1, 1)$.



Sl. 5

583. Razložiti funkciju $f(x, y)=\ln(1+x+y)$ po Mac Laurinovoj formuli u polinom do drugog stepena zaključno.

584. Razložiti po Mac Laurinovoj formuli funkciju $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ u polinom do četvrtog stepena zaključno.

585. Razložiti u stepeni red po stepenima od binoma $(x+1)$ i $(y-1)$ funkciju $f(x, y)=e^{x+y}$.

Razložiti u Mac Laurinov red funkcije:

586. $f(x, y)=\operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy}$. **587.** $u=\ln\dfrac{1-x-y+xy}{1-x-y}$.

Dokazati da je:

588. $(1+x)^m(1+y)^n=1+mx+ny+\dfrac{m(m-1)}{2!}x^2+mnxy+\dfrac{n(n-1)}{2!}y^2+R_2(x, y)$.

589. $e^x\sin y=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^m y^{2n+1}}{m!\,(2n+1)!}$ $(|x|<\infty,\ |y|<\infty)$.

590. $\ln(1+x)\ln(1+y)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{m+n}\dfrac{x^m y^n}{mn}$ $(|x|<1,\ |y|<1)$.

Naći stacionarne tačke za funkcije:

591. $u=e^{2x}(x+y^2+2y)$. **592.** $u=3\ln x+2\ln y+5\ln z+\ln(22-x-y-z)$.

Naći ekstremume funkcija:

593. $u=x^3+8y^3-6xy+5$. **594.** $u=\dfrac{ax+by+c}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$ $(a^2+b^2+c^2\neq 0)$.

Ispitati ekstremume sledećih funkcija:

595. $u=(x-y)^2+(y-1)^3$.

596. $u=x\sqrt{y}-x^2-y+6x+3$. **597.** $u=(x^2+y)\sqrt{e^y}$.

598. $u=3\ln\dfrac{x}{6}+2\ln y+\ln(12-x-y)$.

599. $u=x-2y+\ln\sqrt{x^2+y^2}+3\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

600. $u=x+\dfrac{y^2}{4x}+\dfrac{z^2}{y}+\dfrac{2}{z}$ $(x>0,\ y>0,\ z>0)$.

Naći uslovne ekstremume sledećih funkcija:

601. $u=ax+by$, ako je $x^2+y^2=1$.

602. $u=x-2y+2z$, ako je $x^2+y^2+z^2=1$.

Naći najveće i najmanje vrednosti funkcije:

603. $u=2x^3+4x^2+y^2-2xy$ u zatvorenoj oblasti ograničenoj krivama $y=x^2$, $y=4$.

604. $u=x^3+y^3-9xy+2z$, ako je $0<x<4$ i $0<y<4$.

605. U trouglu ABC $A(0,\ 0)$, $B(1,\ 0)$, $C(0,\ 1))$ naći tačku čiji je zbir rastojanja od njegovih temena najveći.

606. Pomoću minimuma funkcije $u=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^k$ pod uslovom $\sum_{i=1}^{n}x_i=\text{const.}$ dokazati nejednakost

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^k>\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^k \quad (k>1,\ x_i>0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

607. Razložiti pozitivan broj a na n sabiraka tako da zbir kvadrata tih sabiraka bude najmanji.

608. U elipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ upisati paralelepiped najveće zapremine.

609. U polusferu poluprečnika R upisati paralelepiped najveće zapremine.

610. Pokazati da je najmanje rastojanje tačke $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ od tačaka ravni $Ax+By+Cz+D=0$ dato obrascem $d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

611. Pokazati da je najkraće rastojanje između pravih

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \quad \text{i} \quad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

dato obrascem

$$d=\frac{1}{\pm\Delta}\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}$$

gde je

$$\Delta=\sqrt{\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}^2}.$$

612. Na elipsoidu $\frac{x^2}{96}+y^2+z^2=1$ naći tačku koja je najmanje (najviše) udaljena od ravni $3x+4y+12z=288$.

613. Klasirati singularne tačke krive $y^2=ax^2+x^3$.

Ispitati karakter singularnih tačaka sledećih krivih:

614. $x^2+y^2-x^4=0$. 615. $(y-x^2)^2-x^5=0$. 616. $(y-a-x)^2-\frac{16}{225}x^5=0$.

617. $y^2-x(x-1)^2+x=0$. 618. $y^2-x(a+x)^2=0$ $(a>0)$.

619. $y^2(a+x)-x^2(a-x)=0$. 620. $y^2-x^2(9-x^2)=0$.

621. $(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0$. 622. $x^3+y^3-3axy=0$.

623. $(y-x^2)^2-x(x-a)^3=0$ $(a>0)$. 624. $a^2y^2+4axy^2-4ax^2y+4x^4=0$.

625. $y^2-(x-a)(x-b)(x-c)=0$ $(a<b<c)$.

Glava III

FUNKCIJE PREDSTAVLJENE POMOĆU INTEGRALA

§. 1. Funkcije predstavljene pravim integralima

1° Ako je funkcija $f(x, m)$ definisana i neprekidna u ograničenoj oblasti $R[a \leqslant x \leqslant b;\ m_1 \leqslant m \leqslant m_2]$, onda je integral

$$I(m) = \int_a^b f(x, m)\,dx$$

neprekidna funkcija na odsečku $m_1 \leqslant m \leqslant m_2$.

2° Ako je uz uslove navedene pod 1° još i parcijalni izvod $f_m'(x, m)$ neprekidan u oblasti R onda za $m \in (m_1, m_2)$ važi Leibnizova formula

$$\frac{d}{dm}\int_a^b f(x, m)\,dx = \int_a^b f_m'(x, m)\,dx$$

U opštijem slučaju kada su i granice integrala diferencijabilne funkcije $\varphi(m)$ i $\psi(m)$ parametra m a sem toga je $a \leqslant \varphi(m) < b$, $a \leqslant \psi(m) < b$ za $m_1 < m < m_2$ onda je

$$\frac{d}{dm}\int_{\varphi(m)}^{\psi(m)} f(x, m)\,dx = f(\psi(m), m)\,\psi'(m) - f(\varphi(m), m)\,\varphi'(m) + \int_{\varphi(m)}^{\psi(m)} f_m'(x, m)\,dx$$

3° Ako su ispunjeni uslovi pod 1° onda važi takođe i formula

$$\int_{m_1}^{m_2} dm \int_a^b f(x, m)\,dx = \int_a^b dx \int_{m_1}^{m_2} f(x, m)\,dm$$

626. Ispitati neprekidnost funkcije

$$I(m) = \int_0^1 \frac{m f(x)}{x^2 + m^2}\,dx$$

ako je funkcija $f(x)$ neprekidna i pozitivna na segmentu $[0, 1]$.

627. Naći

1° $\lim\limits_{m\to 0}\int_m^{1+m} \frac{dx}{1+x^2+m^2}$; 2° $\lim\limits_{m\to 0}\int_0^2 x^2 \cos mx\,dx$;

3° $\lim\limits_{m\to 1}\int_{-1}^1 \sqrt{x^2+m^2}\,dx$; 4° $\lim\limits_{m\to \infty}\int_0^1 \frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{m}\right)^m}$.

628. Neka je $f(x)$ neprekidna na segmentu $[a, b]$. Dokazati da je

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^x [f(u+h) - f(u)]\,du = f(x) - f(a) \quad (a < x < b).$$

629. Ispitati da li se može izvesti granični prelaz pod znakom integrala u izrazu

$$\lim_{m\to 0}\int_0^1 \frac{x}{m^2} e^{-\frac{x^2}{m^2}}\,dx?$$

630. Ako je

$$f(x, m) = \cos mx$$

pokazati neposrednim izračunavanjem ispravnost jednakosti

$$\left(\int_0^\pi f(x, m)\,dx\right)_m' = \int_0^\pi f_m'(x, m)\,dx.$$

631. Može li se po Leibnizovom pravilu izračunati izvod funkcije

$$I(m) = \int_0^1 \ln\sqrt{x^2+m^2}\,dx$$

za $m = 0$?

632. Izračunati $I'(x)$, ako je

$$I(x) = \int_x^{x^2} e^{-xy^2}\,dy.$$

633. Naći $I(\alpha)$, ako je:

1° $I(\alpha) = \int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,dx$; 2° $I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x}\,dx$;

$$3^\circ\ I(\alpha)=\int_{a+\alpha}^{b+\alpha}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx;\qquad 4^\circ\ I(\alpha)=\int_0^{\alpha} f(x+\alpha,\ x-\alpha)\,dx;$$

$$5^\circ\ I(\alpha)=\int_0^{\alpha^2}dx\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}\sin(x^2+y^2-\alpha^2)\,dy.$$

634. Izračunati $I''(x)$, ako je

$$I(x)=\int_0^x (x+y)f(y)\,dy,$$

gde je $f(x)$ diferencijabilna funkcija.

635. Naći $I''(x)$, ako je

$$I(x)=\int_a^b f(y)\,|x-y|\,dy,$$

gde je $a<b$ i $f(x)$ diferencijabilna funkcija.

636. Izračunati $I''(x)$ ako je

$$I(x)=\frac{1}{h^2}\int_0^h dt\int_0^h f(x+t+u)\,du\quad (h>0),$$

gde je $f(x)$ neprekidna funkcija.

637. Naći $I^{(n)}(x)$ ako je

$$I(x)=\int_0^x f(t)\,(x-t)^{n-1}\,dt.$$

638. Pokazati da najopštija funkcija koja zadovoljava diferencijalnu jednačinu $y^{(n)}=f(x)$ ima oblik

$$y(x)=c_0+c_1(x-x_0)+\cdots+c_{n-1}\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^x (x-t)^{n-1}f(t)\,dt.$$

639. Pokazati, ako je funkcija $f(x)$ neprekidna u nekom intervalu, koji ne sadrži tačku a, da onda funkcija

$$y(x)=\frac{1}{k}\int_a^x f(t)\sin k(x-t)\,dt,$$

zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$y''+k^2y=f(x).$$

640. Primenom formule za diferenciranje pod znakom integrala odrediti Fourierove koeficijente a_i i b_i date funkcije $y(x)$ tako da integral

$$I=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[y(x)-T_n(x)]^2\,dx,$$

gde je $T_n(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{i=1}^n a_i\cos ix+b_i\sin ix$, ima minimalnu vrednost.

641. Naći izvod potpunih eliptičkih integrala

$$E(k)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

i

$$F(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\qquad (0<k<1)$$

i izraziti ih pomoću funkcija $E(k)$ i $F(k)$. Pokazati da $E(k)$ zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{E(k)}{1-k^2}=0.$$

642. Dokazati da Besselova funkcija celobrojnog indeksa n

$$I_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\,d\varphi$$

zadovoljava Besselovu jednačinu

$$x^2I_n''(x)+xI_n'(x)+(x^2-n^2)I_n(x)=0.$$

643. Neka je

$$I(m)=\int_0^m\frac{\varphi(x)}{\sqrt{m-x}}\,dx,$$

gde je funkcija $\varphi(x)$ kao i njen prvi izvod $\varphi'(x)$, neprekidna za $x\in[0,a]$. Dokazati da je za $m\in(0,a)$ ispravna jednakost

$$I'(m)=\frac{\varphi(0)}{\sqrt{m}}+\int_0^m\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{m-x}}\,dx.$$

644. Pokazati da funkcija

$$\varphi(x)=\int_0^1 u(x,y)\,v(y)\,dy,$$

gde je

$$u(x)=\begin{cases} x(1-y), & \text{ako je } x<y; \\ y(1-x), & \text{ako je } x>y, \end{cases}$$

a $v(y)$ neprekidna funkcija, zadovoljava jednačinu

$$\varphi''(x)=-v(x) \quad (x\in[0,\ 1]).$$

645. Naći $I_{xy}''(x, y)$ ako je

$$I(x,\ y)=\int_{x/y}^{xy}(x-yz)\,f(z)\,dz,$$

gde je $f(z)$ diferencijabilna funkcija.

646. Neka je $f(x)$ dvaput diferencijabilna funkcija i $F(x)$ diferencijabilna funkcija.

Dokazati da funkcija

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2a}[f(x-at)+f(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(z)\,dz$$

zadovoljava jednačinu treperenja žice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

i početne uslove $u(x,\ 0)=f(x)$, $u_t'(x,\ 0)=F(x)$.

647. Pokazati, ako je funkcija $f(x)$ neprekidna na segmentu $[0,\ l]$ i $(x-\xi)^2+y^2+z^2\neq 0$ za $\xi\in[0,\ l]$, onda funkcija

$$u(x,\ y,\ z)=\int_0^l\frac{f(\xi)\,d\zeta}{\sqrt{(x-\zeta)^2+y^2+z^2}}$$

zadovoljava Laplaceovu jednačinu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial z^2}=0.$$

Primenom pravila diferenciranja po parametru izračunati sledeće integrale:

648. $I(m)=\int_0^1 \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{m}\,dx.$ **649.** $I(a)=\int_0^1\frac{\operatorname{arc\,tg} a x}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad (a>0).$

650. $I(m)=\int_0^m\frac{\ln(1+mx)}{1+x^2}\,dx.$ **651.** $I(m)=\int_0^1\ln(x^2+y^2)\,dx \quad (y>0).$

652. $I(r)=\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos x+r^2)\,dx \quad I(0)=0$ (Poissonov integral).

653. $I(\alpha)=\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{arc\,tg}(\alpha\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\,dx.$ **654.** $I(m)=\int_0^{\pi/2}\frac{\ln(1+m\cos x)}{\cos x}\,dx.$

655. $I(y)=\int_0^1 x^y(\ln x)^n\,dx, \quad (y>-1)$ **656.** $I(\alpha)=\int_0^b\frac{dx}{(\alpha^2+x^2)^2}.$

657. $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx.$ **658.** $I(m)=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin^2 x+m^2\cos^2 x)\,dx \quad (m>0).$

659. $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)^2}.$

660. Koristeći formulu

$$\frac{\operatorname{arc\,tg}x}{x}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2y^2}.$$

izračunati integral

$$\int_0^1\frac{\operatorname{arc\,tg}x}{x}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

661. Primenom pravila integracije pod znakom integrala izračunati integral

$$I=\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx \quad (a>0,\ b>0).$$

662. Izračunati integrale:

$$1^\circ \int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx; \quad 2^\circ \int_0^1\cos x\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx \quad (a>0,\ b>0).$$

Koristeći postupak integracije pod znakom integrala izračunati sledeće integrale:

663. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_c^d x^y\,dy.$ **664.** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$

665. 1° $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{y-x}{(x+y)^2}\,dy.$ 2° $\int dy \int\limits_0^1 \frac{y-x}{(x+y)^2}\,dx.$

666. $\int\limits_0^{\pi/2} \ln \frac{a+b\sin x}{a-b\sin x}\cdot\frac{dx}{\sin x}$ $(a>b>0).$

667. Neka su $F(k)$ i $E(k)$ potpuni eliptički integrali (v. zad. 641).
Dokazati formule:

1° $\int\limits_0^k F(k)\,k\,dx = E(k)-k_1^2 F(k);$

2° $\int\limits_0^k E(k)\,k\,dx = \frac{1}{3}\,[1+k^2)\,E(k)-k_1^2 F(k)],$

gde je $k_1^2=1-k^2$.

668. Proveriti formulu

$$\int\limits_0^x x\,I_0(x)\,dx = x\,I_1(x),$$

gde su $I_0(x)$ i $I_1(x)$ Besselove funkcije sa indeksima 0 i 1 (v. zad. 642).

§ 2. Nepravi integral kao funkcija parametra. Uniformna konvergencija integrala

1° Nepravi integral

$$(1) \qquad \int\limits_a^\infty f(x, m)\,dx,$$

gde je funkcija $f(x, m)$ neprekidna u oblasti $a \leqslant x < \infty$, $m_1 < m < m_2$, naziva se uniformno konvergentan u intervalu (m_1, m_2) ako za proizvoljno $\varepsilon>0$ postoji broj $M=M(\varepsilon)$ takav, da za svako $b>M$ važi nejednakost

$$\left|\int\limits_b^\infty f(x, m)\,dx\right| < \varepsilon \qquad (m_1<m<m_2).$$

Uniformna konvergencija definisana pod 1° ekvivalentna je uniformnoj konvergenciji svih redova oblika

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{a_n}^{a_{n+1}} f(x, m)\,dx,$$

gde je $a=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_n<a_{n+1}<\cdots$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$.

Ako integral (1) uniformno konvergira u intervalu (m_1, m_2) onda je on neprekidna funkcija parametra m u tom intervalu.

2° Potreban i dovoljan uslov da integral (1) bude uniformno konvergentan u intervalu (m_1, m_2) je da za proizvoljno $\varepsilon>0$ postoji broj $M=M(\varepsilon)$ takav da je

$$\left|\int\limits_{b'}^{b''} f(x, m)\,dx\right| < \varepsilon \quad \text{za } m\in(m_1, m_2)$$

samo ako je $b'>b$ i $b''>M$. Ovaj kriterijum je poznat kao Cauchyev kriterijum.

3° Da bi integral (1) bio uniformno konvergentan potrebno je i dovoljno da postoji majorantna funkcija $F(x)$ nezavisna od parametra m takva da je

1) $|f(x, m)| < F(x)$ za $a\leqslant x<\infty$

i

2) $\int\limits_a^\infty F(x)\,dx<\infty.$

Ovaj kriterijum naziva se Weierstrassov kriterijum.

4° Analogne teoreme važe i za slučaj nepravih integrala prekidnih funkcija.

Odrediti oblast konvergencije integrala:

669. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx.$ **670.** $\int\limits_0^\infty \frac{x^k}{1+x^2}\,dx.$ **671.** $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-mx}}{1+x^2}\,dx.$

672. $\int\limits_0^\pi \frac{x\cos x}{x^p+x^q}\,dx.$ **673.** $\int\limits_0^\infty x^n e^{-x}\,dx.$ **674.** $\int\limits_0^\infty x^m \sin x^n\,dx.$

675. $\int\limits_0^\infty x^a \frac{x+2}{x+1}\,dx.$ **676.** $\int\limits_0^\infty e^{-ax^2} x^m\,dx.$ **677.** $\int\limits_{-\infty}^\infty x^m e^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\,dx.$

678. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x^q}{x^p}\,dx.$ **679.** $\int\limits_0^\infty \frac{\cos\frac{1}{1-x}}{\sqrt[m]{1-x^2}}\,dx.$ **680.** $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}\,dx.$

Upoređivanjem sa redovima ispitati konvergenciju sledećih integrala:

681. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos x}{x+m}\,dx.$ **682.** $\int\limits_0^\infty x^m \sin x^n\,dx.$ **683.** $\int\limits_0^\infty \frac{x}{1+x^m\sin^2 x}\,dx.$

684. $\int\limits_\pi^\infty \frac{dx}{x^a\sqrt[3]{\sin^2 x}}$ **685.** $\int\limits_0^\infty \frac{\sin(x+x^2)}{x^m}\,dx.$

686. Dokazati da za $m>0$ integrali

$$\int_0^\infty f(x)\, e^{-mx}\, dx \quad \text{i} \quad \int_0^\infty f(x)\, e^{-mx^2}\, dx$$

uniformno konvergiraju ako integral $\int_0^\infty f(x)\, dx$ apsolutno konvergira.

687. Dokazati da, ako integral

$$\int_a^\infty f(x)\, dx$$

konvergira i ako je funkcija $\varphi(x, y)$ ograničena i monotona po x, onda integral

$$\int_a^\infty f(x)\, \varphi(x, y)\, dx$$

uniformno konvergira (u odgovarajućoj oblasti).

688. Pokazati da se uniformno konvergentni integral

$$I=\int_1^\infty e^{-\frac{1}{m^2}\left(x-\frac{1}{m}\right)^2} dx \quad (0<m<1)$$

ne može majorirati konvergentnim integralom koji ne zavisi od parametra.

689. Pokazati da integral

$$I=\int_0^\infty m e^{-mx}\, dx$$

1) uniformno konvergira u proizvoljnom intervalu $0<a<m<b$ i

2) neuniformno konvergira u intervalu $0<m<b$.

690. Pokazati da Dirichletov integral

$$I=\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx$$

1) uniformno konvergira na svakom segmentu $[a, b]$, koji ne sadrži vrednost $\alpha=0$, i 2) neuniformno konvergira na svakom segmentu $[a, b]$, koji sadrži vrednost $\alpha=0$.

Ispitati uniformnu konvergenciju, u naznačenim intervalima, sledećih integrala:

691. $\displaystyle\int_x^\infty \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx.$ **692.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{y\, dx}{x^2+y^2},\ y\in[0,\ d>0].$

693. $\displaystyle\int_a^\infty y e^{-xy}\, dx \quad (a>0).$ **694.** $\displaystyle\int_0^1 x^{y-1}\, dx.$

695. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin x\, dx \quad (0<\alpha_0<\alpha<\infty).$ **696.** $\displaystyle\int_0^\infty x^m e^{-x}\, dx \quad (a<m<b).$

697. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin ax \cos x}{x}\, dx.$ **698.** $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos mx}{1+x^2}\, dx \quad (-\infty<m<\infty).$

699. $\displaystyle\int_x^\infty \frac{\sin ax}{x}\, dx, \quad a>0.$ **700.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x}\, dx \quad (0<\alpha<\infty).$

701. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-xy} \frac{\cos x}{x^a}\, dx \quad (0<a<1).$

702. $\displaystyle\int_1^\infty e^{-\alpha x} \frac{\cos x}{x^p}\, dx \quad (0<\alpha<\infty),$ gde je p fiksno.

703. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos xy}{x^a}\, dx \quad (0<a<1).$ **704.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{1+x^m}\, dx \quad (m>0).$

705. $\displaystyle\int^\infty \frac{x \sin xy}{a^2+x^2}\, dx \quad (a>0).$ **706.** $\displaystyle\int_1^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^m} \quad (0<m<2).$

707. Da li je dozvoljen prelaz pod znakom integrala u izrazu

$$\lim_{m\to+0} \int_0^\infty m e^{-mx}\, dx?$$

708. Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna u intervalu $(0,\ \infty)$ dokazati formulu

$$\lim_{m\to 1} \int_0^\infty e^{-mx} f(x)\, dx = \int_0^\infty f(x)\, dx.$$

709. Dokazati da je

$$\lim_{m\to 0} \int_0^\infty f(x) \sin mx\, dx = 0,$$

ako je $f(x)$ apsolutno integrabilna u intervalu $(0,\ \infty)$.

710. Izračunati integral

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\int_0^\infty \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\right]dx$$

koristeći granični prelaz pod znakom integrala.

711. Dokazati da je integral

$$I(a)=\int_0^\infty e^{-(x-a)^2}\,dx$$

neprekidna funkcija parametra a.

Ispitati neprekidnost, u naznačenim intervalima, sledećih funkcija:

712. $I(m)=\int_0^\infty \frac{x\,dx}{x^m+2}$, za $m>0$. **713.** $I(m)=\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^m}\,dx$, za $m>0$.

714. $I(m)=\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^m(\pi-x)^m}\,dx$, za $0<m<2$.

715. $I(m)=\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{|\sin x|^m}\,dx$, za $0<m<1$.

716. $I(m)=\int_0^\infty m\,e^{-m^2x}\,dx$, za $-\infty<m<\infty$.

§ 3. Zamena promenljivih u nepravim integralima. Diferenciranje i integracija nepravih integrala pod znakom integrala

1° Ako je funkcija $f(x, m)$ neprekidna i diferencijabilna po parametru m u oblasti $a\leqslant x<\infty$, $m_1<m<m_2$, i ako sem toga integral $\int_a^\infty f(x, m)\,dx$ konvergira, a integral $\int_a^\infty f'_m(x, m)\,dx$ uniformno konvergira u intervalu (m_1, m_2) onda je

$$\frac{d}{dm}\int_a^\infty f(x, m)\,dx=\int_a^\infty f'_m(x, m)\,dx$$

za $m_1<m<m_2$ (Leibnitzovo pravilo).

2° Ako je funkcija $f(x, m)$ neprekidna za $x\geqslant a$ i $m_1\leqslant m\leqslant m_2$, i ako integral $\int_a^\infty f(x, m)\,dx$ uniformno konvergira u konačnom intervalu (m_1, m_2) onda je

$$(1)\qquad \int_{m_1}^{m_2} dm\int_a^\infty f(x, m)\,dx=\int_a^\infty dx\int_{m_1}^{m_2} f(x, m)\,dm.$$

Ako je $f(x, m)\geqslant 0$, onda formula (1), važi takođe i za beskonačan interval (m_1, m_2) uz pretpostavku da jedna od strana u jednakosti (1) ima smisla.

717. Koristeći formulu

$$\int_0^1 x^{m-1}\,dx=\frac{1}{m}\quad (m>0)$$

izračunati integral

$$I=\int_0^1 x^{m-1}\ln^n x\,dx,\ \text{gde je } n \text{ prirodan broj.}$$

718. Koristeći jednakost

$$\int_0^\infty e^{-xy}\,dx=\frac{1}{y}\quad \text{za } y>0,$$

izračunati integral

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx,\quad 0<a<b.$$

719. Polazeći od jednakosti

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos\beta x\,dx=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2},$$

koja se za $\alpha>0$ dobija neposrednom integracijom izračunati integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}\,dx.$$

720. Polazeći od jednakosti

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,dx\ \ \frac{1}{a}$$

gde je $a>0$, izračunati integral

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^{n-1}\, dx$$

ako je n prirodan broj.

721. Polazeći od jednakosti

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a},$$

izračunati vrednost integrala

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}.$$

722. Polazeći od jednakosti

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} a,$$

naći integral

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\, dx.$$

Izračunati sledeće integrale:

723. $\displaystyle\int_c^d dy \int_0^\infty \frac{\sin xy}{x}\, dx, \quad (y>0).$

724. $\displaystyle I(y) = \int_0^\infty \frac{1-\cos xy}{x} e^{-kx}\, dx, \quad (y>0,\ k>0).$

725. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-e^{-xy}}{xe^x}\, dx.$

726. $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2 dx, \quad (\alpha>0,\ \beta>0).$

727. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} \cos mx\, dx, \quad (\alpha>0,\ \beta>0).$

728. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin xy}{x(a^2+x^2)}\, dx, \quad a\neq 0.$

729. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tg} xy}{x(1+x^2)}\, dx.$

730. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(a^2+x^2)}{b^2+x^2}\, dx, \quad b\neq 0.$

731. Izračunati Poissonov integral

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$$

polazeći od formule

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx \int_0^\infty x e^{-x^2 y^2}\, dx.$$

Koristeći Poissonov integral izračunati sledeće integrale:

732. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)} dx, \quad (a>0).$

733. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}\, dx, \quad (a>0,\ b>0);$ (vidi zad. 680).

734. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax^2} \cos bx\, dx, \quad (a>0).$

735. $\displaystyle\int_2^\infty x e^{-ax^2} \sin bx\, dx, \quad (a>0).$

736. $\displaystyle\int_0^\infty x^{2n} e^{-x^2} \cos 2bx\, dx, \quad (n\in N).$

737. Polazeći od integrala

$$I(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x}\, dx, \quad (\alpha>0).$$

izračunati Dirichletov integral

$$D(\beta) = \int_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x}\, dx.$$

Koristeći Dirichletov integral i jednakost

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = f(0)\ln\frac{b}{x} \quad (a>0,\ b>0).$$

gde je $f(x)$ neprekidna funkcija i integral $\int_A^{\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx$ ima smisla za proizvoljno $A>0$, izračunati sledeće integrale:

738. $\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}\,dx, \quad (\alpha>0).$ **739.** $\int_0^{\infty} \frac{\sin\alpha x \sin\beta x}{x}\,dx.$

740. $\int_0^{\infty} \frac{\sin^4\alpha x-\sin^4\beta x}{x}\,dx.$ **741.** $\int_0^{\infty} \frac{\sin x^2}{x}\,dx.$

742. $\int_0^{\infty} e^{-kx}\frac{\sin\alpha x \sin\beta x}{x^2}\,dx, \quad (k>0,\ \alpha>0,\ \beta>0).$

743. Izračunati integrale:

1° $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x+b}\,dx;$ 2° $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x+b}\,dx.$

744. Dat je integral

$$I(m)=\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{1+x^2}\,dx,$$

gde je m realan parametar.

1° Ispitati konvergenciju ovog integrala i naći takav pozitivan broj M da je $|I(m)|<M$ za svako realno m.

2° Vodeći računa o jednakosti

$$\frac{\pi}{2}=\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

pokazati da je za $m>0$

$$I''(m)=I(m)$$

3° Naći opšti integral diferencijalne jednačine pod 2° i vrednosti $I(0)$ i $I'(0)$ uz dokaz da druga od njih postoji. Na osnovu toga naći vrednost funkcije $I(m)$.

4° Naći granične vrednosti

$$\lim_{m\to\infty} I(m) \quad \text{i} \quad \lim_{m\to\infty} \int_0^{m} dm \int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{1+x^2}\,dx,$$

koristeći rezultat iz tačke 3° i bez njega.

745. Diferenciranjem po parametru izračunati vrednost integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\cos mt\,dt, \quad (m\in R).$$

Izračunati sledeće integrale:

746. $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2}\,dx.$ **747.** $\int_0^{\infty} \frac{\cos\alpha x}{(1+x^2)^2}\,dx.$

748. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\alpha x}{ax^2+2bx+c}\,dx, \quad (a>0,\ ac-b^2>0).$

749. Dat je integral

$$I(m)=\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} mx}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx,$$

gde je m realan parametar.

1° Ispitati konvergenciju integrala $I(m)$.

2° Koristeći diferenciranje integrala po parametru izračunati integral $I(m)$ uz obrazloženje postupka.

3° Nacrtati grafik funkcije $I(m)$.

750. Koristeći formulu

$$\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-xy^2}\,dx, \quad (y>0)$$

izračunati Frenetove integrale

$$\int_0^{\infty} \sin x^2\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx,$$

$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx.$$

751. Koristeći pravilo diferenciranja pod znakom integrala izračunati vrednost integrala

$$I(a) = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos ax\,dx.$$

Isti integral izračunati razvijajući $\cos ax$ u Mac Laurinov red i uporediti dobijene rezultate.

752. Dokazati identitete

$$1^\circ\ \int_0^\infty \frac{\sin x}{x+m}\,dx = \int_0^\infty \frac{e^{-mt}\,dt}{1+t^2},\ m>0;\quad 2^\circ\ \int_0^\infty \frac{\cos x}{x+m}\,dx = \int_0^\infty \frac{te^{-at}}{1+t^2}\,dt,\ m>0.$$

Izračunati integrale:

753. $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(ax^2+2bx+c)\,dx, \quad (a\neq 0).$

754. $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x^2 \cos 2ax\,dx.$ **755.** $\int_{-\infty}^{\infty} \cos x^2 \cos 2ax\,dx.$

756. Izračunati

$$\lim_{a\to+0}\left(a-\int_0^a e^{-x^2}\,dx\right)\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}.$$

757. Dokazati formule:

$$1^\circ\ \int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{a^2-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}\sin ax;$$

$$2^\circ\ \int_0^\infty \frac{x\sin\alpha x}{a^2-x^2}\,dx = -\frac{\pi}{2}\cos ax,$$

gde je $a\neq 0$, a integrali se uzimaju u smislu glavne Cauchyeve vrednosti.

758. Izračunati vrednost integrala

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}e^{-ax}\,dx, \quad (a>0)$$

a na osnovu toga izračunati integrale:

$1^\circ\ \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx;$ $2^\circ\ \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,dx;$

$3^\circ\ \int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2}\,dx;$ $4^\circ\ \int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^2}\,dx;$ $5^\circ\ \int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^3}\,dx.$

759. Funkcije $F(x)$ i $G(x)$ definisane su određenim integralima

$$F(x) = \left(\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt\right)^2 \ \text{i}\ G(x) = -\int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\,dt.$$

1° Pokazati da je $F'(x)=G'(x)$ za svako x, pa odatle izvesti identitet

$$F(x) = \frac{\pi}{2}+G(x).$$

2° Na osnovu rezultata pod 1° izračunati vrednost integrala

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt.$$

760. Naći Laplaceovu transformaciju

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt \quad (p>0)$$

za funkciju $f(t)$, ako je:

1° $f(t)=t^n$ $(n\in N)$; 2° $f(t)=\sqrt{t}$; 3° $f(t)=e^{at}$;

4° $f(t)=te^{-at}$; 5° $f(t)=\cos t$;

6° $f(t)=\dfrac{1-e^{-t}}{t}$; 7° $f(t)=\sin a\sqrt{t}$.

761. Dokazati formulu (Lipschitzov integral)

$$\int_0^\infty e^{-at}I_0(bt)\,dt = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (a>0)$$

gde je $I_0(t)=\frac{1}{\pi}\cos(x\sin\varphi)\,d\varphi$ — Besselova funkcija nultog indeksa.

762. Naći Weierstrassovu transformaciju

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2} f(y)\,dy.$$

ako je:

1° $f(y)=1$; 2° $f(y)=y^2$; 3° $f(y)=e^{2ay}$; 4° $f(y)=\cos ay$.

763. Dokazati da za polinome Čebiševa-Hermitea

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right) \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots)$$

važi formula

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)\,H_n(x)\,e^{-x^2}\,dx=\begin{cases}0, & \text{ako je } m\neq n\\ 2^n n!\sqrt{\pi}, & \text{ako je } m=n.\end{cases}$$

764. Integral

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma_1^2}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma_2^2}}\,d\xi \quad (\sigma_1>0,\ \sigma_2>0),$$

ima veliki značaj u teoriji verovatnoće. Naći njegovu vrednost.

765. Neka je funkcija $f(x)$ apsolutno integrabilna na intervalu $(-\infty,\ \infty)$. Dokazati da integral

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)\,e^{-\frac{(\eta-x)^2}{4a^2t}}\,d\eta$$

zadovoljava jednačinu termoprovodljivosti

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

i početne uslove

$$\lim_{t\to 0} u(x,\ t)=f(x).$$

§ 4. Eulerovi integrali

1° Integral

$$B(a,\ b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

za $a>b$ i $b>0$ naziva se *beta funkcija* ili *Eulerov integral prve vrste*. Osnovna svojstva beta funkcije su sledeća:

1) $$B(a,\ b)=\frac{b-1}{a+b-1}B(a,\ b-1).\quad (b>1).$$

Ako je $b=n>1$, gde je n prirodan broj onda ova formula postaje rekurentna formula

$$B(a,\ n)=\frac{n-1}{a+n-1}(a,\ n-1).$$

2) Ako su a i b prirodni brojevi onda je

$$B(m,\ n)=\frac{(m-1)!\ (n-1)!}{(m+n-1)!}.$$

Specijalno za $a=1$ i $b=1$ sledi $B(1,\ 1)=1$.

2° Integral

$$\Gamma(a)=\int_0^{\infty} x^{a-1}e^{-x}\,dx$$

za $a>0$ naziva se *gama funkcija* ili *Eulerov integral druge vrste*. Osnovna svojstva funkcije su sledeća:

1) $$\Gamma(a+1)=a\,\Gamma(a)$$

Ako je a prirodan broj onda je

$$\Gamma(n+1)=n!;\quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

Specijalno je $\Gamma(2)=\Gamma(1)=1$. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

2) Ako a nije ceo broj onda važi formula

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

Ova formula omogućava da se proširi gama funkcija na negativne vrednosti argumenta.

Osnovna veza između beta i gama funkcije izražena je formulom

$$B(a,\ b)=\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

766. Dokazati da je beta funkcija $B(a,\ b)$ neprekidna i da ima neprekidne izvode bilo kog reda u oblasti $a>0$ i $b>0$.

767. Dokazati da je gama funkcija $\Gamma(a)$ neprekidna i da ima neprekidne izvode bilo kog reda u oblasti $a>0$.

Izračunati sledeće integrale:

768. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx.$ **769.** $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a>0).$

770. $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt[3]{1-x^3}\,dx.$ **771.** $\displaystyle\int_{-1}^{1}(1+t)^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt.$ **772.** $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\,dx.$

773. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$. **774.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$. **775.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$, $(n>0)$.

776. $\int\limits_0^\infty x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}\,dx$ $(p,\ q,\ m>0)$. **777.** $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^4 x\,dx$.

778. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{a-1}\varphi \cos^{b-1}\varphi\,d\varphi$ $(a,\ b>0)$. **779.** $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$.

780. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^3}\,dx$. **781.** $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x}\,dx$.

782. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^{p/q} x}{x}\,dx$, gde su p i q uzajamno prosti neparni prirodni brojevi.

783. $\int\limits_0^\infty x^{2n} e^{-x^2}\,dx$, $(n\in N)$.

Odrediti oblast definisanosti i izraziti pomoću Eulerovih integrala sledeće integrale:

784. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}$. **785.** $\int\limits_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx$, $n>0$.

786. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^n}\,dx$. **787.** $\int\limits_0^\infty \frac{x^m}{(a+bx^n)^p}\,dx$ $(a>0,\ b>0,\ n>0)$.

788. $\int\limits_0^1 \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{(x+a)^{\alpha+\beta}}\,dx$, $a>0$. **789.** $\int\limits_0 \frac{\sin^{n-1}\varphi}{(1-k\sin\varphi)^n}\,d\varphi$, $0<k<1$.

790. $\int tg^{2a-1} x\,dx$. **791.** $\int\limits_0^\infty x^p e^{-ax}\ln x\,dx$, $(a>0)$

792. $\int\limits_0^\infty \frac{x^a \ln x}{1+x^2}\,dx$. **793.** $\int\limits_0^\infty x^m e^{-x^n}\,dx$.

794. $\int\limits_{-\infty}^\infty \left(1+\frac{x^2}{n-1}\right)^{\frac{n+1}{2}} dx$. **795.** $\int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx$.

796. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1}\ln^2 x}{1+x}\,dx$, $(p>0)$. **797.** $\int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1+x)\ln x}\,dx$.

798. $\int\limits_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\,dx$, $(0<p<1)$ **799.** $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sh}\alpha x}{\operatorname{sh}\beta x}\,dx$, $(0<\alpha<\beta)$.

800. $\int\limits_0^1 \ln\Gamma(x)\,dx$. **801.** $\int\limits_0^{a+1} \ln\Gamma(x)\,dx$, $(a>0)$.

802. $\int\limits_0^1 \ln\Gamma(x)\sin\pi x\,dx$. **803.** $\int\limits_0^1 \ln\Gamma(x)\cos n\pi x\,dx$, $(n\in N)$.

804. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax}}{\sqrt{\operatorname{sh} 2x}}\,dx$.

Dokazati jednakosti:

805. $\int\limits_0^\infty e^{-x^4}\,dx \int\limits_0^\infty x^2 e^{-x^4}\,dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}$. **806.** $\int\limits_0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}$.

807. $\int\limits_0^\infty x^{p-1}\cos ax\,dx = \frac{1}{a^p}\,\Gamma(p)\cos\frac{\pi p}{2}$, $(0<p<1)$.

808. $\int\limits_0^\infty x^{p-1}\sin ax\,dx = \frac{1}{a^p}\,\Gamma(p)\sin\frac{\pi p}{2}$, $(-1<p<1)$.

809. $\prod\limits_{m=1}^\infty \int\limits_0^\infty x^{m-1} e^{-x^n}\,dx = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}$. **810.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^\infty e^{-x^n}\,dx = 1$.

Koristeći jednakost $\frac{1}{x^m} = \frac{1}{\Gamma(x)} \int\limits_0^\infty t^{m-1} e^{-xt}\,dt$ $(x>0)$, naći integrale:

811. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax}{x^m}\,dx$, $(0<m<1)$. **812.** $\int \frac{\sin ax}{x^m}\,dx$, $(0<m<2)$.

813. Pokazati da je za $x>0$ i $a>0$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{t^{a-1}\, e^{-xt}}{e^t-1}\, dt = \Gamma(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^a}.$$

814. Dokazati Eulerove formule:

$$1^\circ \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-\lambda t \cos \alpha} \cos(\lambda t \sin \alpha)\, dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x} \cos \alpha x;$$

$$2^\circ \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-\lambda t \cos \alpha} \sin(\lambda t \sin \alpha)\, dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x} \sin \alpha x,$$

$$\left(\lambda>0,\ x>0,\ -\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right).$$

815. Naći dužinu luka krive

$$r^n = a^n \cos n\varphi,\ (a>0,\ n \in N).$$

816. Naći površinu ograničenu krivom

$$|x|^m + |y|^m = a^m,\ (m>0,\ a>0).$$

817. Dat je integral

$$\varphi(m) = \int_0^\infty e^{-x^m}\, dx,$$

gde je m realan parametar.

1° Ispitati njegovu konvergenciju.

2° Koristeći gama funkciju izračunati $\lim\limits_{m\to\infty} \varphi(m)$.

3° Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!!}{\varphi\left(\dfrac{1}{n}\right)} \left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)^n$ i naći njegov zbir.

§ 5. Fourierov integral i Fourierove transformacije

1° **Predstavljanje funkcije Fourierovim integralom.** Ako je funkcija $f(x)$ apsolutno integrabilna na celoj realnoj pravoj, tj. ako integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ konvergira, i ako ispunjava Dirichletove uslove na svakom konačnom intervalu, tada se ona, u svim tačkama neprekidnosti, može predstaviti *Fourierovim integralom*:

$$(1) \qquad f(x) = \int_0^\infty [a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x]\, dx$$

gde je

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda t\, dt \quad \text{i} \quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \lambda t\, dt.$$

U prekidnim tačkama integral (1) jednak je $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$.

Ako je funkcija $f(x)$ parna, tada je:

$$(2) \qquad f(x) = \int_0^\infty a(\lambda) \cos \lambda x\, dx,$$

gde je

$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(t) \cos \lambda t\, dt,$$

a ako je funkcija $f(x)$ neparna, tada je:

$$(3) \qquad f(x) = \int_0^\infty b(\lambda) \sin \lambda x\, dx,$$

gde je

$$b(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(t) \sin \lambda t\, dt.$$

2° **Predstavljanje funkcije Fourierovim integralom u intervalu $(0, \infty)$.** Ako je funkcija $f(x)$ zadata na intervalu $(0, \infty)$, apsolutno integrabilna na tom intervalu i ispunjava Dirichletove uslove na svakom konačnom intervalu $(a, b) \subset (0, \infty)$, tada se, parnim produženjem, može predstaviti formulom (2), ili neparnim produženjem formulom (3).

3° **Fourierove transformacije.** Ako se funkcija $f(x)$ za svako $x \in (-\infty, \infty)$ sem, možda, u konačnom broju tačaka može predstaviti Fourierovim integralom, tada je funkcija $F(z)$ koja je rešenje integralne jednačine

$$(4) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(z)\, e^{-ixz}\, dz$$

data integralom:

$$(5) \qquad F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{izu}\, du \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Funkcija $F(z)$ zove se *Fourierova transformacija* funkcije $f(x)$. Ako je funkcija $f(x)$ parna, tada je funkcija

$$F_c(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(u) \cos(zu)\, du$$

rešenje integralne jednačine

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_c(z) \cos(xz)\, dz,$$

a ako je $f(x)$ neparna, tada je

$$F_s(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(u)\sin(zu)\,du$$

rešenje integralne jednačine

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} F_s(z)\sin(xz)\,dz.$$

Funkcije $F_c(t)$ i $F_s(t)$ su respektivno kosinus-Fourierova transformacija i sinus-Fourierova transformacija funkcije $f(x)$. Funkcija $f(x)$ definisana za $x\in(0,\infty)$ može se parno ili neparno produžiti zavisno da li je potrebna sinus ili cosinus-Fourierova transformacija.

Sledeće funkcije predstaviti Fourierovim integralom:

818. $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$ **819.** $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \pi x, & 0<x\leqslant 1\\ 0, & x>1.\end{cases}$

820. $f(x)=\begin{cases}1+x, & -1<x<0\\ 1-x, & 0<x<1\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$ **821.** $f(x)=\operatorname{sgn}(x-a)-\operatorname{sgn}(x-b)\ (b>a)$.

822. $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<h\\ -1, & -h<x<0\\ 0, & |x|>h.\end{cases}$ **823.** $f(x)=\begin{cases}A\left(1-\dfrac{|x-x_0|}{a}\right), & |x-x_0|<a\\ 0, & |x-x_0|>a.\end{cases}$

824. $f(x)=\dfrac{1}{a^2+x^2}\quad(a>0)$. **825.** $f(x)=\dfrac{x}{a^2+x^2}\quad(a>0)$.

826. $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \sin x, & 0<x<\pi\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$ **827.** $f(x)=\begin{cases}A\sin\omega t, & |t|<\dfrac{2\pi n}{\omega}\\ 0, & |t|>\dfrac{2\pi n}{\omega}\end{cases}\quad(n\in N)$.

828. $f(x)=\begin{cases}e^{-mx}, & x>0\\ e^{mx}, & x<0\end{cases}\quad(m>0)$. **829.** $f(x)=\begin{cases}e^{-mx}, & x>0\\ -e^{mx}, & x<0\end{cases}\quad(m>0)$.

830. $f(x)=\begin{cases}e^{-kx}\sin\omega x, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}\quad(k>0)$.

831. $f(x)=e^{-a|x|}\cos\beta x\quad(a>0)$.

832. Funkciju $f(x)=e^{-x}$ $(0<x<\infty)$ predstaviti Fourierovim integralom: 1° parnim produženjem; 2° neparnim produženjem.

Naći Fourierove transformacije za sledeće funkcije:

833. $f(x)=e^{-a|x|}\,(a>0)$. **834.** $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$. **835.** $f(x)=xe^{-a|x|}\ (a>0)$.

Naći kosinus-Fourierove transformacije za sledeće funkcije:

836. $f(x)=e^{-\beta x}\ (\beta>0,\ x>0)$. **837.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\,\dfrac{\beta}{\beta^2+x^2}\ (\beta>0,\ x>0)$.

838. $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$. **839.** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Naći sinus-Fourierove transformacije za sledeće funkcije:

840. $f(x)=e^{-\beta x}\ (\beta>0,\ x>0)$. **841.** $f(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\dfrac{x}{\beta^2+x^2}\quad(\beta>0,\ x>0)$.

842. $f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

843. Pokazati da je za funkciju $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ njena sinus-Fourierova transformacija sama ta funkcija.

Rešiti sledeće integralne jednačine:

844. $\displaystyle\int_0^{\infty}\varphi(y)\cos xy\,dy=\frac{1}{1+x^2}$.

845. $\displaystyle\int_0^{\infty}\varphi(y)\sin xy\,dy=e^{-x}\quad(x>0)$.

846. $\displaystyle\int_0^{\infty}\varphi(y)\sin xy\,dy=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\sin x, & 0<x<\pi\\ 0, & x\geqslant\pi.\end{cases}$

847. $\displaystyle\int_0^{\infty}\varphi(y)\sin xy\,dy=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\cos x, & 0<x<\pi\\ -\dfrac{\pi}{4}, & x=\pi\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$

Glava IV

VIŠESTRUKI I KRIVOLINIJSKI INTEGRALI

§ 1. Dvojni integral

1° Pod *dvojnim integralom* neprekidne funkcije $z(x, y)$ nad nekom zatvorenom pravilnom oblašću D, podrazumeva se broj

$$\iint_D z(x, y)\, dx\, dy = \lim_{\substack{\max|\Delta x_i|\to 0\\ \max|\Delta y_j|\to 0}} \sum_i \sum_j z(x_i, y_j)\, \Delta x_i\, \Delta y_j$$

gde je $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = x_{j+1} - x_j$ a zbir se odnosi na sve vrednosti i i j za koje je $(x_i, y_i) \in D$.
Ako je oblast D određena nejednakostima

$$a < x < b, \quad y_1(x) \leqslant y < y_2(x)$$

gde su $y_1(x)$ i $y_2(x)$ neprekidne funkcije na segmentu $[a, b]$, onda odgovarajući dvojni integral može biti izračunat po formuli

$$\iint_D z(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x, y)\, dy$$

2° Ako se neprekidnim i diferencijabilnim funkcijama

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

realizuje jednoznačno preslikavanje ograničene i zatvorene oblasti D u ravni xOy na oblast D' ravni uOv i ako je

$$I = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0$$

onda važi formula

$$\iint_D z(x, y)\, dx\, dy = \iint_{D'} z[x(u, v), y(u, v)]\, |I|\, du\, dv$$

U specijalnom slučaju kada se prelazi na polarne koordinate φ i r po formulama $x = r\cos\varphi$ i $y = r\sin\varphi$ biće:

$$\iint_D z(x, y)\, dx\, dy = \iint_D z(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr\, d\varphi.$$

3° Ako su m i M donja i gornja međa funkcije $z(x, y)$ u oblasti D, onda je

$$m < z(x, y) < M$$

jednakost

$$\iint_D z(x, y)\, z_1(x, y)\, dx\, dy = z(\xi, \eta) \iint_D z_1(x, y)\, dx\, dy$$

gde je $z_1(x, y)$ neka neprekidna funkcija koja zadržava stalan znak u oblasti D, a $(\xi, \eta) \in D$ naziva se *formula o srednjoj vrednosti* dvojnog integrala. Ako se stavi $\mu = z(\xi, \eta)$ i $z_1(x, y) = 1$ dobija se

$$\mu = z(\xi, \eta) = \frac{1}{P} \iint_D z(x, y)\, dx\, dy$$

što se naziva *srednja vrednost funkcije* $z(x, y)$ u oblasti D čija je površina P.

4° Ako je oblast integracije D neograničena a funkcija $z(x, y)$ neprekidna na D, onda je po definiciji

$$\iint_D z(x, y)\, dx\, dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} z(x, y)\, dx\, dy$$

gde je D_n proizvoljan niz ograničenih zatvorenih pravilnih oblasti koji pokriva oblast D, tj. $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$. Ako granica na desnoj strani postoji i ne zavisi od izbora niza D_n, onda se odgovarajući integral naziva *konvergentan;* u protivnom integral se naziva *divergentan.*

5° Ako je funkcija $z(x, y)$ svuda neprekidna u ograničenoj i zatvorenoj oblasti D, sem u tački $P(a, b)$, onda se stavlja

$$\iint_D z(x, y)\, dx\, dy = \lim_{\varepsilon\to 0} \iint_{D-U_\varepsilon} z(x, y)\, dx\, dy$$

gde je U_ε oblast poluprečnika ε koja sadrži tačku P, i ako postoji granica integral se naziva konvergentan; u protivnom integral se naziva divergentan.

Pretpostavljajući da u oblasti tačke $P(a, b)$ važi jednakost: $z(x, y) = \dfrac{\varphi(x, y)}{r^a}$

gde je $m < |\varphi(x, y)| < M$ $(m, M > 0)$ $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ dobija se da: 1) za $a < 2$ integral (2) konvergira; 2) za $a > 2$ divergira. Analogno se definiše nepravi integral (2) ako funkcija $z(x, y)$ ima liniju prekida.

Polazeći od definicije izračunati sledeće integrale:

848. $\displaystyle\iint_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1}} xy\, dx\, dy.$ **849.** $\displaystyle\iint_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ c\leqslant y\leqslant d}} x^2 y^2\, dx\, dy.$ **850.** $\displaystyle\iint_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ c\leqslant y\leqslant d}} e^{x+y}\, dx\, dy.$

851. Formirati donji $\underline{S}$ i gornji $\overline{S}$ integralni zbir funkcije $z(x, y) = x^2 + y^2$ na oblasti $1 < x < 2;\ 1 < y < 3$, deleći tu oblast na pravougaonike pravama:

$$x = 1 + \frac{i}{n}, \quad y = 1 + \frac{2j}{n} \quad (i, j = 0, 1, \ldots n).$$

Naći graničnu vrednost tih zbirova kada $n \to \infty$.

852. Proveriti sledeće relacije:

1° $8\,(5-\sqrt{2})\,\pi < \iint_D (x+y+100)\,dx\,dy < 8\,(5+\sqrt{2})\,\pi$;

2° $36\,\pi < \iint_D (x^2+4y^2+9)\,dx\,dy < 76\,\pi$

gde je oblast D ograničena krugom $x^2+y^2=4$

853. $0 < \iint_D xy\,(x+y)\,dx\,dy < 64$

$D\,(0<x<2,\quad 0<y<2)$

854. $-4 < \iint_D (x+xy-x^2-y^2)\,dx\,dy < \frac{2}{3}$

$D\,(0<x<1;\quad 0<y<2)$

855. $1{,}96 < \iint_{|x|+|y|\le 10} \frac{dx\,dy}{100+\cos^2 x+\cos^2 y} < 2.$

U sledećim zadacima za navedenu oblast ispisati granice integracije dvojnog integrala $\iint_D z(x,y)\,dx\,dy$ za oba moguća poretka integracije.

856. Oblast D je trougao sa temenima $0\,(0,0)$; $A\,(1,0)$; $B\,(1,1)$.

857. Oblast D je paralelogram sa temenima $A\,(1,2)$; $B\,(2,4)$; $C\,(2,7)$; $D\,(1,5)$.

858. Oblast D je krug 1° $x^2+y^2<1$; 2° $x^2+y^2<x$.

859. Oblast D je kružni prsten $4<x^2+y^2<9$.

860. Oblast D je ograničena linijama $y=x$, $y=\sqrt{4x-x^2}$.

861. Oblast D je definisana nejednakošću $|x|+|y|<1$.

U sledećim zadacima promeniti poredak integracije:

862. $\iint_D z(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} z(x,y)\,dx.$

863. $\iint_D z(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{1} z(x,y)\,dy.$

864. $\int_{-1}^{1} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} z(x,y)\,dy.$ 865. $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} z(x,y)\,dy.$

866. $\int_0^a dx \int_x^{\sqrt{2ax-x^2}} z(x,y)\,dy.$ 867. $\int_{-2}^{2} dx \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}} z(x,y)\,dy.$

868. $\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} z(x,y)\,dx.$ 869. $\int_0^1 dx \int_0^{x^{2/3}} z(x,y)\,dx + \int_1^2 dx \int_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} z(x,y)\,dy.$

U dvojnom integralu $\iint_D z(x,y)\,dx\,dy$ preći na polarne koordinate φ i r i napisati granicu integracije za oba moguća slučaja.

870. Oblast D je: 1° krug $x^2+y^2<a^2$ 2° kružni prsten $a^2<x^2+y^2<b^2$.

871. Oblast D je krug $x^2+y^2<ax$ $(a>0)$.

872. Oblast D je ograničena krivom $r=1-\varphi^2$ $(r>0)$.

873. Oblast D je pravougaonik sa temenima $O(0,0)$; $A\,(1,0)$; $B\,(1,1)$; $C\,(0,1)$.

874. Oblast D je ograničena pravama $x=2$, $y=x$ i $y=x\sqrt{3}$.

875. Oblast D je ograničena krivom $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ $(x>0)$.

Pretpostavljajući da su φ i r polarne koordinate, izmeniti poredak integracije u sledećim primerima:

876. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} z(\varphi,r)\,dr.$ 877. $\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} z(\varphi,r)\,dr$ $(a>0)$,

878. $\int_0^a d\varphi \int_0^{\varphi} z(\varphi,r)\,dr$ $(0<a<2\pi)$.

Izračunati sledeće integrale:

879. $\iint_D xy^2\,dx\,dy$, ako je oblast integracije ograničena parabolom $y^2=2x$ i pravom $x=\frac{1}{2}$.

880. $\iint_D \frac{x}{y}\,dx\,dy$, ako je oblast D ograničena parabolama $y=x^2$ i $x=y^2$.

881. $\iint_D \frac{x}{2}\,dx\,dy$, ako je oblast D ograničena linijama $x=0$; $x=2+\sin y$; $y=0$; $y=2\pi$.

882. $\iint\limits_D 2y\,dx\,dy$, ako je oblast D ograničena linijama $y=\sqrt{x}$; $y=0$; $x+y=2$.

883. $\int\limits_0^1 \int\limits_{\sqrt{y}}^1 \frac{1}{x} e^{-\frac{y}{x}}\,dx\,dy$. 884. $\int\limits_0^a \int\limits_x^a e^{y^2}\,dx\,dy$.

885. $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, ako je D paralelogram sa stranama $y=x$; $y=x+a$; $y=a$; $y=3a$ $(a>0)$

886. $\iint\limits_D y^2\,dx\,dy$ ako je oblast D ograničena osom O_x i prvim svodom cikloide $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

887. $\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}\,dx\,dy$, ako je $0<x<1$, $0<y<1$.

888. $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{(x+y+1)^2}$, ako je $0<x<1$, $0<y<1$.

889. $\iint\limits_D x\sin(x+y)\,dx\,dy$, ako je $0<x<\pi$, $0<y<\frac{\pi}{2}$.

890. $\iint\limits_D x^2 y\,e^{xy}\,dx\,dy$, ako je $0<x<1$, $0<y<2$.

891. $\iint\limits_D x^2 y\cos(xy^2)\,dx\,dy$, ako je $0<x<\frac{\pi}{2}$, $0<y<2$.

892. $\iint\limits_D \cos(x+y)\,dx\,dy$, ako je oblast D ograničena pravama $x=0$, $y=\pi$, $y=x$.

893. $\iint\limits_{|x|+|y|\leq 1} x^2\,dx\,dy$.

894. $\iint\limits_D xy\,dx\,dy$, gde je oblast D ograničena linijama $xy=1$, $x+y=\frac{5}{2}$.

895. $\iint\limits_D (x+y)\,dx\,dy$ gde je oblast D ograničena linijama $y^2=2x$, $x+y=4$, $x+y=12$.

896. Izračunati $I(\alpha)=\iint\limits_D (x+y)^{-\alpha}\,dx\,dy$ po oblasti D definisanoj nejednačinama $x>0$, $y>0$, $0<a<x+y<1$ a zatim ustanoviti za koje će vrednosti parametra α postojati $\lim\limits_{a\to 0} I(\alpha)$ i naći tu graničnu vrednost.

897. Izračunati $I(a)=\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ gde je D trougao ograničen pravama $x=1$, $y=0$, $x=y+a$, $0<a<1$. Naći $\lim\limits_{a\to 0} I(a)$.

898. Izračunati $\iint\limits_D x^2 y\sqrt[3]{1-x^3-y^3}\,dx\,dy$ ako je oblast D definisana nejednačinama

$$x>0,\ y>0,\ x^3+y^3<1.$$

899. Pokazati da je $\iint\limits_D x^2\,dx\,dy=\iint\limits_D y^2\,dx\,dy=\frac{1}{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy=\frac{a^4\pi}{16}$ ako je oblast integracije definisana nejednačinom $x^2+y^2<a^2$ za $x>0$ i $y>0$.

Prelazeći na polarne koordinate izračunati sledeće integrale:

900. $\iint\limits_D xy\,dx\,dy$, gde je oblast D ograničena O_x osom i lukovima krugova $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2-2x=0$.

901. $\iint\limits_{x^2+y^2\leq 2ay} (x^2+y^2)\,dx\,dy$.

902. $\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$, ako je oblast integracije krug $x^2+y^2<a^2$.

903. $\iint\limits_{x^2+y^2\leq a^2} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$.

904. $\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$, gde je oblast integracije ograničena: 1° krugom $x^2+y^2=a^2$ i pravama $y=x$ i $y=x\sqrt{3}$; 2° krugom $x^2+y^2-ax=0$.

905. $\iint\limits_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dx\,dy$, ako je D oblast između krugova $x^2+y^2=1$ i $x^2+y^2=e^2$.

906. $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)(1+\sqrt[3]{x^2+y^2})}$, $D: x^2-y^2<0$, $x^2+y^2>1$, $x^2+y^2<4$.

907. $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$, gde je D oblast ograničena pravama

$$x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=1.$$

908. $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, gde je D oblast ograničena krugovima

$$x^2+y^2=\pi^2 \text{ i } x^2+y^2=4\pi^2.$$

909. $\iint\limits_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy$, gde je oblast D definisana nejednačinom $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1$.

910. $\iint\limits_D \sqrt{4-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}\,dx\,dy$, ako je oblast D ograničena linijama $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{(2a)^2}+\frac{y^2}{(2b)^2}=1$ i pripada prvom kvadrantu.

911. $\iint\limits_D \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\,dx\,dy$, ako je oblast D ograničena koordinatnim osama i krivom $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$.

912. $\iint\limits_D \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\,dx\,dy$, gde je D deo prstena $1<x^2+y^2<9$, $y>\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y<x\sqrt{3}$.

Naći srednju vrednost sledećih funkcija:

913. $z(x, y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, u oblasti određenoj nejednačinom $x^2+y^2<a^2$.

914. $z(x, y)=12-2x-3y$, u oblasti ograničenoj pravama $x=0$, $y=0$, $12-2x-3y=0$.

915. $z(x, y)=2x+y$, u oblasti ograničenoj pravama $x=0$, $y=0$, $x+y=3$.

916. $z(x, y)=\sin^2 x \sin^2 y$ u kvadratu: $0<x<\pi$, $0<y<\pi$.

Izračunati sledeće dvojne integrale:

917. $\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1}} |x-y|\,dx\,dy$.

918. $\iint\limits_D |xy|\,dx\,dy$ ako je oblast D definisana nejednačinom $x^2+y^2<a^2$.

919. $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} (|x|+|y|)\,dx\,dy$.

920. $\iint\limits_{\substack{|x|\le 1\\ 0\le y\le 2}} \sqrt{|y-x^2|}\,dx\,dy$.

921. $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|dx\,dy$.

922. $\iint\limits_D |\cos(x+y)|\,dx\,dy$ ako je oblast D definisana nejednakostima:

1° $0<x<\pi$, $0<y<\pi$; 2° $0\le x<\pi$, $0<y<x$.

Izračunati vrednost integrala:

923. $\iint\limits_D (y-x)\,dx\,dy$, ako je oblast ograničena pravama

$$y=x+1,\ y=x-3,\ y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{9},\ y=-\frac{1}{3}x+5$$

stavljajući $u=y-x$, $v=y+\frac{1}{3}x$.

924. $\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\ -1\le y\le 1}} x|y|\,dx\,dy$.

Uvodeći mesto x i y nove promenljive u i v odrediti granice integracije u sledećim dvojnim integralima:

925. $\int\limits_a^b dx \int\limits_{\alpha x}^{\beta x} z(x, y)\,dy$ $(0<a<b;\ 0<\alpha<\beta)$ stavljajući $u=x$, $v=\frac{y}{x}$.

926. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{1-x}^{2-x} z(x, y)\,dy$ stavljajući $u=x+y$, $v=x-y$.

927. $\iint\limits_D z(x, y)\,dx\,dy$, ako je oblast D ograničena linijama $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$, $x=0$, $y=0$ $(a>0)$ stavljajući $x=u\cos^4 v$, $y=u\sin^4 v$.

928. $\iint\limits_D z(x, y)\,dx\,dy$ gde je oblast D ograničena pravama $x=0$, $y=0$, $x+y=a$ stavljajući $x=\frac{u(a-v)}{a}$, $y=\frac{uv}{a}$.

929. Kako treba izvršiti zamenu promenljivih pa da se krivolinijski četvorougaonik, ograničen linijama $xy=1$, $xy=2$, $x-y+1=0$, $x-y-1=0$ $(x>0,\ y>0)$ preslika na pravougaonik čije su stranice paralelne koordinatnim osama.

930. U integralu $\iint\limits_D z(x, y)\,dx\,dy$ oblast integracije je četvrtina kruga $x^2+y^2<a^2$, $x>0$, $y>0$. 1°. Zamenom promenljivih preslikati tu oblast u pravougaonik; 2° u ravnokrako pravougli trougao.

Izračunati sledeće integrale:

931. $\iint\limits_{\substack{x^2+y^4\le 1\\ x\ge 0\ y\ge 0}} y^3\sqrt{1-x^2-y^4}\,dx\,dy$.

932. $\iint\limits_{x^4+y^4\le 1} (x^2+y^2)\,dx\,dy$.

933. $\iint\limits_D x^2y^2\sqrt{1-(x^3+y^3)}\,dx\,dy$ ako je oblast D određena nejednakostima $x^3+y^3>1$, $y>0$.

934. Dokazati da je $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^m x^n\,dx\,dy=0$ ako su m i n prirodni brojevi i bar jedan od njih neparan.

935. Naći $\lim\limits_{\varrho\to 0}\dfrac{1}{\pi\varrho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\varrho^2} z(x, y)\,dx\,dy$ gde je $z(x, y)$ neprekidna funkcija.

936. Ako je funkcija $\varphi(x)$ za $x<c$ neprekidna i pozitivna pokazati da je

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant c^2}\frac{a\varphi(x)+b\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}\,dx\,dy=\frac{(a+b)c^2\pi}{2}.$$

937. Naći $F'(t)$ ako je:

$$F(t)=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\ 0\leqslant y\leqslant t}} e^{\frac{tx}{y^2}}dx\,dy.$$

938. Ako je funkcija $z(x, y)$ neprekidna, dokazati da

$$u(x, y)=\frac{1}{2}\int\limits_0^x d\xi\int\limits_{\xi-x+y}^{x+y-\xi} z(\xi, \eta)\,d\eta$$

zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=z(x, y).$$

Ispitati konvergenciju sledećih nepravih integrala:

939. $\iint\limits_{|x|+|y|\geqslant 1}\dfrac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q}\quad(p>0,\ q>0).$ **940.** $\iint\limits_{x+y\geqslant 1}\dfrac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}\,dx\,dy.$

941. Pokazati da integral $\iint\limits_{x\geqslant 1,\ y\geqslant 1}\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$ divergira iako dvostruki integrali

$$\int\limits_1^\infty dx\int\limits_1^\infty\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\quad\text{i}\quad\int\limits_1^\infty dy\int\limits_1^\infty\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\ \text{konvergiraju.}$$

Izračunati sledeće neprave integrale:

942. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx\,dy}{1+x^2+y^2}.$ **943.** $\iint\limits_{y\geqslant x^2+1}\dfrac{dx\,dy}{x^4+y^2}.$

944. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}.$ **945.** $\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\dfrac{dx\,dy}{(a^2+x^2+y^2)^2}.$

946. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|-|y|}\,dx\,dy.$ **947.** $\iint\limits_{0\leqslant x\leqslant y} e^{-(x+y)}\,dx\,dy.$

948. $\int\limits_0^\infty dx\int\limits_x^\infty e^{-y^2}dy.$ **949.** $\int\limits_0^\infty dx\int\limits_{2x}^\infty x e^{-y}\dfrac{\sin y}{y^2}\,dy.$

950. $\iint\limits_D\dfrac{\operatorname{arc\,tg}(x+y)}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$ ako je oblast D definisana nejednakostima $x>0$, $y>0$, $x+y>1$.

951. $\iint\limits_D\dfrac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^a}\ (a\in R)$ gde je oblast D definisana nejednakošću $x^2+y^2<1$.

Pokazati koji od sledećih integrala uzeti po krugu $x^2+y^2<a^2$ konvergiraju:

952. $\iint\limits_D \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy.$ **953.** $\iint\limits_D\dfrac{e^{-x^2-y^2}}{x^2+y^2}\,dx\,dy.$

954. $\iint\limits_D\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\,dx\,dy.$ **955.** $\iint\limits_D\dfrac{\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dx\,dy.$

956. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$ **957.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)\,dx\,dy.$

958. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy.$

959. Može li se izabrati broj m tako da nepravi integral $\iint\dfrac{dx\,dy}{\sqrt{(x^2+y^2)^m}}$, uzet po celoj ravni xOy, konvergira?

§ 2. Izračunavanje površine

Površina oblasti D u ravni xOy, može se naći po formuli

$$P=\iint\limits_D dx\,dy.$$

Naći površine ograničene sledećim linijama:

960. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **961.** $x^2+y^2=2x,\ y=0,\ y=x.$

962. $xy=a^2,\quad x+y=\frac{5}{2}a\quad (a>0)$ **963.** $y=x^2,\quad x=y^2.$

964. $y=\sqrt{x},\quad y=2\sqrt{x},\quad y=4.$

965. $xy=a^2,\ xy=2a^2,\ y=x,\ y=2x\quad (x>0,\ y>0).$

966. $y^2=x+2,\ x=2$ **967.** $y=2x-x^2,\ y=x^2.$

968. $y=\frac{3}{x},\quad x^2+y^2=10$ **969.** $(x^2+y^2)^2=2ax^3\quad (a>0).$

970. $(x^2+y^2)^3=x^4+y^4$ **971.** $(x^2+y^2)^3=4x^2y^2.$

972. $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2);\quad x^2+y^2>a^2$ **973.** $(x^2+y^2)^5=x^2y^2.$

974. $(x^3+y^3)^2=x^2+y^2,\ x>0,\ y>0.$

975. $(x^2+y^2)^2=8a^2xy,\quad (x-a)^2+(y-a)^2<a^2.$

Uvodeći generalisane polarne koordinate r i φ po formulama

$$x=ar\cos^\alpha\varphi,\ y=br\sin^\alpha\varphi\quad (r>0),$$

gde su a, b i α podesno izabrane konstante i

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=\alpha\, abr\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi,$$

naći površinu ograničenu sledećim krivim linijama, pretpostavljajući da su parametri pozitivni:

976. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{h}+\frac{y}{k}$ **977.** $\frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2};\ x=0,\ y=0.$

978. $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1,\ x=0,\ y=0.$

Koristeći se podesnom zamenom promenljivih izračunati površinu ograničenu linijama:

979. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2=\frac{x}{a}-\frac{y}{a},\quad y>0.$ **980.** $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3=\frac{xy}{c^3};$ površinu petlje.

981. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)=\frac{xy}{c^2}.$ **982.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=\frac{x^2+y^2}{25}.$

983. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a},\ x+y=a\quad a>0.$

984. $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1;\quad \sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=2;\quad \frac{x}{a}=\frac{y}{b};\quad 4\frac{x}{a}=\frac{y}{b}\quad (a>0,\ b>0).$

985. $y^2=2px,\ y^2=2qx,\ x^2=2ry,\ x^2=2sy\quad (0<p<q;\quad 0<r<s).$

986. $x+y=a,\ x+y=b,\ y=\alpha x,\ y=\beta x\qquad a<b,\ \alpha<\beta.$

987. $xy=a^2,\ xy=b^2,\ y^2=nx,\ y^2=mx.$

988. $xy=a^2,\ xy=b^2,\ y^2=mx,\ x^2=ny\quad a>b,\ m>n.$

989. Naći površinu ograničenu elipsama $\frac{x^2}{\mathrm{ch}^2 u}+\frac{y^2}{\mathrm{sh}^2 u}=c^2$ $(u=u_1,\ u_2)$ i hiperbolama $\frac{x^2}{\cos^2 v}-\frac{y^2}{\sin^2 v}=c^2$ $(v=v_1,\ v_2)$ $(0<u_1<u_2;\ 0<v_1<v_2;\ x>0,\ y>0).$

990. Naći površinu preseka površi $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=a^2$ i ravni $x+y+z=0$

§ 3. Izračunavanje zapremine primenom dvojnog integrala

Zapremina cilindra, koji odozgo ograničava neprekidna površ definisana jednačinom $z=z(x,y)$, odozdo ravan $z=0$, a sa strane prava cilindrična površ, koja u ravni xOy iseca neku oblast D, data je formulom

$$V=\iint_D z(x,y)\,dx\,dy$$

Naći zapreminu tela ograničenog sledećim površima:

991. $z=1+x+y,\ x+y=1,\ x=0\quad y=0,\ z=0.$

992. Koordinatnim ravnima i ravnima

$$x=2,\ y=3,\ x+y+z=4.$$

993. $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=4,\ y=4$ i paraboloidom $z=x^2+y^2+1.$

994. Ravni $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ i koordinatnim ravnima.

995. Ravnima $y=0$, $z=0$, $3x+y=6$, $3x+2y=12$ i $x+y+z=6$.

996. Rotacionim paraboloidom $z=x^2+y^2$, koordinatnim ravnima i ravni $x+y=1$.

997. Rotacionim paraboloidom $z=x^2+y^2$ i ravnima $z=0$, $y=1$, $y=2x$, $y=6-x$.

998. Ravnima $z=0$, $y+z=2$ i cilindrom $y=x^2$.

999. Cilindrima $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$ i ravnima $z=0$, $x+z=6$.

1000. Koordinatnim ravnima, ravni $2x-3y-12=0$ i cilindrom $z=\frac{1}{2}y^2$.

1001. $z=\cos x\cos y$, $z=0$, $|x+y|<\frac{\pi}{2}$, $|x-y|<\frac{\pi}{2}$

1002. Površima $x^2+y^2=2x$, $xy=z$; $z>0$.

Prelazeći na polarne koordinate naći zapreminu tela, ograničenog sledećim površima:

1003. Paraboloidom $z=3-x^2-y^2$ i ravni $z=0$.

1004. Sferom $x^2+y^2+z^2=R^2$ i cilindrom $x^2+y^2=Rx$; $x^2+y^2<Rx$.

1005. Paraboloidom $z=x^2+y^2$ i cilindrima $x^2+y^2=x$, $x^2+y^2=2x$ i ravni $z=0$.

1006. Paraboloidom $x^2+y^2-az=0$, cilindrom $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ i ravni $z=0$ $(a>0)$.

1007. Ravnima $z=ax$, $z=0$ i cilindrom $x^2+y^2=2ax$.

1008. Paraboloidom $2az=x^2+y^2$ i sferom $x^2+y^2+z^2=3a^2$; $x^2+y^2<2az$.

1009. Elipsoidom $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

1010. Ravni $z=0$, paraboličkim cilindrom $y^2=2px$, ravni $x=a$ i površi $z=xy^2$.

1011. Prizmom čija je osnovica trougao sa temenima $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B\left(0,\frac{1}{2},0\right)$ a ivice paralelne z-osi i površi $z=x^2+y+1$ za $z>0$.

1012. Cilindrom $x^2+y^2-2x=0$ i površi $z=x^2y$, $z>0$.

1013. Eliptičkim cilindrom $4y^2+z^2=4$, koordinatnim ravnima i ravni $x+y+z=5$.

1014. Zajedničkog dela cilindara $x^2+z^2=R^2$, $x^2+y^2=R^2$.

1015. Paraboloidom $z=x^2+y^2$ i ravni $z=x+y$.

1016. $2(x^2+y^2)-z^2=0$, $x^2+y^2-z^2=-a^2$

1017. $x^2(a-y)^2+y^2z^2=y^2(a-y)^2$ $(a>0)$, $z=0$.

1018. $z^2=a^2(x^2+y^2)$, $x^2+y^2-bx=b\sqrt{x^2+y^2}$, $a, b>0$, $z>0$

1019. $y^2=x$, $y^2=4x$, $z=0$, $x+z=4$, $y>0$.

1020. $\left(\frac{x-a}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$, $z^2=x$.

1021. Data je kriva $x=a\cos^2u$, $y=a\sin u\cos u$, $z=a\sin u$ gde je $a>0$.

1° Pokazati da se ova kriva dobija kao presek sfere i cilindra čija je generatrisa paralelna z-osi i odrediti jednačinu tih površi.

2° Odrediti zapreminu ograničenu tom sferom, cilindrom i ravni $z=0$; $z>0$

Naći zapreminu tela ograničenu površima:

1022. $z=0$, $x+y=\frac{5}{2}$, $z=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{x}{y}$.

1023. $x^2+y^2+z^2=3a^2$, $x^2+y^2=2az$ $(z>0)$.

1024. $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=2y$, $z=x+2y$, $z=0$.

1025. $z=3+x^2+2y^2$, $y=2x^2-1$, $y=0$, $z=0$.

1026. $x^2+y^2=2az$, $(x^2+y^2)^2+2a^2xy=0$, $z=0$.

1027. Konusom $\frac{x^2+y^2}{2}=(z-\sqrt{2})^2$ i elipsoidom $\frac{x^2+y^2}{6}+\frac{z^2}{2}=1$

1028. $z=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)^2$; $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=x$, $z=0$.

1029. $x^2+y^2+z^2=2$; $x^2+y^2+z^2=6$; $x^2+z^2=x$ (manjeg dela).

1030. $x^2+y^2=cz$; $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$; $z=0$.

1031. $z^2=2xy$; $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$; $z=0$; $x>0$; $y>0$.

1032. $x^2+y^2+z^2=a^2$; $x^2+y^2>|ax|$.

1033. $z(x+y)=ax+by$; $z=0$; $1<x^2+y^2<4$; $x>0$; $y>0$; $a>0$; $b>0$.

1034. Dokazati da je zapremina tela ograničenog površima: $z=0$; $x^2+y^2=c^2$, $z[\varphi(x)+\varphi(y)]=a\varphi(x)+b\varphi(y)$, gde je $\varphi(x)$ proizvoljna pozitivna integralna funkcija $a>0$ i $b>0$ jednaka $\frac{1}{2}\pi c^2(a+b)$.

Pri rešavanju sledećih zadataka korisno je uvesti generalisane polarne koordinate po formulama.

$$x=ar\cos^\alpha\varphi\,;\ y=br\sin^\alpha\varphi \Rightarrow J=ab\,\alpha\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi.$$

Naći zapreminu ograničenu sledećim površima:

1035. $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad z=0.$

1036. $cz=xy,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=0,\ x>0,\ y>0.$

1037. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z}{c}=1,\ \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1,\ z=0,\ (a,\ b,\ c<0).$

1038. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=1.$ 1039. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^k+\frac{z^2}{c^2}=1;\ z>0,\ k>0.$

1040. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2};\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{h};\ >0.$

1041. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c},\quad \frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2},\ z=0.$ 1042. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z^4}{c^4}=1.$

1043. $\frac{x^n}{a^n}+\frac{y^n}{b^n}+\frac{z^n}{c^n}=1,\quad x=0,\ y=0,\ z=0,\quad (n>0).$

1044. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^n+\frac{z^{2n}}{c^{2n}}=\frac{z}{h}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^{n-2}\quad (n>1;\ a,\ b,\ c,\ h>0).$

1045. $z=x\sqrt{x}+y\sqrt{y},\ x+y=0;\ x>0;\ y>0;\ z>0.$

1046. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2=\frac{x}{a}\quad y>0;\ z>0.$

1047. $\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^3+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1.$

1048. $\left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^4+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1;\ x>0;\ y>0;\ z>0.$

1049. Dati su elipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ i paraboloid $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{x-\lambda}{\mu-\lambda}\cdot\frac{a^2-\mu^2}{a^2}$

gde je $-a<\lambda<\mu<a$. Pokazati da paraboloid deli zapreminu elipsoida na dva dela. Odrediti λ tako da one budu jednake.

Naći zapreminu ograničenu površima:

1050. $z=ye^{-\frac{xy}{a^2}};\ xy=a^2;\ xy=2a^2;\ y=m;\ y=n;\ z=0.$

1051. $z^2=xy,\ xy=a^2,\ xy=4a^2,\ x=2y,\ x=3y,\ z=0.$

1052. $z=xy,\ xy=1,\ xy=4,\ y^2=x,\ y^2=3x,\ z=0.$

1053. $z=x^2y,\ y^2=a^2-2ax,\ y^2=m^2+mx,\ y=0,\ z=0.$

§ 4. Izračunavanje površine površi

Ako je površ zadata jednačinom $z=z(x,y)$ onda je veličina površine data formulom

$$P=\iint\limits_D\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$$

gde je $p=z'_x,\ q=z'_y$, a D projekcija odgovarajućeg dela površi na ravan $z=0$.

Ako je površ zadata parametarskim jednačinama $x=x(u,v),\ y=y(u,v)$, gde $(u,v)\in D$, a D je neka zatvorena oblast i sem toga su funkcije x, y, z neprekidne i diferencijabilne u oblasti D onda je površina površi data formulom

$$P=\iint\limits_D\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv,$$

pri čemu je

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

1054. Izračunati površinu dela cilindra $z^2=4x$ koji pripada prvom oktantu, a koji isecaju cilindar $y^2=4x$ i ravan $x=1$.

1055. Izračunati površinu dela paraboloida $2z=x^2+y^2$ koji iseca cilindar $x^2+y^2=1$.

1056. Izračunati površinu dela sfere $x^2+y^2+z^2=a^2$ koji iseca cilindar $x^2+y^2=b^2\quad (b<a)$

1057. Naći površinu onog dela sfere $x^2+y^2+z^2=R^2$ koji se projektuje na ravan $z=0$ van kruga $x^2+y^2-Rx=0$, $(x>0)$, $(y>0)$.

1058. Naći površinu dela paraboloida $z^2=2xy$ $(z>0)$ koji je ograničen ravnima $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$.

1059. Izračunati površinu dela konusa $z^2=x^2+y^2$, isčenog cilindrom $x^2+y^2=2x$.

1060. Naći površinu dela sfere $x^2+y^2+z^2=a^2$ isčenog cilindrom

$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

1061. Date su površi

$$(p_1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{h},$$

$$(p_2)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}\quad (z\geqslant 0)$$

$$(p_3)\qquad z=0.$$

1° Izračunati zapreminu tela ograničenog ovim površima.

2° Za specijalan slučaj $a=b$ izračunati veličinu dela površi (P_1) ograničenog površima (P_2) i (P_3).

1062. Izračunati veličinu onog dela površi $z^2=x^2+2y^2$ koji iseca cilindar $(x^2+y^2)^2=2c^2xy$ za $x\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

1063. Naći površinu obrtne površi koja nastaje obrtanjem krive $z=f(x)$ u ravni $y=0$ oko Oz ose.

1064. Izračunati površinu obrtnog paraboloida $y^2+z^2=2px$ između vrha i ravni $x=\dfrac{p}{2}$.

1065. Naći kvadraturu zatvorene površi koju obrazuju kružni cilindri

$$x^2+y^2=a^2,\quad x^2+z^2=a^2.$$

1066. Naći površinu onog dela površi $z=xy$ koji iseca cilindar $x^2+y^2=R^2$.

1067. Izračunati površinu onog dela površi $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}=2z$ koji iseca eliptični cilindar $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

1068. Izračunati površinu dela površi $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ koji se projektuje u unutrašnjost krive $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

1069. Primenom dvojnog integrala izračunati površinu obrtnog elipsoida $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$.

1070. Izračunati površinu sfernog trougla.

1071. 1° Pokazati da za komplanaciju površi $x=\varphi(u)\cos\theta$, $y=\varphi(u)\sin\theta$, $z=z(u)$ $(\alpha<u<\beta,\ 0<\theta<2\pi)$ gde su $\varphi(u)\,\psi(u)$ diferencijalne funkcije važi obrazac

$$P=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}|\varphi(u)|\sqrt{\varphi'^2(u)+\psi'^2(u)}\,du.$$

2° Izračunati veličinu površi:

$$x=e^{-u}\cos\theta,\ y=e^{-u}\sin\theta,\ z=\int_0^u\sqrt{1-e^{-2t}}\,dt.$$

1072. Izračunati površinu tela ograničenog sferom $x^2+y^2+z^2=3a^2$ i paraboloidom $x^2+y^2=2az$, $(z>0)$.

1073. Naći površinu tela koje ograničavaju površi

$$x^2+y^2=2az,$$

$$(x^2+y^2)^2+2axy=0,$$

$$z=0.$$

1074. Izračunati površine P_1 i P_2 površi koje iseca konus $\dfrac{x^2+y^2}{2}=(z-\sqrt{2})^2$ na elipsoidu $\dfrac{x^2+y^2}{6}+\dfrac{z^2}{2}=1$.

1075. Izračunati površinu manjeg tela ograničenog površima

$$x^2+y^2+z^2=2,$$

$$x^2+y^2+z^2=6,$$

$$y^2+z^2=x.$$

1076. Naći površinu dela površi $z=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ koji isecaju površi $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$ i pripada prvom oktantu.

1077. Naći površinu dela konusa $y^2+z^2=x^2$ koji se nalazi unutar cilindra $x^2+y^2=a^2$.

1078. Naći površinu dela površi $z=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$ koji se projektuje na deo ravni $z=0$ ograničen Arhimedovom spiralom $r=\varphi$ i osom Ox.

1079. Izračunati površinu dela površi $x^2+y^2=z^2$ koji iseca cilindar

$(x^2+y^2)^2=2xy$, $z\geqslant 0$.

1080. Odrediti površinu ograničenu površima

$$(x\cos\alpha + y\sin\alpha)^2 + z^2 = a^2,\quad x>0,\ y>0,\ z>0.$$

Naći površinu koju ograničavaju površi:

1081. $(x+y)^2 + z = 1,\ x>0,\ y>0,\ z>0.$

1082. $(x^2+y^2)\,z = x+y$ za $1<x^2+y^2<4,\ x>0,\ y>0.$

1083. $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=2z$, unutar cilindra

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}.$$

1084. Naći veličinu površi

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2+y^2).$$

1085. Naći površinu prostornog ugla pod kojim se iz koordinatnog početka vidi pravougaonik $0<y<b,\ 0<z<c,\ x=a>0$. Drugim rečima, naći deo površine sfere $x^2+y^2+z^2=1$ na koju se iz koordinatnog početka projektuju tačke datog pravougaonika.

1086. Naći površinu i zapreminu tela ograničenog površima

$$x^2+y^2=\frac{1}{3}z^2,\quad x+y+z=2a\quad (a>0).$$

§ 5. Primena dvojnog integrala u mehanici

1° Težište. Ako su x_0 i y_0 koordinate težišta ravne ploče S, koja leži u ravni xOy, a $\varrho=\varrho(x,y)$ gustina ploče onda je

$$x_0=\frac{1}{m}\iint_S \varrho x\,dx\,dy,\quad y_0=\frac{1}{m}\iint_S \varrho y\,dx\,dy$$

gde je $m=\iint_S \varrho\,dx\,dy$ masa ploče. Integrali $\iint_S \varrho x\,dx\,dy$ i $\iint_S \varrho y\,dx\,dy$ nazivaju se *statični momenti inercije* u odnosu na ose Ox i Oy.

2° Momenti inercije. Moment inercije ravne ploče S u odnosu na proizvoljnu osu, koja leži u istoj ravni, naziva se integral $I=\iint_S \varrho d^2\,dx\,dy$ gde je d rastojanje promenljive tačke (x,y) od ose a ϱ gustina ploče. Specijalno momenti inercije u odnosu na ose Ox i Oy dati su respektivno formulama

$$I_x=\iint_S \varrho y^2\,dx\,dy\quad \text{i}\quad I_y=\iint_S \varrho x^2\,dx\,dy$$

Za $\varrho=1$ dobijaju se *geometrijski momenti inercije* ravne ploče.

Polarni moment inercije ploče S u odnosu na neku tačku naziva se integral $\iint_S \varrho d^2\,dx\,dy$, gde je d rastojanje tačke $(x,y)\in S$ od date tačke. Specijalno polarni moment u odnosu na koordinatni početak je $I=\iint_S \varrho(x^2+y^2)\,dx\,dy$.

3° Ako je u pitanju cilindrično telo čije su izvodnice paralelne osi Oz, a čija je osnovica neka oblast D u ravni xOy, i sem toga ga odozgo ograničava površ $z=z(x,y)$, onda se koordinate njegovog težišta mogu odrediti po formulama

$$x_0=\frac{\iint_D zx\,dx\,dy}{\iint_D z\,dx\,dy};\quad y_0=\frac{\iint_D yz\,dx\,dy}{\iint_D z\,dx\,dy};\quad z_0=\frac{\iint_D z^2\,dx\,dy}{2\iint_D z\,dx\,dy}.$$

1087. Naći masu kružnog prstena ako je u svakoj njegovoj tački površinska gustina obrnuto proporcionalna kvadratu rastojanja te tačke od centra prstena.

1088. Naći masu ploče, koja ima oblik elipse ako je površinska gustina u svakoj tački ploče proporcionalna rastojanju d od manje ose elipse a za $d=1$ iznosi λ.

1089. Odrediti težište ravnokrako pravouglog trougla, ako je u svakoj njegovoj tački površinska gustina proporcionalna njenom rastojanju od hipotenuze.

1090. Naći moment inercije trougla iz prethodnog zadatka u odnosu na njegovu hipotenuzu.

1091. Ploča je ograničena parabolom $y^2=2px$ i njenom sečicom koja prolazi kroz žižu parabole i normalna je na osu parabole. Naći masu ploče, ako je u svakoj njenoj tački površinska gustina obrnuto proporcionalna rastojanju tačke od direktrise parabole.

U sledećim zadacima odrediti statičke momente homogenih ravni figura (gustina $\varrho=1$):

1092. Pravougaonika sa stranicama a i b u odnosu na stranicu a.

1093. Polukruga u odnosu na prečnik.

1094. Kruga u odnosu na tangentu.

1095. Pravilnog šestougaonika u odnosu na stranicu.

1096. Dokazati da statički moment trougla čija je osnova a, u odnosu na tu osnovu, zavisi samo od visine trougla.

1097. Naći masu kvadratne ploče, u čijoj je svakoj tački površinska gustina proporcionalna zbiru njenih rastojanja od dijagonala.

1098. Izračunati količinu elektriciteta q raspoređenog na površini kruga $x^2+y^2=ax$, ako je površinska gustina elektriciteta $\mu=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

Naći momente inercije sledećih homogenih figura:

1099. Kruga poluprečnika a u odnosu na tangentu.

1100. Elipse u odnosu na centar.

1101. Pravougaonika sa stranicama a i b u odnosu na presek dijagonala.

1102. Ravnokrakog trougla čija je osnovica a i visina h u odnosu na temena.

1103. Kruga poluprečnika a u odnosu na tačke koje leže na njegovoj periferiji.

Naći težište sledećih homogenih figura:

1104. Polukruga poluprečnika a.

1105. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \quad y>0.$

1106. $x=a(t-\sin t); \quad y=a(1-\cos t); \quad 0<t<2\pi; \quad y=0.$

1107. $y^2=x^2-x^4, \quad (x>0).$ **1108.** $x^4+y^4=x^2y$; (desne petlje).

1109. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}; \; x=0; \; y=0.$

1110. $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)^4=\dfrac{xy}{ab}$; (desne petlje).

1111. Figure ograničene krivama $y=2x^3$ i $y^2=2x$.

1112. Figure ograničene krivom $y=\sin x$ i pravama $y=0$, $x=\dfrac{\pi}{4}$.

1113. Figure ograničene krivama $x^2+y^2=13$; $xy=6$, $x>0$.

1114. Kružnog isečka kome odgovara centralni ugao α.

1115. Kružnog odsečka kome odgovara centralni ugao α.

1116. Naći težište homogene zarubljene prizme, ograničene koordinatnim ravnima $x=1$; $y=1$; $x+y+z=4$.

1117. Naći težište homogene polulopte $x^2+y^2+z^2<a^2$; $\quad z>0$.

1118. Naći težište tetraedra koji je ograničen ravnima

$$x+2y+z=1; \quad x=0; \quad y=0; \quad z=0.$$

1119. Naći težište dela kruga ograničenog sferom $x^2+y^2+z^2=R^2$ i ravnima $x=a$, $y=b$.

1120. Odrediti silu pritiska vode na unutrašnju bočnu stranu $x>0$ cilindričnog suda $x^2+y^2=a^2$, $z=0$ ako je nivo vode $z=h$.

1121. Sfera poluprečnika a potapa se u tečnost konstantne gustine ϱ, na dubinu h (računato od centra sfere) gde je $h>a$. Naći silu pritiska tečnosti na donji i gornji deo površi sfere.

1122. Pravi kružni cilindar, čiji je poluprečnik osnove a i visina h, potapa se ceo u tečnost gustine ϱ, tako da se njegov centar nalazi na dubini h ispod površine vode, a osa cilindra zaklapa sa vertikalom ugao α. Odrediti silu pritiska tečnosti na donju i gornju osnovicu cilindra.

1123. Odrediti silu kojom homogeni cilindar $x^2+y^2<a^2$, $0<z<h$ privlači materijalnu tačku $P(0, 0, b)$ ako je masa cilindra M a masa tačke m.

1124. Dokazati da je moment inercije kružnog prstena u odnosu na centar dva puta veći od momenta inercije u odnosu na proizvoljnu osu, koja prolazi kroz centar prstena i leži u njegovoj ravni.

1125. Dokazati da je zbir momenata inercije ravne figure u odnosu na proizvoljni par uzajamno normalnih osa, koje leže u istoj ravni sa tom figurom i prolaze kroz nepokretnu tačku O, konstantna veličina.

1126. Dokazati da moment inercije ravni figure u odnosu na bilo koju osu iznosi Md^2+I_c gde je M masa raspoređena na figuri, d rastojanje od ose do težišta figure, a I_c moment inercije u odnosu na osu koja je paralelna datoj osi i prolazi kroz težište figure (Steinerova teorema).

1127. Dokazati da je zapremina tela, koje se dobija rotacijom figure F oko neke ose koja ne seče F, a leži u istoj ravni, jednaka površini S te figure pomnožene obimom kruga koji opisuje težište figure F. (Papus-Gouldinova teorema).

§ 6. Trojni i n-tostruki integrali

1° Izračunavanje trojnog integrala. Ako je funkcija $f(x,y,z)$ neprekidna u oblasti V određenoj nejednakostima

$$x_1<x<x_2; \quad y_1(x)<y<y_2(x); \quad z_1(x,y)<z<z_2(x,y)$$

gde su $y_1(x)$, $y_2(x)$, $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ neprekidne funkcije, onda trojni integral funkcije $f(x,y,z)$ uzet po oblasti V, može biti izračunat po formuli

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

2° Ako se pravilno zatvorena oblast V prostora $Oxyz$ uzajamno jednoznačno preslikava na oblast V' prostora $O'uvw$ pomoću neprekidnih diferencijalnih funkcija

$$x=x(u,v,w), \quad y=y(u,v,w), \quad z=z(u,v,w)$$

pri čemu je

$$J=\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\neq 0 \quad \text{za } (u,v,w)\in V'$$

onda važi formula

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_{V'} f[x(u,v,w),\,y(u,v,w),\,z(u,v,w)]\,|J|\,du\,dv\,dw.$$

Specijalni slučajevi su: 1) cilindrični sistem koordinata φ, r, h gde je

$$x=r\cos\varphi, \quad y=r\sin\varphi, \quad z=h$$

a

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\varphi,r,h)}=r$$

i 2) sferni sistem koordinata $\varphi,\ \theta,\ r$ gde je

$$x=r\cos\varphi\sin\theta, \quad y=r\sin\varphi\sin\theta, \quad z=r\cos\theta$$

a

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\varphi,\theta,r)}=r^2\sin\theta.$$

3° Srednja vrednost μ funkcije $f(x,y,z)$ u oblasti V data je formulom

$$\mu=\frac{1}{V}\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

4° Pojam nepravog trojnog integrala prekidne funkcije potpuno je analogan tom istom pojmu u slučaju dvojnog integrala.

5° Ako je funkcija $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ neprekidna u nekoj ograničenoj oblasti Ω, definisanom nejednakostima

$$x_1'<x_1<x_1'',$$

$$x_2'(x_1)<x_2<x_2''(x_1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n'(x_1,x_2,\ldots x_{n-1})<x_n<x_n''(x_1,x_2,\ldots x_{n-1})$$

gde su x_1' i x_1'' brojevi a $x_2'(x_1)$, $x_2''(x_1), \ldots, x_n'(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, $x_n''(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ neprekidne funkcije, onda odgovarajući višestruki integral može biti izračunat po formuli

$$\iint\cdots\int_\Omega f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n=$$

$$=\int_{x_1'}^{x_1''}dx_1\int_{x_2'(x_1)}^{x_2''(x_1)}dx_2\ldots\int_{x_n'(x_1,\ldots x_{n-1})}^{x_n''(x_1,\ldots x_{n-1})}f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_n.$$

Zamena promenljivih kod višestrukog integrala može se izvesti po analogiji zamene promenljivih kod dvojnog i trojnog integrala.

Izračunati sledeće trojne integrale

1128. $\int_0^1 dx\int_0^2 dy\int_0^3 dz.$

1129. $\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1 dy\int_0^2 (4+z)\,dz$ i konstruisati oblast integracije.

1130. $\int_0^a dx\int_0^x dy\int_0^y xyz\,dz.$ **1131.** $\int_0^a dx\int_0^x dy\int_0^{xy} x^3y^2z\,dz.$

1132. $\iiint_V (1-x)yz\,dx\,dy\,dz$ ako je oblast V ograničena ravnima $x=0$, $z=0$, $y=0$, $z=1-x-y$.

1133. $\iiint_V (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$ ako je oblast V ograničena ravnima $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$.

1134. $\int_0^{e-1} dx\int_0^{e-x-1} dy\int_e^{x+y+e}\frac{\ln(z-x-y)}{(x-e)(x+y-e)}\,dz.$

1135. $\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$ ako je oblast V ograničena površi $3(x^2+y^2)+z^2=3a^2$.

1136. $\iiint y\,dx\,dy\,dz$ ako je oblast V ograničena površima

$$y=\sqrt{x^2+z^2}, \quad y=h, \quad h>0.$$

1137. $\iiint_V y\cos(z+x)\,dx\,dy\,dz$ gde je oblast V ograničena cilindrom $y=\sqrt{x}$ i ravnima $y=0$, $z=0$, $x+z=\frac{\pi}{2}$.

1138. $\iiint_V\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dx\,dy\,dz$ gde je oblast V ograničena elipsoidom $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

1139. $\iiint_V\left[(x+y+z)^2-\frac{9}{5}a^2\right]dx\,dy\,dz$ gde je oblast V definisana nejednakostima $x^2+y^2-2az<0$, $x^2+y^2+z^2-3a^2<0$, $a>0$.

1140. $J=\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{(z+a)^2-x^2-y^2}$ gde je oblast V ograničena površima

$z=\frac{1}{2a}(x^2+y^2), \quad z=b, \quad a>0, \quad b>0.$

Naći $\lim\limits_{b\to\infty}\frac{J}{b}$.

1141. $\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}$ gde je oblast V ograničena površima $x+y+z=1$, $x=0,\ y=0,\ z=0$.

1142. $\iiint \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$ gde je oblast V ograničena površima

$$x^2+y^2=z^2, \quad z=1.$$

1143. $\iiint\limits_V \frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)\,dx\,dy\,dz}{x^2+y^2+z^2+1}$ ako je oblast V unutrašnjost sfere $x^2+y^2+z^2=1$.

1144. $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$ ako je oblast V ograničena površima

$$y^2+z^2=x^2, \quad x^2+y^2+z^2=R^2, \quad x>0 \quad \text{(zajednički deo).}$$

1145. $\iiint\limits_V \frac{xz\,dx\,dy\,dz}{x^2+y^2-R^2}, \quad z^2=\frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2), \quad z=h, \quad x>0, \quad y>0.$

U sledećim zadacima odrediti granice integracije trojnog integrala u Dekartovim, cilindričnim i sferičnim koordinatama ako je oblast data sa:

1146. $x>0,\ y>0,\ z>0;\quad x+y<a,\ z<h.$

1147. $x>0,\ y>0,\ z>0;\quad x+y+z<a.$

1148. $x^2+y^2+z^2<a^2;\quad x^2+y^2<z^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha.$

1149. $x^2+y^2<z^2;\quad x^2+z^2<a^2;\quad z>0.$

U sledećim zadacima na različite načine napisati granice integracije:

1150. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} dy\int\limits_0^{x+y} f(x,y,z)\,dz.$ **1151.** $\int\limits_{-1}^{1} dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)\,dz.$

1152. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz.$

Prelaskom na sferne koordinate izračunati sledeće trojne integrale:

1153. $\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$ gde je oblast integracije ograničena: 1° sferom $x^2+y^2+z^2=1$; 2° cilindrom $x^2+y^2<1$, $-1<z<1$.

1154. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$ gde je oblast V ograničena sferom $x^2+y^2+z^2=z$.

1155. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2\,dz.$

1156. Prelazeći na cilindrične koordinate izračunati integral

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz,$$

ako je oblast V ograničena površima $x^2+y^2=2z$, $z=2$.

1157. Uvodeći generalisane sferne koordinate izračunati integral

$$\iiint\limits_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dx\,dy\,dz,$$

gde je V unutrašnjost elipsoida $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

1158. Odrediti srednju vrednost funkcije

$$f(x,y,z)=e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}$$

u unutrašnjosti elipsoida $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

1159. Naći srednju vrednost funkcije $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ u oblasti $x^2+y^2+z^2<x+y+z$.

1160. Izračunati integral

$$\iiint\limits_D e^{xyz}x^2y\,dx\,dy\,dz$$

$x>0$, $y>1$, $z>1$, $xyz<1$, uvodeći nove promenljive

$$x=u, \quad y=\frac{u+v}{u}, \quad z=\frac{u+v+w}{u+v}.$$

Prelazeći na cilindrične ili na sferne koordinate izračunati sledeće integrale:

1161. $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^a dz.$ **1162.** $\displaystyle\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\, dz.$

1163. $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dz.$

1164. $\displaystyle\iiint_V (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz$ gde je oblast V definisana nejednakostima

$$z>0,\ a^2<x^2+y^2+z^2<R^2.$$

1165. Neka je $f(u)$ diferencijabilna funkcija za svako $u>0$ i neka je

$$\iiint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant t^2} f\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) dx\, dy dz=0.$$

za svako $t>0$. Dokazati da je $f(u)=0$ za svako $u>0$. Da li se uslovi funkcije $f(u)$ mogu oslabiti pa da tvrđenje ostane i dalje tačno?

Izračunati sledeće neprave integrale:

1166. $\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{(1+x+y+z)^7}}.$ **1167.** $\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{xy\, dx\, dy\, dz}{(1+x^2+y^2+z^2)^3}.$

1168. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2-y^2-z^2}\, dx\, dy\, dz.$

Ispitati konvergenciju sledećih nepravih integrala

1169. $\displaystyle\iiint_V e^{x+y+z}\, dx\, dy\, dz,$ 1° za $x>0,\ y>0,\ z>0$; 2° za $x<0,\ y<0,\ z<0$.

1170. $\displaystyle\iiint_V \frac{dx\, dy\, dz}{(xyz)^\alpha}$; po sferi poluprečnika 1 sa centrom u koordinatnom početku.

Ispitati da li konvergiraju sledeći integrali ako je oblast integracije definisana nejednačinom $x^2+y^2+z^2<R^2$.

1171. $\displaystyle\iiint_V \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}\, \ln\sqrt[\alpha]{x^2+y^2+z^2}}.$

1172. $\displaystyle\iiint_V \frac{\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz.$ **1173.** $\displaystyle\iiint_V \frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^3}\, dx\, dy\, dz.$

1174. Izračunati integral $\displaystyle\iiint_V \ln(x^2+y^2+z^2)\, dx\, dy\, dz$ gde je V sfera poluprečnika R sa centrom u koordinatnom početku.

1175. Ispitati konvergenciju integrala

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} \frac{\varphi(x, y, z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}\, dx\, dy\, dz.$$

gde je $0<m<|\varphi(x, y, z)|<M$.

Izračunati integrale:

1176. $\displaystyle\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{dx\, dy\, dz}{x^p y^q z^r}.$

1177. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-(x^2+y^2+z^2)}\, dx\, dy\, dz.$

Izračunati sledeće integrale:

1178. $\displaystyle\iint\cdots\int dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$, ako je $x_k>0$

$$(k=1, 2\ldots n)\quad \text{i}\quad x_1+x_2+\cdots x_n<1.$$

1179. $\displaystyle\iint\cdots\int x_1\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$ za $x_k>0$ i $x_1+x_2+\cdots x_n<1$.

1180. $\displaystyle\iint\limits_{|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|<a}\cdots\int dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$

1181. $\displaystyle\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 (x_1^2+x_2^2+\cdots x_n^2)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$

1182. $\displaystyle\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 (x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n.$

1183. Dokazati jednakost

$$u_n(a)=a^n v_n$$

gde je

$$u_n(a)=\iint\limits_{x_1^2+x_2^2+\cdots x_n<a}\cdots\int dx_1\, dx_2\cdots dx_n,\quad v_n=u_n(1)$$

Dokazati jednakosti:

1184. $\int\limits_0^x dx \int\limits_0^{x_1} dx_2 \cdots \int\limits_0^{x_{n-1}} f(x_n)\,dx_n = \int\limits_0^x f(t)\cdot\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt.$

1185. $\int\limits_0^x x_1\,dx_1 \int\limits_0^{x_1} x_2\,dx_2 \ldots \int\limits_0^{x_{n-1}} x_n\,dx_n \int\limits_0^{x_n} f(t)\,dt = \frac{1}{2\cdot 4\ldots 2n}\int\limits_0^x f(t)(x^2-t^2)^n\,dt.$

§ 7. Izračunavanje zapremine primenom trojnog integrala

Zapremina oblasti V izračunava se po formuli

$$V=\iiint\limits_V dx\,dy\,dz$$

Naći zapreminu tela ograničenu površima:

1186. $z=x^2+y^2,\quad z=2x^2+2y^2,\quad y=x,\quad y=x^2.$

1187. $x=0,\quad x=1,\quad y=0,\quad y=1-x,\quad z=x+y,\quad z=xy.$

1188. $x^2+z^2=a^2,\quad x+y=\pm a,\quad x-y=\pm a.$

1189. $az=a^2-x^2-y^2,\quad z=a-x-y\qquad a>0).$

1190. Cilindrima $z=4-y^2,\quad z=y^2+2$ i ravnima $x=-1,\quad x=2.$

1191. $z=0,\quad x^2+y^2=4az,\quad x^2+y^2=2cx.$

1192. Cilindrima $z=\ln(x+2)$ i $z=\ln(6-x)$ i ravnima $x=0,\quad x+y=0$ $x-y=2.$

1193. Paraboloidom $(x-1)^2+y^2=z$ i ravni $2x+z=2.$

Prelazeći na cilindrične koordinate izračunati zapremine ograničene površima:

1194. Paraboloidom $z=6-x^2-y^2$ i konusom $z^2=x^2+y^2\qquad (z>0).$

1195. Sferom $x^2+y^2+z^2=4$ i paraboloidom $x^2+y^2=3z.$

1196. $(x^2+y^2)^{3/2}=z,\quad z=8,\quad z>0.$

Koristeći generalisane cilindrične koordinate izračunati zapreminu ograničenu površima:

1197. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$ 1198. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z^2}{c^4}=1.$

Izračunati zapremine tela ograničene sledećim površima:

1199. Sferom $x^2+y^2+z^2=R^2$ i paraboloidom $x^2+y^2=R(R-2z);\qquad (z\geqslant 0).$

1200. Paraboloidom $z=x^2+y^2$ i konusom $z^2=xy.$

1201. $0<x<1,\quad 0<y<1,\quad x^2+y^2\geqslant 1,\quad 0<z<(x^2+y^2)^3.$

1202. Sferom $x^2+y^2+z^2=4Rz-3R^2$ i konusom $z^2=4(x^2+y^2).$

(Deo sfere u unutrašnjosti konusa).

1203. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}.$

Prelazeći na sferne koordinate izračunati zapremine ograničene površima:

1204. $x^2+y^2+z^2=2az;\quad x^2+y^2<z^2.$

1205. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2).$

1206. Zatvorenom površi $(x^2+y^2+z^2)^3=3xyz.$

1207. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3x.$ 1208. $((x^2+y^2-z^2)^3=a^3z^4.$

1209. $(x^2+y^2+z^2)^3=\frac{a^6z^2}{x^2+y^2}.$ 1210. $(x^2+y^2+z^2)^3=a^2y^2z^2.$

1211. $(x^2+y^2+z^2)^3=a^3(x^3+y^3+z^3);\quad x>0;\quad y>0;\quad z>0.$

1212. $(x^2+y^2+z^2)^5=(a^3x^2+b^3y^2+c^3z^2)^2.$

1213. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z\,e^{-\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}}.$ 1214. $(x^2+y^2)^2+z^4=a^3(x-y).$

1215. Naći geometrijsko mesto S ortogonalnih projekcija centra elipsoida $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ na njegove tangentne ravni.

Za slučaj $a=b=c\sqrt{2}$ izračunati zapreminu tela koje ograničava površ S.

Koristeći generalisane sferne koordinate naći zapremine ograničene površima:

1216. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x}{h}\quad h>0.$ 1217. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=x.$

1218. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=xyz.$ 1219. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}.$

1220. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\alpha^2\right)^2=4\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right); \quad \alpha^2<1.$

1221. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{z}{h}\,e^{-\frac{\frac{z^2}{c^2}}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}.$

U sledećim zadacima zgodno je koristiti generalisane polarne koordinate uvedene formulama

$x=ar\cos^\alpha\varphi\sin^\beta\theta, \quad y=br\sin^\alpha\varphi\sin^\beta\theta, \quad z=cr\cos^\beta\theta, \quad (a, b, c, \alpha, \beta\in R),$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)}=\alpha\beta abc\,r^2\cos^{\alpha-1}\cdot\sin^{\alpha-1}\varphi\cdot\sin^{2\beta-1}\theta\cdot\cos^{\beta-1}\theta.$$

Naći zapremine ograničene površima:

1222. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{z}{e} \qquad x>0, \quad y>0, \quad z>0.$

1223. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x}{h}+\frac{y}{k}; \quad x>0, \quad y>0, \quad z>0.$

1224. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x}{h}-\frac{y}{k}; \quad x>0, \quad y>0, \quad z>0.$

1225. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c}=\frac{x}{h}-\frac{y}{k}; \quad x>0, \quad y>0, \quad z>0.$

1226. $\frac{x^m}{a^m}+\frac{y^n}{b^n}+\frac{z^p}{c^p}=1.$

1227. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^3=\ln\frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}; \quad x>0; \quad y>0; \quad z>0.$

1228. $\sqrt[3]{\frac{x}{a}}+\sqrt[3]{\frac{y}{b}}+\sqrt[3]{\frac{z}{c}}=1; \quad x>0; \quad y>0; \quad z>0.$

Podesnom zamenom promenljivih izračunati zapremine ograničene površima:

1229. $x+y+z=a, \quad x+y+z=2a, \quad x+y=z, \quad x+y=2z, \quad y=x, \quad y=3x.$

1230. $(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2+(a_3x+b_3y+c_3z)^2=1.$

Izračunati zapremine tela ograničenih površima:

1231. $x^2+y^2+z^2<4az, \quad x^2+y^2+az=4a^2.$

1232. $x^2+z^2=a^2, \quad z^2+x^2=b^2, \quad x^2-y^2-z^2=0 \qquad (a\neq b; \; x>0.$

1233. Naći zapreminu i površinu tela ograničenog površima

$x^2+y^2=az, \quad z=2a-\sqrt{x^2+y^2} \qquad (a>0).$

§ 8. Primena trojnog integrala u mehanici

1° M a s a t e l a. Ako telo zauzima oblast V i ako je $\varrho=\varrho(x,y,z)$ njegova gustina u tački (x,y,z), onda se *masa* tela izračunava po obrascu

$$m=\iiint_V \varrho\,dx\,dy\,dz.$$

2° T e ž i š t e t e l a. *Koordinate težišta* (x_0, y_0, z_0) tela izračunavaju se po formulama

$$x_0=\frac{1}{m}\iiint_V \varrho x\,dx\,dy\,dz$$

$$y_0=\frac{1}{m}\iiint_V \varrho y\,dx\,dy\,dz$$

$$z_0=\frac{1}{m}\iiint_V \varrho z\,dx\,dy\,dz.$$

Ako je telo homogeno onda se uzima da je $\varrho=1$.

3° M o m e n t i i n e r c i j e. *Momenti inercije tela u odnosu na koordinatne ravni* nazivaju se respektivno integrali

$$I_{zy}=\iiint_V \varrho z^2\,dx\,dy\,dz, \quad I_{yz}=\iiint_V \varrho x^2\,dx\,dy\,dz, \quad I_{zx}=\iiint_V \varrho y^2\,dx\,dy\,dz.$$

Moment inercije tela u odnosu na neku osu l naziva se integral

$$I_l=\iiint_V \varrho d^2\,dx\,dy\,dz$$

gde je d rastojanje promenljive tačke (x, y, z) od ose l. U specijalnom slučaju za koordinatne ose Ox, Oy, i Oz respektivno će biti:

$$I_x=I_{xy}+I_{zx}; \quad I_y=I_{yx}+I_{yz}; \quad I_z=I_{zx}+I_{zy}.$$

Moment inercije tela u odnosu na koordinatni početak naziva se integral

$$I_0=\iiint_V \varrho(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Očigledno je

$$I_0=I_{zy}+I_{yz}+I_{zx}$$

4° P o t e n c i j a l g r a v i t a c i o n o g p o l j a. *Newtonov potencijal tela* u tački $P(x, y, z)$ naziva se integral

$$u(x,y,z)=\iiint_V \varrho(\xi,\eta,\zeta)\frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{r}$$

gde je V zapremina tela, $\varrho=\varrho(\xi,\eta,\zeta)$ njegova gustina, a

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}.$$

Projekcije X, Y, Z sile kojom telo privlači materijalnu tačku mase m na koordinatne ose Ox, Oy, Oz iznose respektivno:

$$X=km\frac{\partial u}{\partial x}=km\iiint_V \varrho\frac{\xi-x}{r^3}\,dx\,dy\,dz,$$

$$Y=km\frac{\partial u}{\partial y}=m\iiint_V \varrho\frac{\eta-y}{r^3}\,dx\,dy\,dz,$$

$$Z=km\frac{\partial u}{\partial z}=m\iiint_V \varrho\frac{\zeta-z}{r^3}\,dx\,dy\,dz.$$

gde je k gravitaciona konstanta.

1234. Naći masu tela koje ograničava cilindrična površ $x^2=2y$ i ravni $x+z=1$, $2y+z=2$, ako je u svakoj njegovoj tački prostorna gustina brojno jednaka ordinati te tačke.

1235. Naći masu koja je u svakoj njenoj tački gustina brojno jednaka zbiru rastojanja te tačke od triju ivica te kocke, koje prolaze kroz jedno dato teme kocke.

1236. Naći masu tela ograničenog ravnima $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$ ako je njegova gustina $\varrho=x+y=z$.

Naći masu sledećih tela:

1237. Cilindra poluprečnika R i visine h, ako se gustina raspodele mase menja proporcionalno sa visinom a iznosi 1 na donjem bazisu.

1238. Sfere $x^2+y^2+z^2=2x$, ako je gustina mase jednaka rastojanju od koordinatnog početka.

1239. Konusa visine h i poluprečnika osnove R, ako je gustina proporcionalna rastojanju od vrha.

1240. Prstena ograničenog krugovima poluprečnika R i r $(R>r)$ ako je gustina rasporeda mase proporcionalna rastojanju od centra.

1241. Pravougaonika sa stranicama a i b, ako je gustina rasporeda mase proporcionalna kvadratu rastojanja od jednog njegovog temena.

1242. Zajedničkog dela sfera $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ i $x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rx$, ako je gustina u svakoj tački proporcionalna njenom rastojanju od ravni xOy.

1243. Beskonačne oblasti $x^2+y^2+z^2>1$, ako se gustina tela menja po zakonu $\varrho=\varrho_0 e^{-k\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, gde je $\varrho_0>0$ i $k>0$.

Naći težište sledećih tela:

1244. Homogenog tela koje je ograničeno paraboloidom $z=3-x^2-y^2$ i ravni $z=0$ $(z>0)$.

1245. Ograničenog paraboloidom $z=x^2+y^2$ i ravnima $x+y=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(\varrho=1)$.

1246. Segmenta sfere, ako je u svakoj njegovoj tački gustina proporcionalna rastojanju te tačke od osnove segmenta.

1247. Ograničenog paraboloidom $c(x^2+y^2)=2a^2z$ i konusom

$$c^2(x+y^2)=a^2z^2; \qquad (\varrho=1).$$

1248. Dela elipsoida $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ koji pripada prvom oktantu: $(\varrho=1)$.

1249. Polovine sfere $0\leqslant z\leqslant\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ čija je prostorna gustina u svakoj tački brojno jednaka njenom rastojanju od centra sfere.

Naći težište sledećih homogenih tela:

1250. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=ax$. **1251.** $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3x$.

1252. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$; $z\geqslant 0$.

1253. $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}}=1$; $x>0$, $y>0$, $z>0$.

1254. Naći težište tela ograničenog površima $x^2+y^2=R^2=x^2+y^2=a^2$ $(a<R)$, $\frac{y}{R}+\frac{2z}{H}=1$, $z=0$, i moment inercije u odnosu na njegovu osovinu.

1255. Nehomogeno telo ograničeno je ravnima $x=2$, $y=0$, $y=1$, $z=0$ i cilindrom $z^2=6x$. Prostorna gustina materije u svakoj njegovoj tački proporcionalna je njenom rastojanju od ravni xOy. Naći moment inercije toga tela u odnosu na osu Oz.

1256. Naći polarni moment inercije (u odnosu na koordinatni početak) homogenog tela, ograničenog konusom $z^2=x^2-y^2$ i sferom $x^2+y^2+z^2=R^2$.

1257. Naći masu cilindra $x^2+y^2<a^2$, $0<z<h$ i njegov moment inercije u odnosu na prečnik osnove, ako je gustina u svakoj tački cilindra proporcionalna kvadratu njenog rastojanja od ose cilindra.

Naći moment inercije u odnosu na osu Oz tela ograničenih površima:

1258. $h^2(x^2+y^2)=a^2z^2$; $0<z<h$.

1259. $x+y+z=a\sqrt{2}$, $x^2+y^2=a^2$, $z=0$.

1260. $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}}=1$.

1261. Naći moment inercije torusa $x=(a+r\cos\theta)\cos\varphi$, $y=(a+r\cos\theta)\sin\varphi$, $z=r\sin\theta$ u odnosu na njegovu osu rotacije.

1262. Naći moment inercije eliptičnog konusa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{h^2}$, $z=h$ u odnosu na osu Ox.

1263. Izraziti u obliku integrala silu kojom homogena kocka ivice a privlači jedinicu mase, koja se nalazi na rastojanju b od centra jedne strane kocke.

1264. Naći silu kojom jedinicu mase, koja se nalazi u centru osnove cilindra poluprečnika R i visine h, privlači taj cilindar.

1265. Naći silu kojom jedinicu mase privlači cela ravan, ako se ta masa nalazi na rastojanju h od te ravni.

1266. Dokazati da je Newtonova sila uzajamnog dejstva između dve homogene sfere ista, kao kad bi mase sfera bile skoncentrisane u njihovim centrima.

1267. Naći Newtonov potencijal u tački $P(x, y, z)$ homogene sfere $\xi^2+\eta^2+\zeta^2<R^2$ gustine ϱ_0.

1268. Naći Newtonov potencijal u tački $P(x, y, z)$ sfernog sloja $R_1^2<\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R_2^2$, ako je gustina $\varrho=f(R)$, gde je f data funkcija a

$$R=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}.$$

1269. Naći Newtonov potencijal u tački $P(0, 0, z)$ cilindra $\xi^2+\eta^2\leqslant a^2$, $0<\zeta<h$ konstantne gustine ϱ_0.

§ 9. Krivolinijski integral

1° Ako je $f(x, y, z)$ definisana i neprekidna funkcija u svim tačkama deo po deo glatke krive $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ (1) $(t_0\leqslant t\leqslant T)$, a ds diferencijal luka, onda se krivolinijski integral prve vrste izračunava po formuli

$$\int_c f(x, y, z)\,ds=\int_{t_0}^{T}[x(t), y(t), z(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt.$$

Ovaj integral ima osobinu da ne zavisi od orijentacije krive.

2° Ako su funkcije $P=P(x, y, z)$, $Q=Q(x, y, z)$, $R=R(x, y, z)$ neprekidne u svakoj tački $M(t)$ krive (1), koja se pomera u smeru rašćenja parametra t, onda se krivolinijski integral druge vrste izračunava po formuli

$$\int_c P(x, y, z)\,dx+Q(x, y, z)\,dy+R(x, y, z)\,dz=$$

$$=\int_{t_0}^{T}\{P[x(t), y(t), z(t)]x'(t)+Q[x(t), y(t), z(t)]y'(t)+R[x(t), y(t), z(t)]z'(t)\}\,dt.$$

Pri promeni smera integracije duž krive c ovaj integral menja znak.

3° Ako je

$$P(x, y, z)\,dx+Q(x, y, z)\,dy+R(x, y, z)\,dz=du$$

gde je $u=u(x, y, z)$ jednoznačna funkcija u oblasti V, ona će nezavisno od krive c koja pripada oblasti V, biti

$$\int_c P\,dx+Q\,dy+R\,dz=u(x_2, y_2, z_2)-u(x_1, y_1, z_1)$$

gde su (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_2) respektivno početna i krajnja tačka putanje integracije u specijalnom slučaju, kada je oblast V jednostruko povezana a funkcije P, Q i R imaju neprekidne parcijalne izvode prvog reda, onda je radi toga potrebno i dovoljno, da u oblasti budu ispunjeni sledeći uslovi

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}.$$

U tom slučaju funkcija u može biti nađena po formuli

$$u(x, y, z)=\int_{x_0}^{x}P(x, y, z)\,dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0, y, z)\,dy+\int_{z_0}^{z}R(x_0, y_0, z)\,dz$$

gde je (x_0, y_0, z_0) neka fiksirana tačka oblasti V.

4° Ako se prosto zatvorena, deo po deo glatka kriva c, koja ograničava konačnu jednostruko povezanu oblast D, obilazi tako da oblast D ostaje s leve strane, a funkcije P, i R neprekidne zajedno sa svojim parcijalnim izvodima prvog reda u oblasti D i na njenom rubu, onda važi *Greenova formula*

$$\oint_c P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

Ova formula važi takođe i za konačnu oblast D, koja je ograničena sa nekoliko prostih kontura, ako se pod njenom konturom c podrazumeva unija svih graničnih kontura, pri čemu se obilazak po konturama izvodi tako da oblast D uvek ostaje s leve strane.

Izračunati sledeće krivolinijske integrale:

1270. $\int_c x\,ds$, ako je c deo prave $y=x$, između tačaka $(0, 0)$ i $(1, 1)$.

1271. $\int_c y^2\,ds$, gde je c gornja polovina kruga $x^2+y^2=a^2$ između tačaka $(a, 0)$ i $(-a, 0)$.

1272. $\int_c y\,ds$, po luku parabole $y^2=2x$ od tačke $(0, 0)$ do tačke $(4, \sqrt{8})$.

1273. $\int_c \sqrt{2y}\,ds$, gde je c prvi svod cikloide $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

1274. $\int\limits_c y e^{-x}\,ds$, gde je c luk krive $x=\ln(1+t^2)$, $y=2\,\mathrm{arctg}\,t-t+3$ između tačaka $t=0$ i $t=1$.

1275. $\int\limits_c \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2}}$, gde je c odsečak prave $y=\frac{x}{2}-2$ između tačaka $(0,-2)$ i $(4, 0)$.

1276. $\oint\limits_c xy\,ds$, gde je c kontura pravougaonika koji određuju prave $x=0$, $y=0$, $x=4$ i $y=2$.

1277. $\int\limits_c (x+y)\,ds$, ako je c kontura trougla $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$.

1278. $\int\limits_c \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, ako je c krug $x^2+y^2=ax$.

1279. $\int\limits_c \frac{ds}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, ako je c luk hiperboličke spirale $r\varphi=1$ od $\varphi=\sqrt{3}$ do $\varphi=2\sqrt{2}$.

1280. $\int\limits_c y^2\,ds$, gde je c luk cikloide

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t),\quad (0<t<2\pi).$$

1281. $\int\limits_c (x^2+y^2)\,ds$, gde je c kriva

$$x=a(\cos t+t\sin t),\quad y=a(\sin t-t\cos t),\qquad (0<t<2\pi).$$

1282. $\int\limits_c x\,ds$, ako je c deo logaritamske spirale $r=ae^{k\varphi}$ $(k>0)$ koji se nalazi unutar kruga $r=a$.

1283. $\int\limits_c xyz\,ds$, gde je c luk krive $x=t$, $y=\frac{\sqrt{8t^3}}{3}$, $z=\frac{t^2}{2}$ od tačke $t=0$ do tačke $t=1$.

1284. $\int\limits_c (x^2+y^2+z^2)\,ds$, gde je c deo zavojnice

$$x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=bt,\qquad (0<t<2\pi).$$

1285. $\int\limits_c x^2\,ds$, gde je c krug $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$.

1286. Date su površi $x^2+z^2=a^2$, $y^2+z^2=a^2$; pokazati:

1° da se kriva c: $\begin{cases} x^2+z^2=a^2, \\ y^2+z^2=a^2 \end{cases}$ nalazi u dve uzajamno normalne ravni;

2° izračunati krivolinijske integrale

$$\int\limits_{c_1} (x+y+z)\,ds \quad \text{i} \quad \int\limits_{c_2} (x+y+z)\,ds$$

ako su c_1 i c_2 delovi krive c koji leže u tim normalnim ravnima.

Naći dužinu luka prostornih krivih:

1287. $x=3t$, $y=3t^2$, $z=2t^3$ od tačke $O(0, 0, 0)$ do tačke $A(3, 3, 2)$, $(t>0)$.

1288. $x=e^{-t}\cos t$, $y=e^{-t}\sin t$, $z=e^{-t}$ $(0<t<\infty)$.

Izračunati sledeće krivolinijske integrale:

1289. $\int\limits_c (x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy$, gde je c deo krive $y=1-|1-x|$ između tačaka $x=0$ i $x=2$.

1290. $\int\limits_c \frac{x\,dy-y\,dx}{x+y}$, ako je c kontura trougla koji obrazuje prava $x+y=1$ sa koordinatnim osama.

1291. $\int\limits_c x^3\,dy-y^3\,dx$, po konturi kruga $x^2+y^2=a^2$.

1292. $\int\limits_c x\,dy+\frac{y}{1+x}\,dx$, kada x varira od $x=0$ do $x=4$ duž krive $y=2\sqrt{x}-x$.

1293. $\oint\limits_c (x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy$, ako je c kriva $|x-1|+|y-1|=1$.

1294. $\int\limits_c xy\left[\left(\frac{x}{2}+y\right)dy-\left(x+\frac{y}{2}\right)dx\right]$, po krugu $x^2+y^2=1$.

1295. $\int\limits_c (x^2+y^2)\,dx$, gde je kriva integracije gornji deo kruga $(x-1)^2+y^2=1$ od tačke $(0, 0)$ do tačke $(2, 0)$.

1296. $\int\limits_c xy\,dx+(x+y)\,dy$ gde je c zatvorena kontura koju obrazuju linije $y=0$, $x=1$ i $y=x^2$.

1297. $\int\limits_c y^2\,dx - x^2\,dy$, između tačaka $A(0,1)$ i $B(1,0)$:

1° po pravoj AB; 2° po luku kruga čiji je centar u koordinatnom početku a poluprečnik 1.

1298. $\int\limits_c xy\,dx$, ako je c luk parabole $x=y^2$ od tačke $(1,-1)$ do tačke $(1,1)$.

1299. $\oint\limits_c \dfrac{dx+dy}{|x|+|y|}$, ako je c kontura kvadrata čija su temena

$$A(1,0);\quad B(0,1);\quad C(-1,0);\quad D(0,-1)$$

1300. $\int\limits_c 6x^2y\,dx + 10xy\,dy$, gde je c luk krive $y=x^3$ od tačke $(1,1)$ do tačke $(2,8)$.

1301. $\int\limits_c y\,dx - x\,dy$, ako je c luk cikloide $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$ od tačke $(0,0)$ do tačke $(4\pi,0)$.

1302. $\int\limits_c x\,dy - y\,dx$, gde je c petlja Descartesovog lista $x=\dfrac{3at}{1+t^3}$, $y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}$.

1303. $\int\limits_c \dfrac{x^2\,dy - y^2\,dx}{x^{5/3}+y^{5/3}}$, ako je c luk astroide $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ od tačke $A(a,0)$ do tačke $B(0,a)$.

1304. $\int\limits_c x^3\,dx + 3zy^2\,dy - x^2y\,dz$, gde je c deo prave od tačke $(3,2,1)$ do tačke $(0,0,0)$.

1305. $\int\limits_c z\,dx + x\,dy + y\,dz$, ako je c zavojnica $y=a\sin t$, $x=a\cos t$, $z=at$.

1306. $\int\limits_c (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$, ako je c trougao koji isecaju koordinatne ravni na ravni $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

1307. $\int\limits_c z^2\,dx + x^2\,dy + y^2\,dz$, gde je c kontura sfernog trougla koji isecaju koordinatne ravni na sferi $x^2+y^2+z^2=R^2$, $(x>0)$, $y>0)$.

1308. 1° Na sferi $x^2+y^2+z^2+4x-6y+2z-22=0$ naći tačku M koja je najbliža pravoj zadatoj jednačinama

$$x-2y+2z-17=0 \quad \text{i} \quad 7x+4y+2z-5=0.$$

2° Ako sa P obeležimo ortogonalnu projekciju tačke M na datoj pravoj, izračunati vrednost integrala $\int\limits_c (y+z)\,dx + (x^2+2z)\,dy + (2x+y+z)\,dx$, uzetog duž odsečka MP.

Izračunati sledeće integrale:

1309. $\oint\limits_c y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz$, ako je c Vivijanijeva kriva

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x^2+y^2=ax \end{cases} \qquad (z>0,\ a>0).$$

1310. $\oint\limits_c y\,dx + z\,dy + x\,dz$, ako je c kriva $\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ x^2=rz \end{cases}$.

1311. $\oint\limits_c (y^2+z^2)\,dx + (z^2+x^2)\,dy + (x^2+y^2)\,dz$ gde je c kriva

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2Rx \\ x^2+y^2=2ax \end{cases} \qquad (0<a<R).$$

1312. $\oint\limits_c (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$, ako je kriva c definisana jednačinama

$$x^2+y^2=a^2$$
$$\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1 \qquad (a>0,\ h>0).$$

1313. $\oint\limits_c (4y^2+2x^2)\,dx + (z+x)\,dy + y\,dz$, ako je kriva c određena jednačinama

$$z=4-x^2-y^2,$$
$$z=y^2.$$

Naći funkciju kada je poznat njen totalni diferencijal:

1314. $(e^y+x)\,dx + (xe^y-2y)\,dy$.

1315. $\dfrac{x+ay}{x^2+y^2}\,dx + \dfrac{y-ax}{x^2+y^2}\,dy$.

1316. $(2x\cos y - y^2\sin x)\,dx + (2y\cos x - x^2\sin y)\,dy$.

1317. $\dfrac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}\,dx + \left(\dfrac{e^y}{1+x^2}+1\right)dy$.

1318. $(2xye^{x^2y} + y^2e^{xy^2} + 1)\,dx + (x^2e^{x^2y} + 2xye^{xy^2} - 2y)\,dy$.

1319. $\dfrac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^{n+1}\partial y^m}\,dx + \dfrac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^n\,\partial y^{m+1}}\,dy$.

1320. $\dfrac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2}\,\partial y^{m-n}}\left(\ln\dfrac{1}{R}\right)dx-\dfrac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1}\,\partial y^{m+2}}\left(\ln\dfrac{1}{R}\right)dy$, gde je $R=\sqrt{x^2+y^2}$.

1321. Odrediti konstante a i b tako, da izraz

$$\frac{(y^2+2\,xy+a\,x^2)\,dx-(x^2+2\,xy+b\,y^2)\,dy}{(x^2+y^2)^2}$$

bude totalni diferencijal i naći odgovarajuću funkciju.

Naći funkciju kada je poznat njen totalni diferencijal:

1322. $(x^2-2\,yz)\,dx+(y^2-2\,xz)\,dy+(z^2-2xy)\,dz$.

1323. $\left(1-\dfrac{1}{y}+\dfrac{y}{z}\right)dx+\left(\dfrac{x}{z}+\dfrac{x}{y^2}\right)dy-\dfrac{xy}{z^2}dz$.

1324. $(2\,xyz+\ln y)\,dx+\left(x^2\,y+\dfrac{x}{y}\right)dy+(x^2\,y-2\,z)\,dz$.

1325. $\dfrac{dx-3\,dy}{z}+\dfrac{3\,y-x+z^3}{z^2}dz$.

1326. $e^{\frac{y}{z}}\,dx+\left[\dfrac{e^{\frac{y}{z}}(x+1)}{z}+z\,e^{yz}\right]dy+\left[-\dfrac{e^{\frac{y}{z}}(x+1)}{z^2}+y\,e^{yz}+e^{-z}\right]dz$.

1327. 1° U ravni Oxy date su tačke $A(1,\,1)$, $B(2,\,2)$, $C(1,\,2)$.

Izračunati krivolinijski integral

(1) $$\int\frac{(ax-y)(a+1)\,dx+(x+ay)(a-1)\,dy}{xy}$$

prvo po duži AB pa zatim po izlomljenoj liniji ACB.

2° Za koju su vrednost konstante a ova dva integrala jednaka?

3° Odrediti a tako da vrednost integrala (1) u prvom kvadrantu zavisi samo od početne i krajnje tačke integracije.

Vodeći računa da je podintegralni izraz totalni diferencijal izračunati integrale:

1328. $\int\limits_c 2\,xy\,dx+x^2\,dy$ od tačke $(0,\,0)$ do tačke $(1,\,1)$ ako je putanja c:

1° $y=x$; 2° $y=x^2$; 3° $x=y^2$; 4° $y=x^3$.

1329. $\int\limits_c x\,dy+y\,dx$, ako je c luk krive $x^5+y^9+x^2y^2-6\,y+3\,x=0$ između tačaka $(0,\,0)$ i $(1,\,1)$.

1330. $\int\limits_{(1,\,-1)}^{(1,\,1)}(x-y)\,(dx-dy)$.

1331. $\int\limits_{\left(0,\,\frac{\pi}{2}\right)}^{\left(\frac{\pi}{2},\,\pi\right)}\cos y\,dx-x\sin y\,dy$.

1332. $\int\limits_{(0,\,0)}^{(a,\,b)}e^x(\cos y\,dx-\sin y\,dy)$.

1333. $\int\limits_{(0,\,0)}^{(a,\,b)}\varphi\,(x+y)\,(dx+dy)$, ako je $\varphi\,(u)$ neprekidna funkcija.

1334. $\int\limits_{(x_1,\,x_2)}^{(y_1,\,y_2)}f(x)\,dx+\varphi\,(y)\,dy$, gde su f i φ neprekidne funkcije.

1335. $\int\limits_{M_1}^{M_2}\dfrac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, ako tačke M_1 i M_2 leže respektivno na krugovima

$$x^2+y^2=a^2,\quad x^2+y^2=b^2\qquad(a<b).$$

Dokazati da su vrednosti sledećih krivolinijskih integrala, uzetih po zatvorenoj konturi, jednake nuli, nezavisno od oblika funkcije u podintegralnom izrazu:

1336. $\int\limits_c f(xy)\,(y\,dx+x\,dy)$.

1337. $\int\limits_c f\left(\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{xdy-ydx}{x^2}$.

1338. $\int\limits_c f(x^2+y^2)\,(x\,dx+y\,dy)$.

Izračunati sledeće krivolinijske integrale:

1339. $\int\limits_{(1,\,-1,\,2)}^{(2,1,3)}x\,dx-y^2\,dy+z\,dz$.

1340. $\int\limits_{(1,\,2,\,3)}^{(3,\,2,\,1)}y\,z\,dx+z\,x\,dy+xy\,dz$.

1341. $\int\limits_{(7,2,3)}^{(5,3,1)}\dfrac{z\,x\,dy+xy\,dz-yz\,dx}{(x-yz)^2}$, $\left(z\neq\dfrac{x}{y}\right)$.

1342. $\int\limits_{(x_1,\,y_1,\,z_1)}^{(x_2,\,y_2,\,z_2)}\dfrac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,

ako su tačke $(x_1,\,y_1,\,z_1)$ i $(x_2,\,y_2,\,z_2)$ respektivno na sferama $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2+z^2=b^2$, $(b>a)$.

1343. Dokazati da je

$$\oint_c f(x^2+y^2+z^2)\,(x\,dx+y\,dy+z\,dz)=0,$$

ako je c zatvorena kriva a $f(u)$ neprekidna funkcija.

Koristeći Greenovu formulu transformisati krivolinijske integrale po zatvorenoj putanji, uzete u pozitivnom smeru, u dvojne:

1344. $\int_c (1-x^2)\,y\,dx+x\,(1+y^2)\,dy.$

1345. $\int_c (e^{xy}+2\,x\cos y)\,dx+(e^{xy}-x^2\sin y)\,dy.$

1346. $\int_c \frac{y^2}{1+x^2}\,dx+3\,y\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}\,dy.$

Koristeći Greenovu formulu izračunati integrale:

1347. $\oint_c 2\,(x^2+y^2)\,dx+(x+y)^2\,dy$, ako je c kontura trougla čija su temena

$A(1,\ 1)$; $B(2,\ 2)$; $C(1,\ 3)$.

1348. $\oint_c xy^2\,dy-x^2\,y\,dx$ ako je c kontura kruga $x^2+y^2=a^2$.

1349. $\oint_c (x+y)\,dx-(x-y)\,dy$, ako je c elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

1350. $\oint_c (xy+x+y)\,dx+(xy+x-y)\,dy$ ako je c: 1° elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; 2° krug $x^2+y^2=ax.$

1351. $\oint_c \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$, ako je c krug $x^2+y^2-2\,x-2\,y+1=0.$

1352. $\oint_c \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$, ako je c zatvorena kontura.

1353. $\int_c (e^x\sin y-my)\,dx+(e^x\cos y-m)\,dy$ ako je c gornji deo kruga $x^2+y^2=$ $=ax$ od tačke $(a,\ 0)$ do tačke $(0,\ 0)$.

1354. $\int_c [f(y)\,e^x-a\,y]\,dx+[f'(y)\,e^x-a]\,dy$, gde su $f(y)$ i $f'(y)$ neprekidne funkcije i c proizvoljna putanja koja spaja tačke $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2,\ y_2)$, a ograničava zajedno sa odsečkom AB figuru date površine P.

1355. Dokazati da je integral

$$\int_c (yx^3+e^y)\,dx+(xy^3+xe^y-2\,y)\,dy,$$

jednak nuli, ako je c zatvorena linija simetrična u odnosu na koordinatni početak ili u odnosu na obe koordinatne ose.

1356. Pokazati da integral

$$\int_c (2\,xy-y)\,dx+x^2\,dy,$$

gde je c zatvorena kontura, izražava površinu oblasti koju ograničava ta kontura.

1357. Pokazati da je krivolinijski integral

$$\int_c [x\cos(\vec{n},\ \vec{x})+y\sin(\vec{n},\ \vec{x})]\,ds,$$

gde je n spoljna normala zatvorene konture c, uzet u pozitivnom smeru, jednak dvostrukoj vrednosti površine koju ograničava kontura c.

1358. Pokazati, ako je c zatvorena kriva a $\vec{l}$ proizvoljni pravac da je krivolinijski integral $\oint_c \cos(\vec{l},\ \vec{n})\,ds=0$, gde je n spoljna normala konture c.

1359. Izračunati Gaussov integral

$$u(x,\ y)=\oint_c \frac{\cos(\vec{r},\ \vec{n})}{r}\,ds$$

gde je $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$ intenzitet vektora $\vec{r}$ koji spaja tačku $A(x,\ y)$ sa promenljivom tačkom $M(\xi,\ \eta)$ proste zatvorene glatke krive c, $(\vec{r},\ \vec{u})$ ugao između vektora $\vec{r}$ i spoljne normale $\vec{n}$ krive c u njenoj tački M.

1360. Dokazati da je u *harmonijska funkcija*, tj. funkcija koja zadovoljava jednačinu

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

onda i samo onda, ako je

$$\oint_c \frac{\partial u}{\partial n}\,ds=0,$$

gde je c proizvoljna zatvorena kriva a $\frac{\partial u}{\partial n}$ izvod po spoljnoj normali te krive.

1361. Dokazati da je

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy = -\iint_D u\,\Delta u\,dx\,dy + \oint u\frac{\partial u}{\partial n}\,ds,$$

gde glatka kontura c ograničava oblast D.

1362. Dokazati *drugu Greenovu formulu* u ravni

$$\iint_D \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx\,dy = \oint_c \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial n} & \dfrac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} ds,$$

pri čemu je c glatka kontura koja ograničava konačnu oblast D a $\dfrac{\partial}{\partial u}$ izvod u pravcu spoljne normale krive c.

1363. Koristeći drugu Greenovu formulu dokazati, ako je $u = u(x, y)$ harmonijska funkcija u zatvorenoj konačnoj oblasti, da je onda

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\oint_c \left(u\frac{\ln r}{\partial n} - \ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds$$

gde je c granica oblasti D, i spoljna normala konture c, (x, y) neka tačka iz unutrašnjosti oblasti D, a $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ između tačke (x, y) i promenljive tačke (ξ, η) konture c.

1364. Dokazati *teoremu o srednjoj vrednosti* harmonijske funkcije $u(M) = u(x, y)$

$$u(M) = \frac{1}{2\pi}\oint_c u(\xi, \eta)\,ds$$

gde je c krug sa centrom u tački M.

1365. Dokazati, ako je funkcija $u(x, y)$ harmonijska u ograničenoj i zatvorenoj oblasti i nema konstantnu vrednost u toj oblasti, da onda funkcija u ne može imati najveću i najmanju vrednost u toj oblasti (*princip maksimuma*).

§ 10. Primena krivolinijskog integrala

1° Iz Greenove formule sledi da je površina ravne oblasti D koja je ograničena krivom c data formulom

$$P = \frac{1}{2}\oint_c x\,dy - y\,dx.$$

2° Površina omotača cilindrične površi, čije su izvodnice paralelne z-osi a generatrisa mu je kriva c u ravni xOy, data je formulom

$$P = \int_c z\,ds.$$

3° Ako je $\varrho = \varrho(x, y, z)$ gustina u promenljivoj tački (x, y, z) krive c onda je *masa krive* data formulom

$$m = \int_c \varrho(x, y, z)\,ds.$$

Koordinate težišta te krive izražavaju se formulama

$$x_0 = \frac{1}{m}\int_c x\,\varrho(x, y, z)\,ds, \quad y_0 = \frac{1}{m}\int_c y\,\varrho(x, y, z)\,ds, \quad z_0 = \frac{1}{m}\int_c z\,\varrho(x, y, z)\,ds.$$

Momenti inercije I_x, I_y i I_0, respektivno u odnosu na ose Ox, Oy i koordinatni početak izražavaju se formulama

$$I_x = \int_c y^2\varrho(x, y, z)\,ds, \quad I_y = \int_c x^2\varrho(x, y, z)\,ds, \quad I_0 = \int_C (x^2 + y^2)\,\varrho(x, y, z)\,ds.$$

4° Krivolinijski integral

$$\int_c X(x, y, z)\,dx + Y(x, y, z)\,dy + Z(x, y, z)\,dz.$$

izražava *rad sile* pri pomeranju jedinice mase duž krive c u polju sile $\vec{F}(X, Y, Z)$.

5° Prema *Bio-Savarovom zakonu* element struje dejstvuje na magnetnu masu m silom čija je veličina $\dfrac{m I \sin\alpha\,ds}{r^2}$, gde je I jačina struje, ds element dužine provodnika, r rastojanje od elementa struje do magnetne mase, α ugao između prave koja spaja magnetnu masu i element struje i pravca proticanja struje. Ta sila ima pravac normale na ravan koja sadrži element struje i tačku u kojoj se nalazi magnetna masa; smer sile se određuje po pravilu desne zavojnice.

Izračunati površinu ograničenu krivim linijama:

1366. $x = a\cos t, \quad y = b\sin t.$

1367. $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \qquad (0 < t < 2\pi).$

1368. $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t, \qquad (0 < t < 2\pi).$

1369. Ograničenu jednim lukom epicikloide

$$x = a[(1 + m)\cos mt - m\cos(1 + m)t],$$

$$y = a[(1 + m)\sin mt - m\sin(1 + m)t], \qquad (0 < t < 2\pi)$$

i lukom odgovarajućeg kruga.

1370. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 + y^2).$ **1371.** $x^3 + y^3 = 3axy$ (Descartesov list).

1372. $x = 2a\cos t - a\cos 2t, \quad y = 2a\sin t - a\sin 2t \qquad (0 < t < 2\pi).$

1373. $(x+y)^2=ax,\quad y=0,\qquad (a>0).$ 1374. $(x+y)^3=xy.$

1375. $(x+y)^4=x^2y.$ 1376. $9y^2=4x^3-x^4.$

1377. $x^3+y^3=x^2+y^2,\quad y=0,\quad x=0.$ 1378. $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{12}=xy.$

1379. $(x+y)^{\alpha+\beta+1}=ax^\alpha y^\beta\qquad (a>0,\ \alpha>0,\ \beta>0).$

1380. $\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha+\left(\frac{y}{b}\right)^\alpha=1\qquad (a>0,\ b>0,\ \alpha>0).$

Naći površinu sledećih površi:

1381. Omotača cilindra $x^2+y^2=1$ između ravni $z=4y$ i $z=2y$.

1382. Kružnog cilindra $x^2+y^2=R^2$ između ravni $z=0$ i površi $z=R+\frac{x^2}{R}$.

1383. Eliptičnog cilindra $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$ između ravni $z=0$ i $z=y$.

1384. Paraboličnog cilindra $y^2=2px$ između ravni $z=0$, $z=y$ i $x=\frac{8}{9}p$.

1385. Onog dela omotača cilindra $x^2+y^2-ax=0$ koji se nalazi unutar sfere $x^2+y^2+z^2=a^2$.

1386. Kružnog cilindra $x^2+y^2=R^2$ između ravni $z=0$ i površi $2Rz=xy$.

1387. Dela cilindrične površi

$$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$$

koju isecaju površi $x^{4/3}+y^{4/3}=z;\quad z=0.$

1388. Date su površi (P_1) $z=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$, (P_2) $x^2+y^2=1$ i (P_3) $z=0$.

1° Naći površinu dela površi (P_2) koji isecaju površi (P_1) i (P_3),

2° Naći $\oint\limits_c\left(\frac{1}{y^2}\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{1-x^2}+\sqrt{4-y^2}\right)dy-\frac{xy}{\sqrt{4-x^2}}dx$ duž krive

$x^2+y^2=1,\ z=0.$

1389. Naći masu krive $y=x^2$ između tačaka $x=0$ i $x=2$ ako je u svakoj tački gustina jednaka kvadratu apscise te tačke.

Naći masu sledećih krivih:

1390. Luka krive $y=\frac{2x\sqrt{x}}{3}$, od tačke $(0,0)$ do tačke $\left(4,\frac{16}{3}\right)$, ako je linijska gustina krive proporcionalna dužini njenog luka.

1391. Dela krive $y=\ln x$, između tačaka $x=\sqrt{3}$ i $x=2\sqrt{2}$ ako je gustina u svakoj tački jednaka kvadratu njene apscise.

1392. Dela lančanice $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$, između tačaka $x=0$ i $x=a$, ako je gustina krive u svakoj tački proporcionalna njenoj ordinati.

1393. $x=a\cos t,\ y=b\sin t$, ako je linearna gustina u svakoj tački $\varrho=|y|$.

1394. Luka krive $x=at,\ y=\frac{a}{2}t^2,\ z=\frac{a}{3}t^3\quad (0<t<1)$ čija se gustina menja po zakonu $\varrho=\sqrt{\frac{2y}{a}}$.

1395. Naći težište luka kruga $x^2+y^2=a^2$, $(y>0)$, i moment inercije u odnosu na osu Ox; $(\varrho=1)$.

Naći težište homogenih krivih:

1396. Luka cikloide $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $(0<t<2\pi)$.

1397. Luka kruga poluprečnika a, kome odgovara centralni ugao 2φ.

1398. $r=a(1+\cos\varphi)$. 1399. $y=a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$, između $A(0,a)$ i $B(b,h)$.

1400. Sfernog trougla $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x>0$, $y>0$, $z>0$.

1401. $x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=ht\quad$ za $\quad 0<t<m$.

1402. $x=e^{-t}\cos t,\quad y=e^{-t}\sin t,\quad z=e^{-t}\quad$ za $\quad 0<t<\infty$

1403. Naći moment inercije u odnosu na koordinatne ose luka zavojnice

$$x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=\frac{h}{2\pi}t\qquad (0<t<2\pi).$$

1404. Odrediti rad koji izvrši sila teže F pri pomeranju mase m iz tačke (a_1, b_1, c_1) u tačku (a_2, b_2, c_2).

1405. Sila $\vec{F}(P,Q)$, gde je $P=x-y$, $Q=x$ obrazuje polje. Izračunati rad potreban da jedinica mase obiđe konturu kvadrata $x=\pm a$ i $y=\pm a$.

1406. Date su tačke $A(-a,a)$ i $B(a,a)$. Odrediti silu kojom deluje masa M ravnomerno raspoređena na duži AB, na masu m koja je skoncentrisana u tački $O(0,0)$.

1407. Odrediti silu kojom masa M ravnomerno raspoređena na gornjem luku kruga $x^2+y^2=a^2$, privlači masu m skoncentrisanu u koordinatnom početku.

1408. Naći rad sile $F=\frac{k}{r^2}$, gde je $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, koja dejstvuje na jedinicu mase, ako se ta masa pomera iz tačke (x_1, y_1, z_1) u tačku (x_2, y_2, z_2).

1409. Projekcije sile na koordinatne ose su $X=2xy$ i $Y=x^2$. Pokazati da rad sile pri pomeranju materijalne tačke mase m zavisi samo od njenog početnog i krajnjeg položaja, a ne zavisi od oblika putanje. Izračunati rad ako se vrši pomeranje iz tačke $(1, 0)$ u tačku $(0, 3)$.

1410. Komponente sile su $X=x+y^2$ i $Y=2xy-8$. Pokazati da rad pri pomeranju materijalne tačke u polju te sile ne zavisi od putanje.

1411. U svakoj tački ravni dejstvuje sila, čije su projekcije na koordinatne ose $X=xy$, $Y=x+y$. Izračunati rad sile pri pomeranju tačke mase m iz tačke $(0, 0)$ u tačku $(1, 1)$: 1° po pravoj $y=x$; 2° po paraboli $y=x^2$; 3° po izlomljenoj dvogranoj liniji, čiji su delovi paralelni koordinatnim osama (dva slučaja).

1412. Naći silu kojom struja I u beskonačnom pravolinijskom provodniku dejstvuje na tačkastu magnetnu masu m, koja se nalazi na rastojanju d od provodnika.

1413. Po konturi, čiji je oblik kvadrat stranice a teče struja I. Kakvom silom dejstvuje taj protok na tačkastu magnetnu masu m, koja se nalazi u centru kvadrata?

1414. Pokazati da struja I, koja teče po luku krive, čija je jednačina u polarnim koordinatama $r=r(\varphi)$, dejstvuje na tačkastu magnetnu masu, koja se nalazi u polu, silom $F=mI\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{d\varphi}{r}$.

1415. Kolika je sila kojom struja I, koja teče po zatvorenoj eliptičkoj putanji, dejstvuje na tačkastu magnetnu masu m, koja se nalazi u žiži elipse?

1416. Kolikom silom struja I, koja teče po beskonačnoj paraboličkoj konturi, dejstvuje na tačkastu magnetnu masu m, smeštenu u žiži parabole? Rastojanje od temena do fokusa je $\frac{p}{2}$.

1417. Kolikom silom struja I, koja teče po kružnoj konturi poluprečnika R, dejstvuje na tačkastu magnetnu masu m, smeštenu u tački P, koja leži na normali, postavljenoj kroz centar kruga, na rastojanju h, od centra kruga? Za koju vrednost od R će ta sila biti najveća ako je h fiksirano?

1418. Izračunati logaritamski potencijal prostog sloja

$$\eta(x, y)=\oint\limits_{c}\mu\ln\frac{1}{r}\,ds$$

gde je $\mu=\text{const}$ — gustina, $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$ a kontura c krug $u^2+v^2=R^2$.

1419. Izračunati u polarnim koordinatama r i φ logaritamske potencijale prostog sloja

$$I_1=\int\limits_0^{2\pi}\cos n\theta\ln\frac{1}{r}\,d\theta \quad \text{i} \quad I_2=\int\limits_0^{2\pi}\sin n\theta\ln\frac{1}{r}\,d\theta$$

ako je r rastojanje između tačke (ϱ, φ) i promenljive tačke $(1, \theta)$ a $n\in N$

§ 11. Površinski integral

1° Površinski integral prve vrste. Ako je S deo po deo glatka dvostrana površ definisana jednačinama

(1) $$x=x(u, v) \quad y=y(u, v), \quad z=z(u, v) \quad [(u, v)\in D]$$

a $f(x, y, z)$ funkcija definisana i neprekidna na površi S, onda je

(2) $$\iint\limits_S f(x, y, z)\,dS=\iint\limits_D f[x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)]\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv,$$

gde je

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

U specijalnom slučaju, ako jednačina površi S ima oblik

$$z=z(x, y) \qquad [(x, y)\in D]$$

gde je $z(x, y)$ jednoznačna neprekidno diferencijabilna funkcija, onda je

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dS=\iint\limits_D f[x, y, z(x, y)]\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy,$$

gde je $p=\frac{\partial z}{\partial x}$ a $q=\frac{\partial z}{\partial y}$.

Ovaj integral ne zavisi od izbora strane površi S.

Ako se funkcija $f(x, y, z)$ tretira kao gustina površi S u tački (x, y, z), onda integral (2) predstavlja masu te površi.

2° Koordinate težišta materijalne homogene površi S date su obrascima

$$Sx_0=\iint\limits_S x\,dS, \quad Sy_0=\iint\limits_S y\,dS, \quad Sz_0=\iint\limits_S z\,dS, \quad S=\iint\limits_S dS.$$

3° Površinski integral druge vrste. Ako je S glatka dvostrana površ, na kojoj je izabrana jedna od dveju strana, određena smerom normale

$\vec{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ a $P=P(x, y, z)$, $Q=Q(x, y, z)$ i $R=R(x, y, z)$ tri funkcije, definisane i neprekidne na površi S, onda je

$$\iint_S P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy=\iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS.$$

Pri prelazu na drugu stranu površi ovaj integral dobija suprotan znak.

4° Stocesova formula. Ako su $P=P(x, y, z)$, $Q=Q(x, y, z)$ i $R=R(x, y, z)$ neprekidno diferencijabilne funkcije a c prosta zatvorena deo po deo glatka kriva, koja ograničava konačnu deo po deo glatku dvostranu površ S, onda važi *Stocesova formula*:

$$\oint_c P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

gde su $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ kosinusi pravca normale površi S, orijentisane na onu stranu, u odnosu na koju se obilazak konture c vrši suprotno kretanju kazaljke na časovniku.

5° Formula Ostrogradskog. Ako je S deo po deo glatka površ, koja ograničava oblast V, a $P=P(x, y, z)$, $Q=Q(x, y, z)$ i $R=R(x, y, z)$ neprekidne funkcije zajedno sa svojim parcijalnim izvodima prvog reda u oblasti $V+S$, onda važi *formula Ostrogradskog*

$$\iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS=\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

gde su $\cos\alpha$, $\cos\beta$ i $\cos\gamma$ kosinusi pravca spoljne normale površi S.

Izračunati sledeće površinske integrale:

1420. $\iint_S (6x+4y+3z)\,dS$ ako je S deo ravni $x+2y+3z=6$, koja pripada prvom oktantu.

1421. $\iint_S \dfrac{dS}{(1+x+z)^2}$ ako je S deo ravni $x+y+z=1$ koji pripada prvom oktantu.

1422. $\iint_S (x^2+y^2)\,dS$, ako je S sfera $x^2+y^2+z^2=a^2$.

1423. $\iint_S \dfrac{ds}{x^2+y^2+z^2}$ ako je S deo cilindra $x^2+y^2=R^2$ ograničen ravnima $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=m$.

1424. $\iint_S (y+z+\sqrt{a^2-x^2})\,dS$ ako je S deo cilindra $x^2+y^2=a^2$, između ravni $z=0$, $z=h$.

1425. $\iint_S \dfrac{dS}{x+\dfrac{y^2}{2}+z}$ ako je S deo cilindra $x=2-\dfrac{y^2}{2}$ ograničen ravnima $x=0$, $z=0$, $z=1$.

1426. $\iint_S x(y^2+z^2)\,dS$ ako je površ S data jednačinom $x=\sqrt{9-y^2-z^2}$.

1427. $\iint_S (y^2+z^2)\,dS$ ako je površ S data jednačinom $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

1428. $\iint_S \dfrac{dS}{(1+z)^2}$ ako je S sfera $x^2+y^2+z^2=1$, $z>0$.

1429. $\iint_S \dfrac{dS}{\sqrt{1+z}}$, po površi $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z>0$.

1430. $\iint_S \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dS$, gde je S polovina sfere $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

1431. $\iint_S x^2y^2\,dS$, gde je S polovina sfere $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

1432. $\iint_S \dfrac{dS}{d^2}$ ako je S deo cilindra $x^2+y^2=R^2$, ograničen ravnima $z=0$ i $z=h$, a d rastojanje od koordinatnog početka do tačke na površi.

1433. $\iint_S \dfrac{dS}{d}$, gde je S deo površi $z=xy$ isečen cilindrom $x^2+y^2=R^2$, a d rastojanje tačke površi do Oz ose.

1434. $\iint_S \dfrac{dS}{d}$, ako je S elipsoid a d rastojanje centra elipsoida od tangentne ravni elipsoida.

1435. $\iint_S \dfrac{dS}{d^3}$ gde su S i d kao u prethodnom zadatku.

1436. $\iint\limits_S \frac{dS}{d^n}$, ako je S sfera $x^2+y^2+z^2=R^2$, a d rastojanje od fiksne tačke $P(0, 0, c)$ $(c>R)$ do tačke na sferi.

1437. Izračunati potencijal $u=\iint\limits_S \frac{\varrho_0 dS}{d}$ sferne površi $x^2+y^2+z^2=a^2$ gustine ϱ_0 na tačku $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ako je $d=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$.

1438. $\iint\limits_S \sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}\,dS$, ako je S površ kruga $x^2+y^2+z^2=R^2$,

$$ax+by+cz=d.$$

1439. $\iint\limits_S (xy+yz+zx)\,dS$, ako je S deo površi $z=\sqrt{x^2+y^2}$, isečen cilindrom $x^2+y^2=2\,ax$.

1440. Dokazati Poissonovu formulu

$$\iint\limits_S f(ax+by+cz)\,dS=2\pi\int_{-1}^{1} f\left(u\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)du$$

ako je S sfera $x^2+y^2+z^2=1$.

1441. Pokazati da je integral

$$J=\iint\limits_S \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2}\,dS=\iint\limits_S \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\,dS,$$

uzet po površi S jednak prostornom uglu pod kojim se površ S vidi iz koordinatnog početka. Sa r je obeležen radijus vektor elementa površi dS a sa $\vec{n}$ normala površi, dok je $\frac{\partial u}{\partial n}$ izvod u pravcu normale.

Naći masu sledećih površi:

1442. Površ paraboloida $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ $(0<z<1)$ čija se gustina menja po zakonu $\varrho=z$.

1443. Sfere, ako je površinska gustina u svakoj tački jednaka rastojanju te tačke od nekog fiksiranog prečnika sfere.

1444. Sfere, ako je površinska gustina u svakoj tački jednaka kvadratu rastojanja te tačke od nekog fiksiranog prečnika sfere.

Odrediti težište površi:

1445. Površi segmenta sfere $x^2+y^2+z^2=a^2$ za $h<z<a$.

1446. Omotača sfere $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x>0$, $y>0$, $z>0$.

1447. Dela površi $x^2+y^2+z^2=a^2$, koji je ograničen površima $x^2+y^2=ax$, $z=0$.

Naći moment inercije površi:

1448. Površi konusa $h^2(x^2+y^2)=a^2z^2$ za $0>z<h$ u odnosu na z osu.

1449. Površi sfere $x^2+y^2+z^2=a^2$, u odnosu na prečnik.

1450. Površi paraboloida $x^2+y^2=2\,az$ $(0<z<a)$ u odnosu na z osu.

Izračunati sledeće površinske integrale:

1451. $\iint\limits_S z\,dx\,dy+x\,dx\,dz+y\,dy\,dz$, ako je S gornji deo ravni $x-y+z=1$ isečen koordinatnim ravnima.

1452. $\iint\limits_S xyz\,dx\,dy$, po spoljnoj strani sfere $x^2+y^2+z^2=1$; $x>0$, $y>0$.

1453. $\iint\limits_S \sqrt[4]{x^2+y^2}\,dx\,dy$ ako je S donja strana kruga $x^2+y^2<a^2$.

1454. $\iint\limits_S 2\,dx\,dy+y\,dx\,dz-x^2z\,dy\,dz$; ako je S spoljna strana onog dela elipsoida $4x^2+y^2+4z^2=1$ koji pripada prvom oktantu.

1455. $\oiint\limits_S y\,dx\,dz$, ako je S unutrašnja strana tetraedra koji određuju ravni

$$x+y+z=1, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$$

1456. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz+y^2\,dx\,dz+z^2\,dx\,dy$, ako je S spoljna strana sfere $x^2+y^2+z=a^2$, koja pripada prvom oktantu.

1457. $\iint\limits_S x\,dy\,dz+y\,dx\,dz+z\,dx\,dy$, po spoljnoj strani sfere $x^2+y^2+z^2=a^2$.

1458. $\iint\limits_S yz\,dy\,dz+xz\,dz\,dx+xy\,dx\,dy$ gde je S spoljna strana tetraedra koji je određen ravnima $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=a$.

1459. $\iint\limits_S (y-z)\,dy\,dz+(z-x)\,dx\,dz+(x-y)\,dx\,dy$, ako je S spoljna strana površi $x^2+y^2=z^2$ $(0<z<h)$.

1460. $\iint\limits_S \left(\frac{dy\,dz}{x}+\frac{dx\,dz}{y}+\frac{dx\,dy}{z}\right)$, gde je S spoljna strana elipsoida

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

1461. $\iint\limits_S yz\,dx\,dy+xz\,dy\,dz+xy\,dx\,dz$, ako je S spoljna strana površi određene površima $x^2+y^2=R^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=h$.

1462. Transformisati integral $\int\limits_c (y^2+z^2)\,dx+(x^2+z^2)\,dy+(x^2+y^2)\,dz$, ako je c neka zatvorena kontura, na površinski integral površi čiji je rub ta kontura.

Izračunati sledeće krivolinijske integrale na dva načina: direktno i pomoću Stocesove formule:

1463. $\oint\limits_c 8y\sqrt{(1-x^2-z^2)^3}\,dx+xy^3\,dy+\sin z\,dz$, ako se kriva c dobija presekom elipsoida $4x^2+y^2+4z^2=4$ i ravni $z=0$, $x=0$, $y=0$, u prvom oktantu.

1464. $\int\limits_c x^2\,dx+xy\,dy+xyz\,dz$, ako je c kontura trougla čija su temena

$$A(a,\,0,\,0),\quad B(0,\,b,\,0),\quad C(0,\,0,\,c).$$

1465. $\int\limits_c y\,dx+x^2\,dy+z\,dz$, ako je kriva c određena presekom površi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b},\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c},\quad c>0.$$

Koristeći Stocesovu formulu izračunati sledeće krivolinijske integrale:

1466. $\oint\limits_c y\,dx+z\,dy+x\,dz$, ako je c krug $x^2+y^2+z^2=a^2$,

$$x+y+z=0.$$

1467. $\oint\limits_c (y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz$ ako je c luk elipse $x^2+y^2=a^2$,

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1 \qquad (a>0\;\; h>0),$$

orijentisan u smeru suprotnom od smera kazaljke na časovniku, posmatrano sa pozitivnog smera ose Ox.

1468. $\oint\limits_c e^x\,dx+z\,(x^2+y^2)^{3/2}\,dy+yz^3\,dz$ gde je c linija određena presekom površi $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x=0$, $x=2$, $y=0$, $y=1$.

1469. $\int\limits_c (y^2+z^2)\,dx+(z^2+x^2)\,dy+(x^2+y^2)\,dz$, ako je c kriva $x^2+y^2+z^2=2\,ax$,

$$x^2+y^2=2\,bx,\quad z>0.$$

1470. Neka je c zatvorena kontura koja pripada ravni

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$$

i ograničava površinu S ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ su kosinusi pravca normale). Naći

$$\oint\limits_c \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

ako se kretanje vrši u pozitivnom smeru konture c.

1471. Transformisati površinski integral

$$\iint\limits_S x^2\,dy\,dz+y^2\,dx\,dz+z^2\,dx\,dy$$

ako je S zatvorena površ, u trojni uzet po oblasti koju ograničava ta površ.

1472. Izračunati površinski integral

$$\oiint\limits_S y^2z\,dx\,dy+xz\,dy\,dz+x^2y\,dx\,dz$$

gde je S spoljna strana površi koju obrazuju površi $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, u prvom oktantu, na dva načina: direktno i primenom formule Ostrogradskog.

Dokazati jednakosti:

1473. $\iint\limits_S \cos(\vec{n},\vec{l})\,dS=0$, ako je S prosta zatvorena površ, $\vec{l}$ proizvoljni pravac a $\vec{n}$ spoljna normala površi S.

1474. $\iint\limits_S (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,dS=3\,V$, gde su $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ kosinusi spoljne normale površi S koja ograničava zapreminu V.

Koristeći formulu Ostrogradskog izračunati integrale:

1475. $\iint\limits_S (x^3\cos\alpha+y^3\cos\beta+z^3\cos\gamma)\,dS$, ako je S sfera $x^2+y^2+z^2=R^2$, a $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ kosinusi pravca njene spoljne normale.

1476. $\iint\limits_S [(z^n-y^n)\cos\alpha+(x^n-z^n)\cos\beta+(y^n-x^n)\cos\gamma]\,dS$, po sferi

$$x^2+y^2+z^2=R^2, \quad z>0,$$

ako su α, β i γ kao i u prethodnom zadatku.

1477. $\iint\limits_S x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy$, ako je površ S definisana jednačinama

$$x=(a+b\cos\theta)\cos\varphi, \quad y=(a+b\cos\theta)\sin\varphi, \quad z=b\sin\theta,$$
$$0<\theta, \quad \varphi<2\pi, \quad a>b>0.$$

1478. $\iint\limits_{(S)} x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy$ ako je S spoljna strana površi definisane jednačinama $x^2+y^2+z^2=1$, $z^2=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$.

1479. Pokazati da površinski integral

$$\iint\limits_{(S)} 4\,xyz\,dx\,dy-2\,x^2y\,dy\,dz-3\,xz^2\,dx\,dz$$

ne zavisi od površine (S) već samo od njene granične konture (c) i transformisati ga na integral po toj konturi, a zatim izračunati njegovu vrednost kada je granična kontura zadata jednačinama:

$$x^2+y^2=R^2, \quad x+z=0.$$

1480. Dat je integral

$$I=\iint\limits_{(S)} (1+x^2)\,\varphi(x)\,dy\,dz+2\,xy\,\varphi(x)\,dz\,dx-3\,z\,dx\,dy$$

po površini (S) čiji je rub zatvorena kriva c. 1° Odrediti funkciju $\varphi(x)$ tako da integral I zavisi samo od krive c i da bude $\varphi(0)=0$. 2° U tom slučaju izračunati integral I ako je kriva data jednačinama $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=1$. 3° U istom slučaju pretvoriti integral I u krivolinijski integral oblika

$$\int\limits_c P(x, y, z)\,dx+Q(x, y, z)\,dy.$$

Izračunati površinske integrale:

1481. $\iint\limits_S (x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,dS$, gde je S, deo površi

$$x^2+y^2=z^2 \quad (0<z<h)$$

a $\cos\alpha$, $\cos\beta$ i $\cos\gamma$ kosinusi pravca njene spoljne normale.

1482. $\iint\limits_S \dfrac{\cos\varphi}{r^2}\,dS$ ako je S deo ravni $x+y+z=1$ koji pripada prvom oktantu, r intenzitet vektora položaja tačke M date ravni a φ ugao između vektora položaja i normalnog vektora te ravni.

1483. Ako je $\Delta u\equiv\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ a S — glatka površina, koja ograničava konačno telo V, dokazati da važe sledeće formule

1° $\displaystyle\iint\limits_{(S)} \frac{\partial u}{\partial n}\,dS=\iiint\limits_V \Delta u\,dx\,dy\,dz;$

2° $\displaystyle\iint\limits_{(S)} u\frac{\partial u}{\partial n}\,dS=\iiint\limits_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz+$

$+\displaystyle\iiint\limits_V u\,\Delta u\,dx\,dy\,dz$, gde je u — funkcija, neprekidna sa svim svojim izvodima do drugog reda zaključno u oblasti $V+S$, a $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ — izvod po spoljnoj normali na površinu S.

1484. Funkcija $u=u(x, y, z)$ koja ima neprekidne parcijalne izvode do drugog reda zaključno u nekoj oblasti, naziva se *harmonijska* u toj oblasti ako je

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

Dokazati, ako je u harmonijska funkcija u konačnoj zatvorenoj oblasti V, ograničenoj glatkom površinom S, da važe formule

1° $\displaystyle\iint\limits_{(S)} \frac{\partial u}{\partial n}\,dS=0;$

2° $\displaystyle\iiint\limits_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz=\iint\limits_S u\frac{\partial u}{\partial n}\,dS,$

gde je n—spoljna normala površi S; koristeći se formulom 2° da se funkcija koja je harmonijska u nekoj oblasti V jednoznačno definiše svojim vrednostima na njenoj granici S.

1485. Izračunati Gaussov integral

$$I(x, y, z)=\iint\limits_S \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2}\,dS,$$

gde je S — prosta zatvorena glatka površ, koja ograničava zapreminu V, $\vec{n}$ — spoljna normala na površinu S u tački (ξ, η, ζ), $\vec{r}$ — radijus vektor, koji spaja tačku (x, y, z) sa tačkom $(\xi, \eta\,\zeta,)$ i $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$.

1486. Izračunati

$$\iint_{(S)} (x-y+z)\,dy\,dz+(y-z+x)\,dz\,dx+(z-x+y)\,dx\,dy,$$

gde je (S) spoljna strana površi

$$|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1,\ |x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1.$$

1487. Dokazati identitet (Greenovu formulu)

$$\iiint_V (v\,\Delta u-u\,\Delta v)\,dx\,dy\,dz=\iint_S \left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS,$$

gde su u i v neprekidne funkcije i imaju neprekidne izvode do drugog reda u oblasti D. Simboli Δu i Δv znače Laplaceove operatore u prostoru.

1488. Neka je $u(x, y, z)$ — harmonijska funkcija u nekoj oblasti V i neka se u oblasti V nalazi sfera $\bar{S}$ sa centrom u tački $M(x_1, y_1, z_1)$ poluprečnika R. Dokazati da je

$$u(x_1, y_1, z_1)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\bar{S}} u\,dS.$$

Glava V

VEKTORSKA ANALIZA I TEORIJA POLJA

§ 1. Vektorska analiza

1° Vektorska funkcija realne promenljive. Funkcija $t\to\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$, koja preslikava skup realnih brojeva $D\subset R$ u skup trodimenzionalnih vektora V^3 u oznakama $\vec{a}=\vec{a}(t)=a_1(t)\vec{i}+a_2(t)\vec{j}+a_3(t)\vec{k}$, naziva se vektorska funkcija realne promenljive.

2° Hodograf. Skup krajnjih tačaka vektora $\vec{a}$ kojima je početak data tačka O, zove se *hodograf* vektorske funkcije $\vec{a}=\vec{a}(t)$. Tačka O je pol hodografa.

Hodograf vektorske funkcije $\vec{r}=\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ je kriva u prostoru a jednačina $\vec{r}=\vec{r}(t)$ je njena vektorska jednačina. Hodograf vektorske funkcije $\vec{r}=\vec{r}(u, v)=x(u, v)\vec{i}+y(u, v)\vec{j}+z(u, v)\vec{k}$, sa dve realne promenljive, je površ u prostoru, a jednačina $\vec{r}=\vec{r}(u, v)$ je njena vektorska jednačina.

3° Granična vrednost. Kaže se da vektorska funkcija $\vec{a}=\vec{a}(t)$ ima za graničnu vrednost vektor $\vec{b}$, kad $t\to a$, ako za proizvoljan broj $\varepsilon>0$ postoji broj $\delta=\delta(\varepsilon)$ takav da je

$$\left|\vec{a}(t)-\vec{b}\right|<\varepsilon$$

kad god je ispunjena nejednakost $|t-a|<\delta$. Tada se piše

$$\lim_{t\to a}\vec{a}(t)=\vec{b}$$

4° Neprekidnost. Funkcija $\vec{a}=\vec{a}(t)$, koja je definisana u tački t_0, je neprekidna u toj tački ako je

$$\lim_{t\to t_0}\vec{a}(t)=\vec{a}(t_0).$$

5° P r i r a š t a j i i z v o d. Razlika $\vec{a}(t+\Delta t)-\vec{a}(t)$ se naziva priraštaj funkcije $\vec{a}(t)$ u tački t koji odgovara priraštaju nezavisno promenljive Δt. Označava se sa $\Delta\vec{a}(t)$.

$$\Delta\vec{a}(t)=\vec{a}(t+\Delta t)-\vec{a}(t).$$

Izvod funkcije $\vec{a}(t)$ u tački t, naziva se vektor

$$\vec{a}'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{a}(t)}{\Delta t},$$

ako ovaj limes postoji.

Ako je $\vec{a}=\{a_1(t),\ a_2(t),\ a_3(t)\}$ tada je

$$\vec{a}'(t)=\frac{d\vec{a}}{dt}=\{a_1'(t),\ a_2'(t),\ a_3'(t)\}.$$

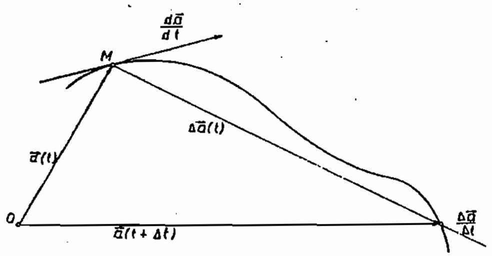
Geometrijsko značenje vektora $\Delta\vec{a}(t)$, $\frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}$ i $\frac{d\vec{a}}{dt}$ prikazano je na sl. 6.

6° D i f e r e n c i j a l. Ako se priraštaj $\Delta\vec{a}(t)$ može napisati u obliku

$$\Delta\vec{a}(t)=\vec{D}(t)\Delta t+\vec{\varepsilon}(\Delta t).$$

gde je $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{\varepsilon}(\Delta t)}{\Delta t}=0$, tada se vektor $\vec{D}(t)\Delta t$ naziva diferencijal funkcije $\vec{a}(t)$ u tački t i označava se sa $d\vec{a}(t)$

$$d\vec{a}=d\vec{a}(t)=\vec{D}(t)\,\Delta t.$$



Sl. 6

Izvodi i diferencijali višeg reda slično se definišu kao kod funkcija realne promenljive.

7° P a r c i j a l n i i z v o d i i d i f e r e n c i j a l i v e k t o r s k e f u n k c i j e v i š e p r o m e n l j i v i h. Neka je $\vec{a}=\vec{a}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ vektorska funkcija od n realnih promenljivih $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

Razlika

$$\vec{a}(t_1, t_2, \ldots, t_{i-1}, t_i+\Delta t_i, t_{i+1}, \ldots, t_n)-\vec{a}(t_1, t_2, \ldots, t_n)=\Delta_{t_i}\vec{a}$$

zove se parcijalni priraštaj po promenljivoj t_i.

Parcijalni izvod prvog reda $\frac{\partial\vec{a}}{\partial t_i}$, po promenljivoj t_i se definiše sa

$$\frac{\partial\vec{a}}{\partial t_i}=\lim_{\Delta t_i\to 0}\frac{\Delta_{t_i}\vec{a}}{\Delta t_i},$$

a totalni diferencijal $d\vec{a}$ sa

$$d\vec{a}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\vec{a}}{\partial t_i}\,dt_i.$$

Slično kao i u realnoj analizi, i ovde se definišu viši parcijalni izvodi $\frac{\partial^2\vec{a}}{\partial t_i^2}$, $\frac{\partial^2\vec{a}}{\partial t_i\partial t_j}$, $\frac{\partial^3\vec{a}}{\partial t_i^3}$, ... i viši diferencijali $d^2\vec{a}$, $d^3\vec{a}$ itd.

8° N e o d r e đ e n i i n t e g r a l. Primitivna funkcija ili neodređeni integral neprekidne funkcije $\vec{a}(t)$ naziva se funkcija $\vec{b}(t)$ za koju je

$$\frac{d\vec{b}(t)}{dt}=\vec{a}(t).$$

Tada se piše

$$\int\vec{a}(t)\,dt=\vec{b}(t)+\vec{c}$$

gde je $\vec{c}$ proizvoljni konstantni vektor.

9° O d r e đ e n i i n t e g r a l. Neka je $\vec{a}(t)$ ograničena funkcija na segmentu $[t_0, T]$, i neka tačke

$$t_0<t_1<\cdots<t_{i-1}<t_i<\cdots<t_n=T$$

dele ovaj segment na n segmenata $[t_{i-1}, t_i]$. Za $\tau_i\in[t_{i-1}, t_i]$, vektor

$$\vec{I}=\sum_{i=1}^{n}\vec{a}(\tau_i)\,(t_i-t_{i-1})$$

se naziva *integralna suma*.

Ako za bilo kakvu podelu segmenta $[t_0, T]$ postoji

$$\lim_{\max|t_i-t_{i-1}|\to 0}\vec{I}$$

onda se ovaj limes naziva *određeni integral* funkcije $\vec{a}(t)$ u granicama od t_0 do T i obeležava se sa $\int_{t_0}^{T}\vec{a}(t)\,dt$, tj. tada je

$$\int_{t_0}^{T}\vec{a}(t)\,dt=\lim_{\max|t_i-t_{i-1}|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\vec{a}(\tau_i)(t_i-t_{i-1}).$$

Ako je $\vec{b}(t)$ primitivna funkcija funkcije $\vec{a}(t)$ tada je

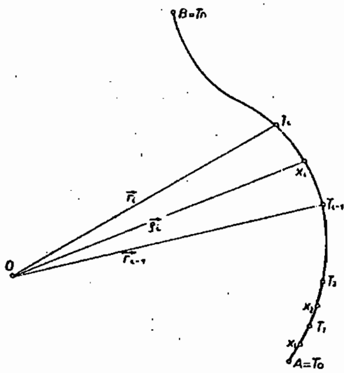
$$\int_{t_0}^{T}\vec{a}(t)\,dt=\vec{b}(T)-\vec{b}(t_0) \text{ (Newton-Leibnizov obrazac).}$$

10° V e k t o r s k i   k r i v o l i n i j s k i   i n t e g r a l. Neka je orijentisani luk $L=\widehat{AB}$ krive $\vec{r}=\vec{r}(t)$ podeljen tačkama $T_i\ (i=0,1,\cdots,n)$ čiji su vektori položaja $\vec{r}_i$, tako da $T_0=A$ odgovara parametru t_0 a tačka $T_n=B$ parametru t_n gde je $t_0<t_1<\cdots<t_n$ (sl. 7).

Neka je $\varphi(\vec{r})$ skalarna ili vektorska funkcija definisana na luku L i neka je X_i tačka luka $\widehat{T_{i-1}T_i}$ a ϱ_i njen vektor položaja. Izraz

$$I=\sum_{i=1}^{n}\varphi(\vec{\varrho}_i)*(\vec{r}_i-\vec{r}_{i-1}),$$

se naziva integralna suma, gde $*$ označava množenje skalara sa vektorom—ako je $\varphi(\vec{r})$ skalarna funkcija, skalarni ili vektorski proizvod — ako je $\varphi(\vec{r})=\vec{\varphi}(\vec{r})$ vektorska funkcija.



Sl. 7.

Krivolinijski integral po luku L, u oznaci $\int_L \varphi(\vec{r})*d\vec{r}$, se definiše sa

$$\int_L \varphi(\vec{r})*d\vec{r}=\lim_{\max|\vec{r}_i-\vec{r}_{i-1}|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\varphi(\vec{\varrho}_i)*(\vec{r}_i-\vec{r}_{i-1}),$$

ako ovaj limes postoji po svakom nizu podela luka L.

Zavisno od toga da li je $\varphi(\vec{r})$ skalarna ili vektorska funkcija i da li $*$ označava množenje skalara i vektora ili skalarni odnosno vektorski proizvod vektora, imamo tri vrste krivolinijskog integrala:

1) $\int_L \varphi(\vec{r})\,d\vec{r}$, 2) $\int_L \vec{\varphi}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$ i 3) $\int_L \vec{\varphi}(\vec{r})\times d\vec{r}$.

Prvi i treći integral su *vektorski krivolinijski integrali.*

11° V e k t o r s k i   p o v r š i n s k i   i n t e g r a l. Neka je S orijentisani deo površi $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ i neka je $\varphi(\vec{r})$ neprekidna skalarna ili vektorska funkcija definisana na površi S. Pretpostavimo da je S jednom mrežom krivih podeljena na delove S_i.

Neka je $\vec{\sigma}_i=\sigma_i\vec{n}$ vektor površine dela S_i, gde je $\vec{n}$ jedinični vektor normale tog dela površi a σ_i površina površi S_i. Tada se može formirati integralna suma

$$\sum_i \varphi(\vec{\varrho}_i)*\vec{\sigma}_i$$

gde je $\vec{\varrho}_i$ vektor položaja neke tačke sa dela S_i, a $*$ može imati ista značenja kao u 10°.

Površinski integral funkcije $\varphi(\vec{r})$ *po površi* S, u oznaci $\iint_S \varphi(\vec{r})*d\vec{\sigma}$, se definiše sa

$$\iint_S \varphi(\vec{r})*d\vec{\sigma}=\lim_{\max\sigma_i\to 0}\sum \varphi(\vec{\varrho}_i)*\vec{\sigma}_i.$$

Ako je površ S zatvorena ovaj integral se označava sa $\oiint_S \varphi(\vec{r})*d\vec{\sigma}$. Zavisno od toga da li je $\varphi(\vec{r})$ skalarna ili vektorska funkcija i da li $*$ označava množenje

skalara i vektora ili skalarni proizvod, odnosno vektorski proizvod dva vektora, imamo tri vrste površinskog integrala:

1) $\iint_S \varphi(\vec{r})\,d\vec{\sigma}$, 2) $\iint_S \vec{\varphi}(\vec{r})\cdot d\vec{\sigma}$ i 3) $\iint_S \vec{\varphi}(\vec{r})\times d\vec{\sigma}$.

Prvi i treći integral su vektorski površinski integrali.

12° S k a l a r n o   p o l j e. Skalarna funkcija $u(\vec{r})=u(x,y,z)$, gde je $\vec{r}$ vektor položaja tačke $M(x,y,z)$, zajedno za svojom oblasti definisanosti, zove se *skalarno polje.*

13° G r a d i j e n t. Vektor $\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$ se zove *gradijent* skalarnog polja $u(x,y,z)$ u tački $M(x,y,z)$ i označava se sa grad u

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

14° I z v o d   p o   d a t o m   p r a v c u. Neka je l pravac određen jediničnim vektorom $\vec{l}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$. *Izvod funkcije* $u(x,y,z)$ *po datom pravcu* l u datoj tački $M(x,y,z)$, u oznaci $\frac{du}{dl}$, je skalarni proizvod grad $u\cdot\vec{l}$, tj.

$$\frac{du}{dl}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

15° V e k t o r s k o   p o l j e. *Vektorska* funkcija $\vec{a}(\vec{r})=\vec{a}(x,y,z)$, zajedno sa svojom oblašću definisanosti, zove se *vektorsko polje.*

Vektorska linija vektorskog polja je kriva kod koje je u svakoj svojoj tački $\vec{r}$ tangenta paralelna sa vektorom $\vec{a}(\vec{r})$. Vektorske linije su određene jednačinom

$$\vec{a}\times d\vec{r}=0.$$

16° P r o s t o r n i   i z v o d. Neka je S spoljašnja strana zatvorene površi koja može da se „steže" i koja ograničava telo D čija je zapremina V. Neka je, dalje, $\varphi(\vec{r})$ skalarna ili vektorska funkcija integrabilna na S.

Prostorni izvod funkcije $\varphi(\vec{r})$ *u tački* $A\in D$ zove se limes

$$\lim_{V\to 0}\frac{\oiint_S \varphi(\vec{r})*d\vec{\sigma}}{V},\quad A\in D$$

ako ovaj postoji. Pod $V\to 0$ se podrazumeva da maksimalna duž, koja je sadržana u D, teži nuli.

U zavisnosti od toga da li je $\varphi(\vec{r})$ skalarna ili vektorska funkcija $\vec{\varphi}(\vec{r})$ i kakvo je značenje množenja $*$ imamo sledeća tri prostorna izvoda, zajedno sa usvojenim nazivima i oznakama:

1) $$\lim_{V\to 0}\frac{\oiint_S \varphi(\vec{r})\,d\vec{\sigma}}{V}=\operatorname{grad}\varphi(\vec{r})\qquad \text{(gradijent funkcije } \varphi)$$

2) $$\lim_{V\to 0}\frac{\oiint_s \vec{\varphi}(\vec{r})\cdot d\vec{\sigma}}{V}=\operatorname{div}\vec{\varphi}\qquad\text{(divergencija vektora } \vec{\varphi})$$

3) $$\lim_{V\to 0}\frac{\oiint_s \vec{\varphi}(\vec{r})\times d\vec{\sigma}}{V}=\operatorname{rot}\vec{\varphi}\qquad\text{(rotor vektora } \vec{\varphi}).$$

1489. Odrediti hodograf vektorske funkcije $\vec{a}(t)$ koja ima: 1° Konstantan pravac i smer. 2° Konstantan modul.

1490. Šta je hodograf vektorske funkcije: 1° $\vec{r}=\cos t\,\vec{a}+\sin t\,\vec{b}$. 2° $\vec{r}=\operatorname{ch}t\,\vec{a}+\operatorname{sh}t\,\vec{b}$ gde su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dati ortogonalni vektori.

1491. Pokazati da je hotograf vektorske funkcije $\vec{r}(t)=t^2\vec{a}+t\vec{b}+\vec{c}$ ravna kriva i naći vektorsku jednačinu te ravni, ako su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ konstantni i $\vec{a}\times\vec{b}\neq 0$,

1492. Vektor položaja pokretne tačke u proizvoljnom vremenskom trenutku t dat je sa $\vec{r}(t)=\vec{i}-4t^2\vec{j}+3t^2\vec{k}$, gde su $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ ortovi koordinatnih osa prostornog koordinatnog sistema $Oxyz$. Odrediti: 1° Putanju tačke. 2° Brzinu. 3° Ubrzanje.

1493. Data je jednačina kretanja $\vec{r}(t)=2\cos t\,\vec{i}+2\sin t\,\vec{j}+3t\,\vec{k}$. Odrediti trajektoriju kretanja, brzinu i ubrzanje kretanja, kao i intenzitete brzine i ubrzanja u trenucima $t=0$ i $t=\dfrac{\pi}{2}$.

1494. Jednačina kretanja projektila bez trenja vazduha je $\vec{r}=t\vec{v}_0-\dfrac{gt^2}{2}\vec{k}$, gde je v_0 početna brzina. Naći brzinu i ubrzanje u proizvoljnom trenutku t.

1495. Vektor položaja pokretne tačke kao funkcija vremena, dat je jednačinom $\vec{r}(t)=\cos\omega t\,\vec{a}+\sin\omega t\,\vec{b}$, gde su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vektorske konstante a ω skalarna konstanta. Odrediti vektor brzine i ubzanja ove tačke i pokazati da je putanja tačke elipsa sa poluosama $2|\vec{a}|$ i $2|\vec{b}|$.

1496. Materijalna tačka mase $m=1$ kreće se pod dejstvom privlačne sile $-\lambda\vec{r}$ i sile trenja $-\alpha\vec{v}$, gde su λ i α $(\alpha^2>4\lambda)$ konstante a $\vec{v}$ brzina materijalne tačke, čiji je vektor položaja $\vec{r}$. Odrediti vektor položaja u funkciji vremena t.

1497. Naći intenzitet brzine tačke na krugu, poluprečnika a, koji se kotrlja po pravoj sa stalnom uglovnom brzinom ω tako da mu centar ima stalnu brzinu v_0.

Dokazati sledeća pravila diferenciranja:

1498. $\dfrac{d}{dt}(\lambda\vec{a})=\lambda\dfrac{d\vec{a}}{dt}$, gde je λ konstantni skalar.

1499. $\dfrac{d}{dt}(\varphi\vec{a})=\dfrac{d\varphi}{dt}\vec{a}+\varphi\dfrac{d\vec{a}}{dt}$, gde je $\varphi=\varphi(t)$ skalarna funkcija.

1500. $\dfrac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{b})=\dfrac{d\vec{a}}{dt}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\dfrac{d\vec{b}}{dt}$.

1501. $\dfrac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{b})=\dfrac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b}+\vec{a}\times\dfrac{d\vec{b}}{dt}$.

1502. $\dfrac{d}{dt}\vec{a}[\varphi(t)]=\dfrac{d\vec{a}}{d\varphi}\dfrac{d\varphi}{dt}$.

1503. $\vec{a}\cdot\dfrac{d\vec{a}}{dt}=0$, gde je $|\vec{a}|=\text{const}$.

Proveriti jednakosti:

1504. $\dfrac{d}{dt}(\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}))=\dfrac{d\vec{a}}{dt}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{a}\cdot\left(\dfrac{d\vec{b}}{dt}\times\vec{c}\right)+\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\dfrac{d\vec{c}}{dt}\right)$.

1505. $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{a}\cdot\left(\dfrac{d\vec{a}}{dt}\times\dfrac{d^2\vec{a}}{dt^2}\right)\right)=\vec{a}\cdot\left(\dfrac{d\vec{a}}{dt}\times\dfrac{d^3\vec{a}}{dt^3}\right)$.

1506. Dokazati da je $\vec{a}\cdot d\vec{a}=a\,da$ $(a=|\vec{a}|)$ za svaku vektorsku funkciju $\vec{a}$.

1507. Ako je $\vec{a}\times\dfrac{d\vec{a}}{dt}=0$, dokazati da vektor $\vec{a}$ ima konstantan pravac.

1508. Dokazati da iz jednakosti $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{r}f(r)$ sledi jednakost $\vec{r}\times\dfrac{d\vec{r}}{dt}=\vec{c}$.

1509. Ako vektor $\vec{a}$ ima konstantan pravac i ako je $\dfrac{d}{dt}(\vec{a}+\vec{b})=0$, dokazati da je $|\vec{a}\times\vec{b}|^2=c|\vec{a}|^2$ $(c=\text{const})$.

1510. Neka je $\vec{e}=\vec{e}(\varphi)$ jedinični vektor u ravni xOy čiji je početak u tački O i koji zaklapa ugao φ sa pozitivnim delom x-ose. Dokazati da je $\dfrac{d\vec{e}}{d\varphi}=\vec{e}\left(\varphi+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

1511. Ako je $\vec{a}(t)\times\dfrac{d\vec{a}(t)}{dt}=0$, dokazati da je ort vektora $\vec{a}(t)$ konstantan vektor.

1512. Ako su vektori $\vec{a}(t_1)$ i $\vec{a}(t_2)$ normalni na vektor $\vec{b}$ $(t_1<t_2)$, pokazati da postoji bar jedna vrednost t' $(t_1<t'<t_2)$ takva da je vektor $\vec{a}(t')$ normalan na vektoru $\vec{b}$.

1513. Odrediti ekviskalarne površi (nivo površi) skalarne funkcije $u(\vec{r})=\vec{a}\cdot\vec{r}$ ($\vec{a}$ konstantni vektor a $\vec{r}$ vektor položaja tačke skalarnog polja $u(\vec{r})$).

1514. Naći gradijent skalarnog polja $u(\vec{r})=x^3+y^3+z^3-3xyz$ u tački $\vec{r}_0=(2, 1, 1)$. U kojim tačkama je $\operatorname{grad} u(\vec{r})=0$ a u kojim je $\operatorname{grad} u(\vec{r})\cdot\vec{k}=0$?

1515. Dokazati da je $\dfrac{du}{d\vec{e}}=\lim\limits_{\varrho\to 0}\dfrac{u(\vec{r}+\varrho\vec{e})-u(\vec{r})}{\varrho}$.

Ako je $\vec{r}$ vektor položaja pokretne tačke $M(x, y, z)$ a $\vec{a}$ i $\vec{b}$ konstantni vektori, pokazati da je:

1516. $\operatorname{grad}\sqrt{(\vec{a}\times\vec{r})^2}=\dfrac{(\vec{a}\times\vec{r})\times\vec{a}}{\sqrt{(\vec{a}\times\vec{r})^2}}$.

1517. $\operatorname{grad}\dfrac{(\vec{a}\cdot\vec{r})}{r^3}=\dfrac{\vec{a}}{r^3}-\dfrac{3\vec{r}(\vec{a}\cdot\vec{r})}{r^5}$.

1518. $\operatorname{grad}\dfrac{(\vec{a}\cdot\vec{r})}{(\vec{b}\cdot\vec{r})}=\dfrac{\vec{r}\times(\vec{a}\times\vec{b})}{(\vec{b}\cdot\vec{r})^2}$.

1519. $\operatorname{grad}|\vec{a}\times\vec{r}|^2=2[(\vec{a}\times\vec{r})\times\vec{a}]$.

1520. Dokazati da je:

1° $\operatorname{grad}(c_1 u+c_2 v)=c_1\operatorname{grad}u+c_2\operatorname{grad}v$;

2° $\operatorname{grad}(uv)=u\operatorname{grad}v+v\operatorname{grad}u$;

3° $\operatorname{grad}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\operatorname{grad}u-u\operatorname{grad}v}{v^2}$.

4° $\operatorname{grad}\varphi(u)=\varphi'(u)\operatorname{grad}u$.

1521. Naći izvod funkcije $u(\vec{r})=3x^2-3y^2+z^2-2xyz$ u tački $\vec{r}_0=(1, 1, 0)$ po pravcu $\vec{e}=(0, 0, -1)$.

1522. Naći $\dfrac{du}{d\vec{e}}$ u tački $\vec{r}_0=(1, 1, 1)$ ako je $u=xyz$ a $\vec{e}=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$.

Izračunati $|\operatorname{grad}u|$ u toj tački.

1523. Naći izvod skalarnog polja $u(\vec{r})=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$ u tački $\vec{r}_0$ po pravcu $\vec{r}_0$.

Kada će biti $\dfrac{du}{d\vec{r}_0}=\operatorname{grad}u(\vec{r}_0)$?

1524. Naći izvod funkcije $u(\vec{r})=\vec{a}\cdot\vec{r}$ ($\vec{a}$—konstantan vektor) u pravcu datog vektora $\vec{e}$.

1525. Ako je $u(\vec{r})=(\vec{a}\times\vec{r})\cdot(\vec{b}\times\vec{r})$, dokazati da je

$$\frac{du}{d\vec{e}}=(\vec{a}\times\vec{r})\cdot(\vec{b}\times\vec{e})+(\vec{b}\times\vec{r})\cdot(\vec{a}\times\vec{e})$$

gde su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ konstatni vektori a $\vec{e}$ dati jedinični vektor.

1526. Pokazati da funkcije $u_1(\vec{r})=|\vec{r}|$ i $u_2(\vec{r})=|\vec{r}|^2$ imaju iste ekviskalarne površi ali različite gradijente.

1527. Tačka se kreće konstantnom brzinom $\vec{V}_c$. Odrediti vektorsku jednačinu putanje ove tačke.

1528. Odrediti vektorske linije vektorskog polja $\vec{a}(\vec{r})=\dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$.

1529. Dato je vektorsko polje $\vec{a}=\vec{c}\times\vec{r}$ ($\vec{c}$ — konstantni vektor). Pokazati da su vektorske linije ovoga polja krugovi koji leže u ravnima upravnim na vektoru $\vec{c}$ a čiji su centri na pravoj $\vec{r}=t\vec{c}$.

Pokazati da je:

1530. $\int\vec{a}\cdot d\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}-\int\vec{b}\cdot d\vec{a}$.

1531. $\int\vec{a}\times d\vec{b}=\vec{a}\times\vec{b}+\int\vec{b}\times d\vec{a}$.

1532. $\displaystyle\int\vec{a}\times\frac{d^2\vec{a}}{dt^2}dt=\vec{a}\times\frac{d\vec{a}}{dt}+\vec{c}$ $\quad(\vec{c}=\text{const})$.

1533. Pokazati da je vektor površine koju ograničava zatvorena ravna kriva c dat sa

$$\vec{S}=\frac{1}{2}\oint_c\vec{r}\times d\vec{r}.$$

Dokazati da je:

1534. $\oint\limits_c u(\vec{r})\,d\vec{r}=\iint\limits_S d\vec{\sigma}\times\operatorname{grad}u$, gde c ograničava površ S.

1535. $\oint\limits_S\vec{r}\times d\vec{r}=2\iint\limits_S d\vec{\sigma}$, gde c ograničava deo površi S.

1536. $\oiint\limits_S\dfrac{du}{d\vec{u}}\cdot d\vec{\sigma}=0$, gde je $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ a $\vec{u}$ jedinični vektor spoljašnje normale.

1537. $\oiint\limits_S \frac{\vec r}{r^3}\cdot d\vec\sigma = 4\pi$, gde je S spoljašnja strana sfere poluprečnika a sa centrom u koordinatnom početku.

1538. $\oiint\limits_S (\vec a\cdot\vec r)\,d\vec\sigma = V\vec a$, gde je V zapremina obuhvaćena sa površi S.

1539. $\oiint\limits_S \operatorname{rot}\vec a\cdot d\vec\sigma = 0.$

§ 2. Elementi teorije polja

1° Operator nabla. Hamiltonov operator ili operator nabla, označava se sa ∇, je simbolični vektor sa koordinatama $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, tj.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec i + \frac{\partial}{\partial y}\vec j + \frac{\partial}{\partial z}\vec k.$$

Ako se pretpostavi da su skalarno polje $u = u(x, y, z)$ i vektorsko polje $\vec A = (A_1, A_2, A_3)$ neprekidna zajedno sa njihovim parcijalnim izvodima u datoj tački, onda u toj tački važe jednakosti

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec i + \frac{\partial u}{\partial y}\vec j + \frac{\partial u}{\partial z}\vec k, \quad \operatorname{div} A = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot}\vec A = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

pa je prema tome:
$\operatorname{grad} u = \nabla u$, $\operatorname{div}\vec A = \nabla\cdot A$, $\operatorname{rot}\vec A = \nabla\times\vec A$.
Operator Δ koji se definiše sa $\Delta u = \nabla\,\nabla\, u$ zove se Laplasov operator ili laplasijan.

Jednačina $\Delta u = 0$ naziva se *Laplaceova jednačina* a funkcija u, koja je zadovoljava, *harmonijska funkcija*.
Sem ovih operatora uvodi se i sledeći operator

$$\vec A\nabla = A_1\frac{\partial}{\partial x} + A_2\frac{\partial}{\partial y} + A_3\frac{\partial}{\partial z}$$

koji primenjen na neki vektor $\vec X$ daje

$$(\vec A\nabla)\vec X = A_1\frac{\partial\vec x}{\partial x} + A_2\frac{\partial\vec x}{\partial y} + A_3\frac{\partial\vec x}{\partial z}.$$

2° Fluks i cirkulacija vektorskog polja. Ako vektor $\vec A(\vec r)$ inducira vektorsko polje u nekoj oblasti V, onda se *fluks vektorskog polja kroz određenu stranu date površi S* iz oblasti V, koja se karakteriše jediničnim vektorom normale $\vec n(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ naziva integral.

$$\iint\limits_S \vec A\,\vec n\,dS = \iint\limits_S (A_x\cos\alpha + A_y\cos\beta + A_z\cos\gamma)\,dS.$$

Formula Ostrogradskog izražena vektorski ima oblik

$$\iint\limits_S \vec A\,\vec n\,dS = \iiint\limits_V \operatorname{div}\vec A\,dx\,dy\,dz,$$

gde je S površ koja ograničava oblast V, a $\vec n$ jedinični vektor spoljne normale površi S.

Cirkulacija vektora $\vec A(\vec r)$ duž neke zatvorene krive c (rad polja) naziva se broj

$$\oint\limits_c \vec A\,d\vec r = \oint\limits_c A_x dx + A_y dy + A_z dz.$$

Vektorski oblik Stocesove formule je

$$\oint\limits_c \vec A\,d\vec r = \iint\limits_S \vec n\operatorname{rot}\vec A\,dS,$$

gde je c zatvorena kriva, koja ograničava površ S, pri čemu pravac normale $\vec n$ površi S mora biti izabran tako, da se za posmatrača, koji stoji na površi S, a glava mu je u pravcu normale, obilazak konture c vrši suprotno kretanju kazaljke na časovniku (u pravouglom sistemu koordinata).

3° Vrste vektorskih polja. Vektorsko polje $\vec A$ na jednostruko povezanoj oblasti za koje je

$$\operatorname{rot}\vec A = 0 \quad \text{i} \quad \operatorname{div}\vec A \neq 0$$

naziva se *potencijalno*. U tom slučaju postoji funkcija u, koja se naziva *potencijal polja* $\vec A$, takva da je

$$\operatorname{grad} u = \vec A.$$

Ako je potencijal u jednoznačna funkcija, onda je

$$\int\limits_{AB} \vec A\,d\vec r = u(B) - u(A)$$

Vektorsko polje $\vec A$ naziva se *salenoidalno* ako je

$$\operatorname{div}\vec A = 0.$$

u svim tačkama polja. Njegov *vektorski potencijal* određuje se iz jednakosti

$$\vec A = \operatorname{rot}\vec u,$$

gde je $\vec u$ neko novo vektorsko polje.

Vektorsko polje $\vec{A}$ za koje su ispunjeni uslovi

$$\operatorname{rot}\vec{A}=0 \quad \text{i} \quad \operatorname{div}\vec{A}=0$$

naziva se Laplaceovo.

Vektorsko polje $\vec{A}$ za koje je ispunjen uslov

$$\vec{A}\operatorname{rot}\vec{A}=0$$

naziva se *lamelarno*.

Napisati u razvijenoj formi sledeće izraze

1540. 1° $\nabla(f\cdot\varphi)$; 2° $\nabla(f\vec{a})$; 3° $\nabla\times(f\vec{a})$.

1541. Pokazati da je

1° $\operatorname{rot}\vec{c}=0$, gde je $\vec{c}$ konstantan vektor;

2° $\operatorname{rot}(c_1\vec{a}_1+c_2\vec{a}_2)=c_1\operatorname{rot}\vec{a}_1+c_2\operatorname{rot}\vec{a}_2$;

3° $\operatorname{rot}(u\vec{a})=u\operatorname{rot}\vec{a}+\operatorname{grad}u\times\vec{a}$.

Ako je $\vec{r}$ vektor položaja tačke a r njegov intenzitet naći:

1542. 1° $\nabla(r)$; 2° $\nabla(\vec{r})$; 3° $\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$; 4° $\nabla\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)$.

1543. 1° $\nabla(\vec{r}_0)$; 2° $\nabla\left(\frac{\vec{r}}{r^2}\right)$; 3° $\nabla(r^2)$. **1544.** 1° $\nabla\times\vec{r}$; 2° $\nabla\times\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$.

1545. 1° Δr; 2° $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$, gde je Δ Laplaceov operator.

Dokazati sledeće jednakosti:

1546. $\operatorname{grad}(\vec{u}\,\vec{v})=\vec{u}\times\operatorname{rot}\vec{v}+\vec{v}\times\operatorname{rot}\vec{u}+(\vec{u}\nabla)\vec{v}+(\vec{v}\nabla)\vec{u}$.

1547. $\nabla(\vec{u}\times\vec{v})=\operatorname{div}(\vec{u}\times\vec{v})=\vec{v}\operatorname{rot}\vec{u}-\vec{u}\operatorname{rot}\vec{v}$.

1548. $\nabla\times(\vec{u}\times\vec{v})=(\vec{v}\nabla)\vec{u}-(\vec{u}\nabla)\vec{v}-\vec{v}\operatorname{div}\vec{u}+\vec{u}\operatorname{div}\vec{v}$.

1549. Izračunati $(\vec{a}\times\nabla)\times\vec{b}$.

Dokazati sledeće jednakosti:

1550. $\vec{a}\nabla(\vec{b}\operatorname{grad}f)-\vec{b}\nabla(\vec{a}\operatorname{grad}f)=(\vec{a}\nabla\vec{b}-\vec{b}\nabla\vec{a})\operatorname{grad}f$.

1551. $\vec{c}[\operatorname{grad}(\vec{c}\,\vec{a})+\operatorname{rot}(\vec{c}\times\vec{a})]=\operatorname{div}\vec{a}$, gde je $\vec{c}$ konstantan vektor.

1552. $\operatorname{Grad}\left(\frac{\vec{a}\,\vec{r}}{r^3}\right)+\operatorname{rot}\left(\frac{\vec{a}\times\vec{r}}{r^3}\right)=0$, gde je $\vec{a}$ konstantan vektor, $\vec{r}$ vektor položaja tačke a r njegov intenzitet.

1553. Izračunati $(\vec{a}\nabla)(\vec{b}\,\vec{c})$.

1554. Pokazati da je $(\vec{a}\times\nabla)\vec{r}=0$ ako je $\vec{r}$ vektor položaja tačke.

1555. Izračunati $(\vec{a}\times\nabla)\times\vec{r}$ ako je $\vec{r}$ vektor položaja tačke.

1556. Dokazati da je $\operatorname{rot}f(r)\vec{r}=0$, ako je $r=|\vec{r}|$.

1557. Ako je $\vec{c}$ konstantan i

$$\vec{A}=\operatorname{grad}(\vec{c}\,\vec{a})+\operatorname{rot}(\vec{c}\times\vec{a})$$

izračunati projekciju vektora $\vec{A}$ na vektor $\vec{c}$.

1558. Ako je $\psi=\psi(x,z,t)$, $\vec{A}=\frac{\partial\psi}{\partial z}\vec{i}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\vec{k}$, $B=-\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}\vec{j}$, kakav dopunski uslov mora zadovoljiti funkcija ψ da bi bilo $\operatorname{rot}\vec{B}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$,

$$\operatorname{rot}\vec{A}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\quad \operatorname{div}\vec{A}=0,\quad \operatorname{div}\vec{B}=0.$$

1559. Ako su f i φ skalarne dvaput diferencijabilne funkcije izvesti obrazac za $\nabla^2 f\varphi=\Delta f\varphi$.

Dokazati sledeće identitete (smisao oznaka je očigledan):

1560. $\nabla^2(\vec{A}\vec{B})=\vec{A}\nabla^2\vec{B}+\vec{B}\nabla^2\vec{A}+2\nabla_{\vec{A}}\nabla_{\vec{B}}(\vec{A}\vec{B})$.

1561. $\nabla^2(\vec{A}\times\vec{B})=(\vec{A}\times\nabla^2\vec{B})-(\vec{B}\times\nabla^2\vec{A})+2\nabla_{\vec{A}}\nabla_{\vec{B}}(\vec{A}\times\vec{B})$.

1562. $\nabla^2(\vec{A}\vec{B}\vec{C})=(\vec{A}\times\vec{B})\nabla^2\vec{C}+(\vec{B}\times\vec{C})\nabla^2\vec{A}+(\vec{C}\times\vec{A})\nabla^2\vec{B}+2\nabla_{\vec{A}}\nabla_{\vec{B}}(\vec{A}\vec{B}\vec{C})+$ $+2\nabla_{\vec{B}}\nabla_{\vec{C}}(\vec{A}\vec{B}\vec{C})+2\nabla_{\vec{C}}\nabla_{\vec{A}}(\vec{A}\vec{B}\vec{C})$.

1563. 1° $\iiint\limits_V \varphi\operatorname{div}\vec{a}\,dV=\oiint\limits_S \varphi\vec{a}\,d\vec{S}-\iiint\limits_V \vec{a}\operatorname{grad}d\varphi\,dV$;

2° $\iiint\limits_V \vec{a}\operatorname{rot}\vec{b}\,dV=\iiint\limits_V \vec{b}\operatorname{rot}\vec{a}\,dV-\oiint\limits_S d\vec{S}(\vec{a}\times\vec{b})$,

gde su φ, $\vec{a}$ i $\vec{b}$ proizvoljne neprekidne funkcije a S je zatvorena površ koja ograničava oblast V.

1564. $\displaystyle\oiint_S \left[\varphi\nabla\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\nabla\varphi\right]d\vec{S}+\iiint_V \frac{1}{r}\nabla^2\varphi\, dV=0$, gde je r rastojanje tačke M od koordinatnog početka O koja leži izvan prostora V ograničenog zatvorenom površinom S a φ je skalarna funkcija tačke M.

1565. $\displaystyle\oiint_S \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}dS=\iiint_V (\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi+\varphi\Delta\psi)\,dV,$

gde su φ i ψ skalarne funkcije tačke $M\in V$, a $\dfrac{\partial\psi}{\partial n}$ izvod funkcije ψ u pravcu normale površi.

1566. Koju osobinu mora imati vektor $\vec{a}$ da bi za proizvoljnu zatvorenu površ S važila relacija

$$\oiint_S (\vec{c}\, d\vec{S})\,\vec{a}=\oiint_S d\vec{S}(\vec{a}\,\vec{c}),$$

gde je $\vec{c}$ konstantan vektor?

1567. Ako je $\vec{a}$ konstantan vektor a S zatvorena površ koja obuhvata zapreminu V, pokazati da je $\displaystyle\oiint_S (\vec{r}\times\vec{a})\times d\vec{S}=2V\vec{a}$.

1568. Ako je $\vec{r}$ vektor položaja tačke u prostoru, $\vec{n}$ konstantni jedinični vektor a c zatvorena prostorna kriva, pokazati da je: $\vec{n}\cdot\displaystyle\oint_c \vec{r}\times d\vec{r}$ jednak dvostrukoj vrednosti površine ograničene projekcijom krive c na ravan $\vec{n}\,\vec{r}=p$, gde je $p\in R$.

1569. Transformisati krivolinijski integral $\displaystyle\oint_c d\vec{r}\times\vec{a}$ u površinski, ako je kriva c ograničena linija površi. Ispitati slučajeve

$1°$ $\vec{a}=\vec{r}$ i $2°$ $\vec{a}=\vec{r}\times\vec{c}$, gde je $\vec{c}$ konstantan vektor a $\vec{r}$ vektor položaja tačke polja.

1570. Izraziti preko ortova vektorsko polje $\vec{A}=\vec{c}\times\operatorname{grad}u$, ako je

$$u=\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\quad \text{i}\quad \vec{c}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}.$$

Izračunati fluks sledećih vektorskih polja:

1571. $\vec{A}=(x-2z)\vec{i}+(3z-4x)\vec{j}+(5x+y)\vec{k}$, kroz spoljnu stranu piramide čija su temena $(1,0,0)$; $(0,1,0)$; $(0,0,1)$; $(0,0,0)$.

1572. $\vec{A}=xy\vec{i}+yz\vec{j}+xz\vec{k}$, kroz spoljni deo sfere $x^2+y^2+z^2=1$ koji pripada prvom oktantu.

1573. $\vec{A}=x\vec{i}+2y\vec{j}-z\vec{k}$, kroz spoljnu stranu sfere $x^2+y^2+z^2=4$.

1574. $\vec{A}=yz\vec{i}-x\vec{j}-y\vec{k}$, kroz spoljnu stranu dela konusa $x^2+y^2=z^2$ ograničenog ravnima $z=0$ i $z=1$.

1575. $\vec{A}=x^2\vec{i}+x\vec{j}+xz\vec{k}$, kroz deo spoljne strane rotacionog paraboloida $y=x^2+z^2$, koji pripada prvom oktantu i ograničen je ravni $y=1$ $(0<y<1)$.

1576. $\vec{A}=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$, kroz površ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=\dfrac{z^2}{b^2}$, $0<z<b$ u pravcu spoljne normale.

1577. Izračunati fluks sile $\vec{a}=-f\dfrac{e}{R^2}\vec{r}_0$ kojom jedinično elektrostatičko opterećenje u polju O dejstvuje na opterećenje e u tački M sfere čiji je centar u O a poluprečnik R ($\vec{r}_0=$ ort $\overrightarrow{OM}$) kroz tu sfernu površ.

1578. Izračunati fluks vektora

$$\vec{A}=\sum_{i=1}^{n}\nabla\left(-\frac{e_i}{4\pi r_i}\right),$$

gde je e_i konstanta a r_i rastojanje tačke M_i (izvora) od promenljive tačke M, kroz zatvorenu površ S, koja sadrži tačke $M_i\,(i=1,2,\dots,n)$.

1579. Dokazati da fluks vektora $\vec{A}$ kroz površ S, zadatu jednačinom $\vec{r}=\vec{r}(u,v)\,[(u,v)\in D]$ iznosi

$$\iint_S \vec{A}\,\vec{n}\,dS=\iint_D\left(\vec{A}\,\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\,\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\right)du\,dv.$$

1580. Količina toplote, koja proteče u polju temperature u za jedinicu vremena kroz element površi dS, iznosi

$$dQ=-k\,\vec{n}\,\operatorname{grad}u\,dS,$$

gde je k koeficijent unutrašnje provodljivosti toplote a $\vec{u}$ jedinični vektor normale površi S. Odrediti količinu toplote, koju akumulira telo V u jedinici vremena. Koristeći brzinu porasta temperature, izvesti jednačinu koju zadovoljava temperatura tela (*jednačina termoprovodljivosti*).

Izračunati linijske integrale:

1581. $\displaystyle\int_c \vec{A}\,d\vec{r}$ gde je $\vec{A}=x\vec{i}+y\vec{j}+(x+y-1)\vec{k}$ dok je c deo prave između tačaka $(1,1,1)$ i $(2,3,4)$.

1582. $\int\limits_c \vec{A}\,d\vec{r}$, gde je $\vec{A}=\dfrac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{\sqrt{x(x-1)+y(y-1)+z(z-1)}}$, duž prave između tačaka $(1, 1, 1)$, $(4, 4, 4)$.

Naći rad koji izvrši sila:

1583. $\vec{A}=(2a-y)\vec{i}+(y-a)\vec{j}$, duž prvog luka cikloide $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

1584. $\vec{A}=x^2\vec{i}+y\vec{j}+\cos z\,\vec{k}$, duž zavojnice $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=2t$ od tačke $t=0$ do tačke $t=\dfrac{3}{2}\pi$.

1585. $\vec{A}=f(r)\vec{r}$ gde je f neprekidna funkcija duž luka AB.

1586. Prvo direktno a zatim pomoću Stocesove formule izračunati cirkulaciju vektorskog polja $\vec{A}=y^2\vec{i}-x^2\vec{j}+z^2\vec{k}$ duž konture c koja se dobija presekom paraboloida $x^2+z^2=1-y$ sa koordinatnim ravnima.

Izračunati cirkulaciju sledećih vektorskih polja:

1587. $\vec{A}=xz\vec{i}-yz^2\vec{j}+xy\vec{k}$, duž zatvorene linije $z^2=x^2-y^2+2a^2$, $x^2+y^2=a^2$.

1588. $\vec{A}=y\vec{i}-x\vec{j}+z\vec{k}$, duž zatvorene linije $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=z^2$ $(z>0)$.

1589. $\vec{A}=-y\vec{i}+x\vec{j}+c\vec{k}$ $(c\in R$: 1° duž kruga $x^2+y^2=1$, $z=0$; 2° duž kruga $(x-2)^2+y^2=1$, $z=0$.

1590. $\vec{A}=\nabla\left(\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}\right)$ duž konture c: 1° ako kontura c ne obilazi Oz osu; 2° ako je obilazi.

1591. Ravni stacionarni tok tečnosti karakteriše se vektorom brzine

$$\vec{w}=u(x, y)\vec{i}+v(x, y)\vec{j}.$$

Odrediti: 1° količinu tečnosti koja protekne kroz zatvorenu konturu c, koja ograničava oblast D (gubitak tečnosti); 2° cirkulaciju vektora brzine duž konture c? Kakve uslove moraju zadovoljiti funkcije u i v, ako je tečnost nestišljiva a tok bezvrtložan?

1592. Pokazati da je vektorsko polje $\vec{a}=f(r)\vec{r}$ potencijalno i naći njegov potencijal.

1593. Dato je vektorsko polje

$$\vec{A}=(y+z)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(x+y)\vec{k}.$$

Pokazati da je to polje potencijalno i naći njegov potencijal.

1594. Ako polje brzina $\vec{v}$ ima potencijal φ pokazati da i polje vektora ubrzanja $\vec{w}$ ima potencijal i naći taj potencijal.

1595. Odrediti konstante a, b i c tako da polje vektora

$$\vec{A}=(x+2y+az)\vec{i}+(bx-3y-z)\vec{j}+(4x+cy+2z)\vec{k}$$

bude potencijalno i naći njegov potencijal.

1596. Ako je $\vec{c}$ konstantan vektor, $\vec{r}$ vektor položaja tačke u prostoru, r njegov intenzitet, ispitati koja su od sledećih vektorskih polja

1° $(\vec{c}\,\vec{r})\vec{r}$; 2° $(\vec{c}\,\vec{r})\vec{c}$; 3° $\vec{r}\,\vec{c}+\dfrac{1}{r}(\vec{c}\,\vec{r})\vec{r}$; 4° $\vec{r}\,\vec{c}-\dfrac{1}{r}(\vec{c}\,\vec{r})\vec{r}$

— potencijalna i naći njihov potencijal.

1597. Pokazati da je polje vektora

$$\vec{v}=\begin{cases}\vec{r} & \text{za } r<a,\\ -a^3\nabla\left(\dfrac{1}{r}\right) & \text{za } r>a,\end{cases}$$

gde je $a\in R$, neprekidno i potencijalno u celom prostoru. Naći neprekidan potencijal $F(r)$ toga polja i izračunati $\int\limits_0^\infty \vec{v}\,d\vec{r}$.

1598. Pokazati da je vektorsko polje $\vec{A}=f(r)\vec{r}$ salenoidalno ako je $f(r)=\dfrac{k}{r^3}$, gde je k neka konstanta.

1599. Odrediti funkciju $f(x)$ tako da polje vektora

$$\vec{A}=f(x)\vec{i}+2\frac{xy}{1+x^2}f(x)\vec{j}-\frac{3z}{1+x^2}\vec{k}$$

bude solenoidalno uz dopunski uslov $f(1)=\dfrac{3}{2}$, zatim naći vektorski potencijal.

1600. Ispitati kakvo je polje $\vec{A}=r(\vec{c}\times\vec{r})$ i naći njegov potencijal.

1601. Pokazati da polje vektora $\vec{v}=(\vec{r}-\vec{a})\times(\vec{r}-\vec{b})$ ($\vec{a}$ i $\vec{b}$ su konstantni vektori) ima vektorski potencijal $\vec{w}=\vec{r}\times\left[\dfrac{1}{3}(\vec{a}-\vec{b})\times\vec{r}-\dfrac{1}{2}(\vec{a}\times\vec{b})\right]$.

1602. Pokazati da je polje $\vec{A}\{1+yz,\ x(z-x)\ -(1+xy)\}$ lamelarno i salenoidalno i naći njegov vektorski potencijal.

1603. Pokazati da je vektorsko polje $\vec{A}=\dfrac{\vec{r}}{r^3}$ Laplaceovo i da je njegov potencijal harmonijska funkcija, tj. da zadovoljava jednačinu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

1604. Odrediti najopštiju harmonijsku funkciju $u(x, y)$ oblika

$$u(x, y)=ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$$

a zatim naći funkciju oblika $V(x, y)$ za koju je $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}$ i $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

Najzad pokazati da se tako dobijenim funkcijama u i v, kompleksna funkcija $u(x, y)+iv(x, y)$ može predstaviti kao funkcija kompleksne promenljive z.

1605. Naći bar jedno salenoidalno polje $\vec{a}=\vec{a}(x, y, z)$ iz uslova $\int \vec{a}\, d\vec{s}=20$, gde je L kontura četvorougla $ABCD$: $A(2, -1, 8)$, $B(12, -1, 8)$, $C(12, 1, 8)$, $D(2, 1, 8)$.

1606. Pokazati, ako je polje vektora $\vec{A}$ Laplaceovo da onda njegove koordinate P, Q, i R moraju biti harmonijske funkcije.

Glava VI

DIFERENCIJALNA GEOMETRIJA

§ 1. Kriva u prostoru

1° Dužina luka prostorne krive. Neka je

$$\vec{r}=\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$$

jednačina krive c u vektorskom obliku, gde su $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ diferencijabilne funkcije. Tada je diferencijal dužine luka krive u nekoj tački (x, y, z)

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}$$

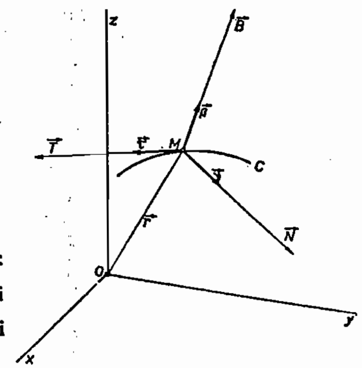
a dužina luka između tačke (x_0, y_0, z_0), kojoj odgovara parametar $t=t_0$, i tačke (x, y, z) kojoj odgovara parametar $t=t$, je

$$s=\int_{t_0}^{t}\sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2+(\dot{z})^2}\,dt.$$

2° Prirodni triedar. 1) Označimo sa $\vec{T}$, $\vec{B}$ i $\vec{N}$, redom, sledeće vektore:

$$\frac{d\vec{r}}{dt},\quad \frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\quad \text{i}\quad \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)\times\frac{d\vec{r}}{dt},$$

gde je $\vec{r}$ vektor položaja tačke M krive c. Nazivaju se: $\vec{T}$ — *vektor tangente*, $\vec{B}$ — *vektor binormale* i $\vec{N}$ — *vektor glavne normale* krive c u tački M (sl. 8).



Sl. 8

Njihovi ortovi $\vec{\tau}$, $\vec{\beta}$ i $\vec{\nu}$, mogu se dobiti po formulama:

$$\vec{\tau}=\frac{d\vec{r}}{ds},\qquad \vec{\nu}=\frac{d\vec{\tau}}{ds}\bigg/\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right|,\qquad \vec{\beta}=\vec{\tau}\times\vec{\nu}.$$

2) Tri ravni, koje prolaze kroz tačku M krive c: *oskulatorna* — određena vektorima $\vec{\beta}$ i $\vec{\nu}$, *normalna*—koja je normalna na vektor $\vec{\tau}$ i *rektifikaciona*—koja je normalna na prve dve, obrazuju tzv. *prirodni triedar krive c* u tački M.

3° Krivina, torzija i Frenetovi obrasci. Označimo sa K krivinu, sa R poluprečnik krivine, sa T torziju i sa ϱ poluprečnik torzije krive u tački M. Tada je:

1) $$K=\frac{1}{R}=\frac{|\vec{B}|}{|\vec{T}|^3}.$$

Ako je kriva zadata jednačinom $\vec{r}=\vec{r}(s)$ gde je s dužina luka tada je

$$\frac{1}{R}=\left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|.$$

2) $$T=\frac{1}{\varrho}=\frac{\vec{B}\cdot\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}}{|\vec{B}|^2}.$$

Ako je $\vec{r}=\vec{r}(s)$ tada je

$$\frac{1}{\varrho}=\pm\left|\frac{d\vec{\beta}}{ds}\right|=\frac{\vec{B}\cdot\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}}{\left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|^2},$$

gde se znak minus uzima ako su $\frac{d\vec{\beta}}{ds}$ i $\vec{\nu}$ istog smera a znak plus u suprotnom slučaju.

3) $$\frac{d\vec{\tau}}{ds}=\frac{\vec{\nu}}{R},\quad \frac{d\vec{\nu}}{ds}=-\frac{\vec{\tau}}{R}+\frac{\vec{\beta}}{\varrho},\quad \frac{d\vec{\beta}}{ds}=-\frac{\vec{\nu}}{\varrho}.$$ (Frenetovi obrasci).

1607. Dokazati da je kriva $\vec{r}=\{a\cos t,\ a\sin t,\ b\sin 2t)$ presek kružnog cilindra i hiperboličnog paraboloida.

Naći dužinu luka krive:

1608. $\vec{r}=\left\{t,\ t^2,\ \frac{2t^3}{3}\right\}$ od $t=0$ do $t=2$.

1609. $\vec{r}=\{e^t\cos t,\ e^t\sin t,\ e^t\}$ od $t=0$ do $t=t$.

1610. $\vec{r}=\{\sin^2 t,\ \sin t\cos t,\ \ln\cos t\}$ od $t=0$ do $t=t$.

1611. $x^2=3y$, $2xy=9z$ od tačke $(0,0,0)$ do tačke $(3,3,2)$.

1612. Odrediti dužinu luka krive $\vec{r}(t)=t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$ u funkciji od t gde su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ konstantni vektori.

1613. Pokazati da se kriva $x^2+z^2=a^2$, $y^2+z^2=a^2$ nalazi u dve međusobno normalne ravni.

1614. Data je kriva $\vec{r}=\left\{t+\frac{a^2}{t},\ t-\frac{a^2}{t},\ 2a\ln\frac{t}{a}\right\}$.

1° Pokazati da je ona određena presekom površi $x^2-y^2=4a^2$ i

$$z=2a^2\ln\frac{x+y}{2a}.$$

2° Pokazati da je dužina luka date krive od tačke na x-osi do proizvoljne tačke proporcionalna sa y-koordinatom te tačke.

1615. Kružna zavojnica $\vec{r}=\{a\cos t,\ a\sin t,\ bt\}$ ima jednačine:

$$x=a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad y=\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad z=\frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ gde je s dužina luka od tačke $(0,0,0)$ do proizvoljne tačke. Dokazati.

1616. Neka je $\vec{T}=\{T_x,\ T_y,\ T_z\}$ gde je $\vec{T}$ vektor tangente krive. Pokazati da je:

1° $\frac{X-x}{T_x}=\frac{Y-y}{T_y}=\frac{Z-z}{T_z}$ — jednačina tangente krive u tački $(x,\ y,\ z)$;

2° $T_x(X-x)+T_y(Y-y)+T_z(Z-z)=0$ — jednačina normalne ravni krive u tački $(x,\ y,\ z)$.

1617. Ako je $\vec{B}=\{B_x,\ B_y,\ B_z\}$ vektor binormale, tada je:

1° $\frac{X-x}{B_x}=\frac{Y-y}{B_y}=\frac{Z-z}{B_z}$ jednačina binormale i

2° $B_x(X-x)+B_y(Y-y)+B_z(Z-z)=0$ jednačina oskulatorna ravan. Dokazati.

1618. Ako je $\vec{N}=\{N_x,\ N_y,\ N_z\}$ vektor glavne normale, tada je:

1° $\frac{X-x}{N_x}=\frac{Y-y}{N_y}=\frac{Z-z}{N_z}$ jednačina glavne normale i

2° $N_x(X-x)+N_y(Y-y)+N_z(Z-z)=0$ jednačina rektifikacione ravni.

1619. Napisati jednačine tangente, glavne normale i binormale za zavojnicu $\vec{r}=\{a\cos t,\ a\sin t,\ bt\}$ u proizvoljnoj tački.

1620. Pokazati da tangenta krive $\vec{r}=\left\{t,\ \frac{t^2}{3},\ \frac{2t^3}{27}\right\}$ zaklapa stalan ugao sa vektorom $\vec{a}=\{1,\ 0,\ 1\}$. Koliki je taj ugao?

1621. Data je kriva $\vec{r}=\{a\cos t,\ a\sin t,\ bt\}$ $(a>0,\ b>0)$. Dokazati da je rastojanje između tačke $\vec{r}(t)$ na ovoj krivoj i preseka tangente u toj tački sa ravni xOy jednako $k|t|$ gde je k neka konstanta.

1622. Napisati jednačine ravni koje obrazuju prirodni triedar krive $x^2+y^2+z^2=6,\ x^2-y^2+z^2=4$ u tački $(1, 1, 2)$.

1623. Pokazati da vektori osnovnog triedra krive $\vec{r}=\{e^t\cos t,\ e^t\sin t,\ e^t\}$ zaklapaju konstantne uglove sa z-osom.

1624. Napisati jednačinu oskulatorne ravni krive

1° $\vec{r}=\{e^t,\ e^{-t},\ t\sqrt{2}\}$ u tački $t=0$.

2° $x^2+y^2+z^2=9,\ x^2-y^2=3$ u tački $(2,\ 1,\ 2)$.

1625. Napisati jednačinu rektifikacione ravni krive $\vec{r}=\left\{\frac{t}{\sqrt{2}},\ \frac{t}{\sqrt{2}},\ \ln\sin t\right\}$ u tački $t=\frac{\pi}{2}$.

1626. Pokazati da je ugao između tangente krive $\vec{r}=\left\{\cos^2 t,\ \frac{\sin 2t}{2},\ \sin t\right\}$ i potega dodirne tačke stalan.

1627. Naći one tačke krive $\vec{r}=\left\{\frac{t^4}{4},\ \frac{t^3}{3},\ \frac{t^2}{2}\right\}$ u kojima su tangente paralelne ravni $x+3y+2z-3=0$.

1628. Odrediti funkciju $\varphi(t)$ tako da glavna normala krive $\vec{r}=\{t,\ \sin t,\ \varphi(t)\}$ bude paralelna sa yOz ravni.

1629. Data je kriva $\vec{r}=\{a\cos t,\ a\sin t,\ af(t)\}$. Odrediti $f(t)$ tako da oskulatorna ravan krive sa z-osom gradi stalan ugao.

1630. Dokazati teoremu: Ako se kriva i njena tangenta projektuju na neku ravan tada je tangenta projekcije jednaka projekciji tangente krive.

1631. Data je kriva $\vec{r}=\{x,\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x)\}$. Ako postoje $\varphi_1'(x_0)$ i $\varphi_2'(x_0)$ pokazati da kriva ne može imati za $x=x_0$ tangentu normalnu na x-osu.

1632. Data je kriva $\vec{r}=\{3t,\ 3t^2,\ 2t^3\}$. 1° Pokazati da se normalna, rektifikaciona i oskulatorna ravan u tački maksimalne krivine poklapaju sa koordinatnim ravnima. 2° Pokazati da jedna od bisektrisa između tangente i binormale ima stalan pravac.

1633. Svaka oskulatorna ravan kružne zavojnice seče kružni cilindar na kom se nalazi po elipsi konstantnih poluosa. Dokazati.

1634. Dokazati da sve normalne ravni krive $\vec{r}=\{a\sin^2 t,\ a\sin t\cos t,\ a\cos t\}$ prolaze kroz jednu stalnu tačku. Koja je to tačka?

1635. Ako oskulatorne ravni krive uvek prolaze kroz jednu stalnu tačku, dokazati da je kriva ravna.

1636. Ako je krivina krive u svakoj tački jednaka nuli, dokazati da je ta kriva prava.

1637. Ako je torzija krive u svakoj tački jednaka nuli, dokazati da je ta kriva ravna kriva.

1638. Dokazati da je

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}=0$$

potreban i dovoljan uslov da kriva $\vec{r}=\{x(t),\ y(t),\ z(t)\}$ bude ravna kriva.

1639. Pokazati da je kriva $\vec{r}=\{a_1t^2+b_1t+c_1,\ a_2t^2+b_2t+c_2,\ a_3t^2+b_3t+c_3\}$ ravna kriva.

1640. Naći jednačinu ravni u kojoj se nalazi kriva $\vec{r}=\{1+3t+2t^2,\ 2-2t+5t^2,\ 1-t^2\}$.

1641. 1° Ako neka ravan seče krivu $\vec{r}=\{a_1t,\ a_2t^2,\ a_3t^3\}$ u tačkama t_1, t_2 i t_3, onda je njena jednačina

$$a_2a_3(t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1)x-a_1a_3(t_1+t_2+t_3)y+a_1a_2z-a_1a_2a_3t_1t_2t_3=0.$$

2° Koristeći 1° napisati jednačinu oskulatorne ravni date krive.

1642. Naći krivinu krive $\vec{r}=\{\cos t,\ \sin t,\ \operatorname{ch} t\}$ u tački $t=0$.

1643. Naći krivinu i torziju krive $\vec{r}=\left\{t+\frac{a^2}{t},\ t-\frac{a^2}{t},\ 2a\ln\frac{t}{a}\right\}$ u proizvoljnoj tački.

1644. Pokazati da su krivina i torzija krive $\vec{r}=\{3t,\ 3t^2,\ 2t^3\}$ proporcionalne.

1645. Pokazati da su poluprečnik krivine i poluprečnik torzije u svakoj tački krive $\vec{r}=\{3t-t^3,\ 3t^2,\ 3t+t^3\}$ jednaki.

1646. Ako je θ ugao između glavnih normala u dve tačke krive čiji je luk između njih Δs, pokazati da je $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{\theta}{\Delta s}=\sqrt{K^2+T^2}$.

1647. Neka su M_0 i M dve tačke krive c. Ako je luk ove krive $\widehat{M_0M}=\Delta s$ infinitezimala, dokazati da su rastojanja tačke M od normalne, rektifikacione i oskulatorne ravni u tački M_0, u odnosu na Δs, infinitezimale redom: prvog, drugog odnosno trećeg reda.

1648. Kriva je zadata jednačinom $\vec{r}(s)=as\vec{m}+[\vec{m}\times\vec{c}(s)]$ gde je $\vec{m}$ konstantan jedinični vektor, a konstantni skalar i $\vec{c}(s)$ proizvoljna vektorska funkcija od s. Dokazati: 1° Tangenta ove krive gradi konstantan ugao sa $\vec{m}$. 2° Glavna normala ove krive je upravna na $\vec{m}$. 3° Krivina i torzija ove krive, u proizvoljnoj tački, su proporcionalne.

1649. Data je kriva $\vec{r}=\left\{a(t-\sin t),\ a(1-\cos t),\ 4a\sin\dfrac{t}{2}\right\}$.

1° Izračunati poluprečnik krivine krive. 2° Od svake tačke krive naneti u smeru jediničnog vektora na glavnoj normali, duž veličine $a\sqrt{1+\sin^2\dfrac{t}{2}}$. Naći jednačinu krive koju opisuje krajnja tačka te duži.

1650. Za krivu $\vec{r}=\{x(t),\ y(t),\ z(t)\}$ zna se da je dužina njenog luka $s=\varphi(t)$. Dokazati da je torzija te krive data obrascem

$$T=\frac{1}{K^2\varphi'^6}\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

gde je K krivina a naznačeni izvodi su po parametru t.

1651. Kriva koja leži na nekom cilindru i koja seče sve njegove generatrise pod jednakim uglovima zove se cilindarska zavojnica.

Ako taj ugao označimo sa θ i ako je u proizvoljnoj tački te krive $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$, dokazati da je:

1° $z=\operatorname{ctg}\theta\int\sqrt{f_1'^2+f_2'^2}\,dt$. 2° Krivina $K=\left|\dfrac{\operatorname{cosec}\theta}{\varphi'^3}(f_1'f_2''-f_1''f_2')\right|$ gde

je $\varphi'(t)=\operatorname{cosec}\theta\sqrt{f_1'^2+f_2'^2}$. 3° Torzija $T=\dfrac{\operatorname{ctg}\theta}{K^2\varphi'^6}\,\dfrac{(f_1'f_2''-f_1''f_2')^3}{(f_1'^2+f_2'^2)^{3/2}}$.

4° Pokazati da je $K/T=\text{const.}$

1652. Potreban i dovoljan uslov da glavna normala krive bude paralelna jednoj stalnoj ravni jeste da ta kriva bude cilindarska zavojnica.

1653. Ako su θ i φ uglovi koji sa nekom stalnom pravom grade tangente odnosno binormale krive, dokazati da je $\dfrac{K}{T}=\dfrac{\sin\theta\,d\theta}{\sin\varphi\,d\varphi}$.

1654. Odrediti krivinu i torziju krive

$$\vec{r}=\left\{\int f(t)\sin t\,dt,\quad \int f(t)\cos t\,dt,\quad \int f(t)\,\psi(t)\,dt\right\}.$$

1655. Naći torzije dveju krivih koje se mogu tako uzajamno jednoznačno preslikati da korespondentne tačke imaju istu binormalu.

1656. Kriva je zadata jednačinom $\vec{r}=\vec{r}(s)$ gde je s dužina luka krive. Ako su R i ϱ poluprečnici krivine, odnosno torzije, naći krivinu evolvente date krive.

1657. Naći torziju evolvente date krive kod koje je K—krivina a T—torzija u proizvoljnoj tački.

1658. Pokazati da su krivina i torzija konstantne kod kružne zavojnice.

1659. Centar krivine neke sferne krive u nekoj tački je normalna projekcija centra sfere na oskulatornu ravan u toj tački.

1660. Sferna kriva konstantne krivine je krug. Dokazati.

1661. Kružna zavojnica je presečena jednom ravni i u svim presečnim tačkama postavljene oskulatorne ravni. 1° Pokazati da se sve oskulatorne ravni seku u jednoj tački M. 2° Ako se presečna ravan okreće oko jedne prave kroz koju prolazi, šta je trajektorija tačke M?

1662. Sferna indikatrisa tangente krive, čiji je tangentni vektor $\vec{T}=\vec{T}(t)$ ima jednačinu $\vec{r}(t)=\dfrac{\vec{T}}{|\vec{T}|}$. Kod svake cilindarske zavojnice sferna indikatrisa tangenata je krug. Dokazati.

1663. Data je sferna indikatrisa tangenata prostorne krive. 1° Naći jednačinu krive. 2° Ispitati specijalan slučaj kada je indikatrisa krug. 3° Koristeći dobijeni rezultat, napisati opštu jednačinu svih zavojnica kojima je zadana krivina ili torzija. Specijalno, naći zavojnicu kod koje je $R=1/a\cos t$. 4° Napisati jednačinu krive konstantne krivine.

1664. Sferna indikatrisa binormala krive, čiji je vektor binormale $\vec{B}$, ima jednačinu $\vec{r}=\dfrac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$.

Data je sferna indikatrisa binormala krive. 1° Naći jednačinu krive. 2° Koja kriva ima sfernu indikatrisu krug? 3° Napisati jednačinu krivih koje imaju datu konstantnu torziju $1/\varrho$.

1665. Data je kriva $y=x^n$, $z=f(x)$ gde je n konstanta. Odrediti funkciju f tako da oskulatorna ravan krive u proizvoljnoj tački M krive prolazi kroz projekciju te tačke na y-osu.

1666. Tangenta geometrijskog mesta centara krivina neke krive c normalna je na odgovarajućoj tangenti krive c. Ona se poklapa sa glavnom normalom krive c ili je na njoj normalna samo u tačkama u kojima je $T=0$ ili $\dfrac{dk}{ds}=0$. Dokazati.

§ 2. Površi

1° Parametarske jednačine površi i koordinatne krive površi. Jednačina

$$(\Pi)\qquad \vec{r}=\vec{r}(u, v)=\{f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v)\}$$

je jednačina glatke površi ako je Jacobieva matrica

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial u} & \dfrac{\partial f_3}{\partial u} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial v} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v} & \dfrac{\partial f_3}{\partial v} \end{bmatrix}$$

ranga dva. u i v su krivolinijske koordinate površi Π.

Kriva $\vec{r}=\{f_1(c, v), f_2(c, v), f_3(c, v)\}$ je koordinatna kriva $u=c=\text{const}$. Slično se definiše koordinatna kriva $v=c$.

2° Tangentna ravan i normala površi. Ako je $\vec{r}_1$ vektor položaja tačke M_1 na površi Π i $\dfrac{\partial \vec{r}_1}{\partial u}$ i $\dfrac{\partial \vec{r}_1}{\partial v}$ izvodi u toj tački, tada je: jednačina tangentne ravni, u datoj tački, data sa

$$(\vec{r}-\vec{r}_1)\left(\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial v}\right)=0,$$

jednačina normale površi u datoj tački data sa

$$(\vec{r}-\vec{r}_1)=\lambda\left(\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial v}\right).$$

3° Obvojnica površi. Neka je S: $\vec{r}=\vec{r}(u, v, a)$ familija površi gde je a parametar. Površ E koja svaku od površi S dodiruje duž neke krive zove se *obvojnica površi S*. Dodirne krive zovu se *karakteristike*. Sve karakteristike dodiruju jednu krivu koja se zove *povratna linija* obvojnice površi E.

Eliminacijom parametra a iz jednačina $\vec{r}=\vec{r}(u, v, a)$ i

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)\frac{\partial \vec{r}}{\partial a}=0$$

dobija se jednačina obvojnice E.

Ako u familiji S imaju dva parametra ($\vec{r}=\vec{r}(u, v, a, b)$) tada se jednačina obvojnice E dobija eliminacijom parametara a i b iz jednačina

$$\vec{r}=\vec{r}(u, v, a, b)$$

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)\frac{\partial \vec{r}}{\partial a}=0$$

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)\frac{\partial \vec{r}}{\partial b}=0.$$

1667. Data je površ $\vec{r}=\{u\cos v, u\sin v, \sqrt{a^2-u^2}\}$ gde su u i v nezavisni parametri površi a a konstanta. 1° Napisati jednačinu date površi u obliku $F(x, y, z)=0$ i na osnovu toga zaključiti koja je to površ. 2° Šta su koordinatne krive $u=c$ i $v=c$? 3° Kakvo je geometrijsko značenje parametara u i v?

1668. Data je površ $\vec{r}=\{\cos u\cos v, \cos u\sin v, \sin u\}$. 1° Napisati jednačinu te površi u obliku $F(x, y, z)=0$ i zaključiti koja je to kriva. 2° Šta su koordinatne krive te površi? 3° Kakvo je geometrijsko značenje parametara u i v?

1669. Površ S je data jednačinom $\vec{r}=\{u\cos v, u\sin v, f(\omega)\}$ gde su u i v nezavisni parametri a f data funkcija. 1° Pomoću koordinatnih krivih zaključiti koja je to površ. 2° Napisati jednačinu te površi u obliku $z=F(x, y)$. 3° Koristeći rezultat 2°, napisati jednačinu kružnog konusa čije pravolinijske generatrise grade ugao α sa njegovom osom.

1670. Pokazati da je površ $\vec{r}=\left\{\dfrac{2u}{u^2+v^2+1}, \dfrac{2v}{u^2+v^2+1}, \dfrac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right\}$ sfera.

1671. Napisati jednačinu torusa koji nastaje rotacijom kruga poluprečnika r oko prave koja leži u ravni toga kruga na rastojanju R $(R>r)$ od njegovog centra.

1672. Data je površ $\vec{r}=\{e^{av}f(u)\cos(u+v),\ e^{av}f(u)\sin(u+v),\ e^{av}\varphi(u)\}$. Pokazati da koordinatne krive $u=c$ leže na konusu $x^2+y^2=\dfrac{f^2(c)}{\varphi^2(c)}z^2$.

1673. Geometrijsko mesto pravih koje seku z-osu pod pravim uglom i prolaze kroz krivu $\vec{r}=\{\cos v,\ \sin v,\ f(v)\}$ je površ (pravi konoid), koja ima jednačinu $\vec{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ f(v)\}$. Dokazati.

1674. Napisati jednačinu tangentne ravni i normale površi $\vec{r}=\{u\cos v, u\sin v, au\}$ u proizvoljnoj tački $(u_0,\ v_0)$.

1675. Površ $xyz=a^2$ u proizvoljnoj tački $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ ima tangentnu ravan:
$\dfrac{x}{x_0}+\dfrac{y}{y_0}+\dfrac{z}{z_0}=3$ i normalu: $\dfrac{x-x_0}{y_0z_0}=\dfrac{y-y_0}{x_0z_0}=\dfrac{z-z_0}{x_0y_0}$. Dokazati.

1676. Ako je površ data u obliku $f(x,\ y,\ z)=0$, dokazati da njena tangentna ravan u tački $(x,\ y,\ z)$ ima jednačinu

$$(X-x)\frac{\partial f}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial f}{\partial y}+(Z-z)\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

1677. Dokazati da kod obrtne površi normala prolazi kroz osu te površi.

1678. Tangentne ravni pravog konoida $\vec{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ a\sin v\}$ u nekoj tački generatrise $v=0$ seče konoid po generatrisi i po elipsi. Dokazati.

1679. Tangentne ravni u tačkama generatrise pravog konoida $\vec{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ a\sqrt{\operatorname{tg} v}\}$ seku ravan $z=0$ po paralelnim pravama. Dokazati.

1680. Ako se na normalama sa jedne strane površi nanosi ista duž a, krajnje tačke te duži obrazuju površ za koju se kaže da je paralelna ili ekvidistantna sa datom površi. Pokazati da su tangentne ravni na dvema paralelnim površima u korespondentnim tačkama paralelne.

1681. Ako je familija površi zadata jednačinom $f(x,\ y,\ z,\ a)=0$, pokazati da se jednačina obvojnica te familije dobija eliminacijom parametara a iz jednačina $f(x,\ y,\ z,\ a)=0,\ \dfrac{\partial f}{\partial a}=0.$

1682. Naći jednačinu obvojnica sfera $(x-a)^2+(y-\sqrt{r^2-a^2})^2+z^2=R^2$ gde je a parametar a r i R su konstante.

1683. Napisati jednačinu obvojnica ravni $(m+a)x+(n+a)y+(l+a)z=a^2$ gde je a parametar.

1684. Dat je skup ravni $3u^2x-2uy+z-u^3=0$ gde je u parametar. 1° Odrediti obvojnicu ovog skupa. 2° Odrediti povratnu krivu obvojnice.

1685. Naći obvojnicu ravni $ax+by+z+ab=0$, koje zavise od dva parametra a i b.

1686. Dat je paralelepiped u prvom oktantu čije ivice leže na koordinatnim osama sistema $Oxyz$. Ravan odseca od paralelepipeda tetraedar, čije je jedno teme suprotno temenu u koordinatnom početku paralelepipeda, konstantne zapremine. Naći obvojnicu tih ravni.

1687. Data je dvoparametarska familija pravih $\vec{r}=\left\{tz+p,\ pz+\dfrac{t^3}{3},\ z\right\}$ gde su t i p nezavisni parametri. 1° Kakav uslov treba da zadovoljavaju parametri t i p da bi prave bile generatrise jedne razvojne površi? 2° Naći jednačinu povratne krive te razvojne površi. 3° Odrediti geometrijsko mesto tih povratnih linija. 4° Odrediti krive u kojima xOy ravan seče razvojne površi.

1688. Na površi $\vec{r}=\left\{u\cos v,\ u\sin v,\ \dfrac{u^2}{2}\right\}$ data je kriva $v=ku$ $(k>0)$. 1° Ispitati oblik te krive. 2° Naći dužinu luka te krive od koordinatnog početka do proizvoljne tačke.

1689. Data je površ $\vec{r}=\{2pu\cos v,\ 2qu\sin v,\ 2u^2(p\cos^2 v+q\sin^2 v)\}$. 1° Pokazati da je to paraboloid $2z=\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}$. 2° Odrediti na toj površi skup tačaka u kojima tangentne ravni sa z-osom grade stalan ugao.

§ 3. Krive linije na površi

1° Prva osnovna kvadratna forma površi. Kvadrat lučnog elementa proizvoljne krive c na površi Π je

$$ds^2=\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right)^2 du^2+2\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)du\,dv+\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)^2 dv^2, \tag{1}$$

ili, ako se uvedu oznake $E=\left(\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right)^2$, $F=\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}$, $G=\left(\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)^2$,

$$ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2. \tag{2}$$

Desna strana u (2) zove se *prva osnovna forma površi Π.*

Jedinični vektor normale površi je $\vec{n}_0=\left(\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)/(EG-F^2)$.

2° Druga kvadratna forma površi. Ako je $L=\dfrac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2}\cdot\vec{n}_0$, $N=\dfrac{\partial^2 \vec{r}}{\partial v^2}\cdot\vec{n}_0$ i $M=\dfrac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u\,\partial v}\cdot\vec{n}_0$ tada je

(3) $$-\vec{dr}\cdot\vec{dn_0}=L\,du^2+2\,M\,du\,dv+N\,dv^2.$$

Desna strana jednačine (3) zove se *druga osnovna kvadratna forma površi II*.

3° Kriva linija na površi. Neka je: R_1—poluprečnik krivine krive c_1, na datoj površi, θ—ugao između glavne normale krive c_1 i normale na površi. Tada je

$$\frac{\cos\theta}{R_1}=\frac{L\,du^2+2\,M\,du\,dv+N\,dv^2}{E\,du^2+2\,F\,du\,dv+G\,dv^2}.$$

4° Meusnierove teoreme. Ravan koja prolazi kroz jednu pravu tangentne ravni i normalu, u jednoj tački površi, obrazuje sa ovom površi *normalni presek* — krivu c, a ravan koja prolazi kroz istu pravu ali ne kroz normalu površi, obrazuje sa površi *kosi presek*—krivu c'.
Ako je R poluprečnik krivine krive c u dotičnoj tački tada je

$$R_1=\pm R\cos\theta$$

gde su R_1 i θ definisani za krivu c_1 u 3°.

5° Oblik površi u okolini jedne tačke. Posmatramo znak izraza $LN-M^2$ u tački $M(u, v)$.

1) $LN-M^2>0$, tačka M je *eliptička* tačka prve vrste.
2) $LN-M^2=0$, tačka M je *parabolička* tačka.
3) $LN-M^2<0$, tačka M je *hiperbolička* tačka.

Za slučaj: $M=0$, $L=N$, tačka M je *sferna* ili *pupčasta* tačka.

Pravci koji odgovaraju korenima jednačine $LN-M^2=0$ po $\frac{dv}{du}$ zovu se *asimptotski pravci*.

6° Glavni pravci i glavni poluprečnici krivina na površi. *Glavni pravci* na površi su tangente krivih na kojima R dostiže ekstremnu vrednost. Poluprečnici krivina koji odgovaraju glavnim pravcima zovu se *glavni* poluprečnici krivina. Dobijaju se rešavanjem po R jednačine

(4) $$(EG-F^2)\frac{1}{R^2}-(EN-2\,FM+GL)\frac{1}{R}+LN-M^2=0.$$

Izrazi $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$ i $\frac{1}{R_1R_2}$ nazivaju se redom *srednja krivina* i *Gaussova krivina*. $\left(\frac{1}{R_1}\right.$ i $\frac{1}{R_2}$ su rešenja jednačine (4) po $\left.\frac{1}{R}\right)$.

Površi kod kojih je srednja krivina u svakoj tački jednaka nuli zovu se *minimalne* površi.

Površi kod kojih je Gaussova krivina jednaka nuli u svakoj tački zovu se *razvojne* površi.

7° Karakteristične krive linije na površi. 1) Kriva na površi, koja je normalna na nivoskoj liniji površi $z=\text{const}$, zove se *linija najvećeg nagiba*.

2) Neka je $\vec{dr}$ vektor tangente krive na površi i $\vec{n}_0$ jedinični vektor normale površi u istoj tački. Kriva na površi za koju je

$$\vec{dn_0}\times\vec{dr}=0$$

u svakoj tački, zove se *linija krivine* površi.

3) Kriva na površi, za koju je, u svakoj tački

$$\vec{dn_0}\cdot\vec{dr}=0,$$

zove se *asimptotska linija* površi.

4) Krive na površi kod kojih se glavna normala u svakoj njihovoj tački poklapa sa normalom na površi u toj tački, zovu se *geodezijske linije* površi. Dobijaju se kao integrali jednačine

$$\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right)\cdot\left(\vec{dr}\times\vec{d^2r}\right)=0.$$

1690. Odrediti površ čija je prva metrička forma

$$ds^2=\frac{(2\,x^2+y^2)\,dx^2+2\,xy\,dx\,dy+(x^2+2\,y^2)\,dy^2}{x^2+y^2}$$

i na kojoj se nalazi krug $x^2+y^2=1$, $z=1$.

1691. Data je površ $\vec{r}=\left\{u, v, k\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u}\right\}$ i kriva $\vec{r}=\{a\cos u,\ a\sin u,\ g(u)\}$ $k, a>0$. Odrediti $g(u)$ tako da kriva leži na datoj površi, a zatim pokazati da se tangentna ravan površi i oskulatorna ravan krive u zajedničkim tačkama poklapaju.

1692. Data je površ $\vec{r}=\{v\cos u,\ v\sin u,\ v\sqrt{2}\}$.

1° Naći v kao funkciju od u za one krive na površi kod kojih tangente zaklapaju sa z-osom ugao od $\frac{\pi}{4}$.

2° Naći onu od njih krivih koja prolazi kroz tačku $(1, 0, \sqrt{2})$.

1693. Ispitati oblik površi $\vec{r}=\{u,\ v,\ u^2+v^2\}$ u okolini tačke (0, 0).

1694. Naći glavne pravce i glavne poluprečnike krivina površi $\vec{r}=\{x,\ y,\ xy\}$ u proizvoljnoj tački (x, y, z).

1695. Odrediti pupčaste tačke na površi $\vec{r}=\left\{u, v,\ \pm|c|\sqrt{1-\left(\frac{u}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}\right\}$.

1696. Pokazati da su tačke krive $\vec{r}=\{t,\ \pm\sqrt{2at}, 0\}$ pupčaste tačke površi $az^2+(2\,x+a)(y^2-2\,ax)=0$.

1697. Odrediti sferne tačke površi $xyz=a^3$.

1698. Pokazati da površ $\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n+\left(\frac{z}{c}\right)^n=1$ dodiruje sfera

$x^2+y^2+z^2=r^2$ u sfernim tačkama ako je

$$r^{2n/(n-2)}=a^{2n/(n-2)}+b^{2n/(n-2)}+c^{2n/(n-2)}.$$

1699. Naći srednju i Gaussovu krivinu površi $\vec{r}=\{u,\ v,\ uv\}$ u proizvoljnoj tački.

1700. Naći srednju i Gaussovu krivinu površi $\vec{r}=\left\{u,\ v,\ \frac{u-v}{u+v}\right\}$ u tački (1,1).

Odrediti srednju i Gaussovu krivinu površi:

1701. $\vec{r}=\{a(u+v),\ b(u-v),\ uv\}$.

1702. $\vec{r}=\left\{u,\ v,\ \frac{1}{a}(\ln\cos au-\ln\cos v)\right\}$.

1703. Naći one rotacione površi kod kojih je srednja krivina jednaka nuli.

1704. Odrediti koeficijente E, F i G prve osnovne kvadratne forme površi $\vec{r}(u,v)=u\vec{a}+\sin u\vec{b}+v\vec{c}$, gde su $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ dati vektori. Kada će se koordinatne krive ove površi seći ortogonalno?

1705. Za površ $\vec{r}(u,v)=(u+v^2)\vec{a}+(v+u^2)\vec{b}+uv\vec{c}$ ($\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ konstantni vektori.) Odrediti prvu osnovnu kvadratnu formu i površinski elemenat

$$\vec{d\sigma}=(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)\,dudv.$$

1706. Za rotacionu površ $\vec{r}(u,v)=\varphi(u)\vec{e}(v)+u\vec{k}$ gde je $\vec{e}(v)$ jedinični vektor a $\vec{k}$ konstantni vektor, izračunati koeficijent prve i druge kvadratne forme, glavne pravce i glavne krivine.

1707. Odrediti sve moguće minimalne površi za rotacione površi

$$\vec{r}(u,v)=\varphi(u)\vec{e}(v)+u\vec{k}.$$

1708. Date su dve paralelne površi S i S^* kod kojih je rastojanje korespondentnih tačaka a. 1° Odrediti Gaussovu krivinu K_g^* površi S^* u funkciji Gaussove krivine K_g i srednje krivine K_s površi S. 2° Odrediti srednju krivinu K_s^* površi S^* u funkciji K_g i K_s površi S. 3° Pokazati da je S^* razvojna površ ako i samo ako je S razvojna površ.

1709. Pokazati da je zbir krivina dva ortogonalna preseka površi jednak zbiru krivina glavnih preseka.

1710. Za rotacionu površ, čija je osa rotacije z-osa, dato je rastojanje tačaka sa površi do ose rotacije sa $\varrho=\varrho(s)$ gde je s prirodni parametar na meridijanu u xOz ravni. Odrediti Gaussovu krivinu te površi.

1711. Odrediti Gaussovu krivinu površi za koju je zadata metrička diferencijalna forma sa: 1° $ds^2=du^2+Gdv^2$; 2° $ds^2=\lambda(u,v)(du^2+dv^2)$; 3° $ds^2=2\,Fdudv$.

1712. Na površi $\vec{r}=\{a\cos u\cos v,\ a\sin u\cos v,\ a\sin v\}$ date su krive $c_1: u=v$, $c_2: u+v=\frac{\pi}{2}$. 1° Naći presečne tačke datih krivih. 2° Odrediti ugao pod kojim se seku date krive.

1713. Na površi $\vec{r}=\{u,\ v,\ uv\}$ date su krive $c_1: u^2+v^2=1$ i $c_2: v=au$. 1° Naći presečne tačke datih krivih. 2° Odrediti ugao pod kojim se seku te krive. 3° Koliko je a da se krive seku ortogonalno?

1714. Pokazati da se krive: $\sin u+a(v+1)=0$, $\frac{a}{3\sin^3 u}+v=b$ (a, $b=$const.) na površi $\vec{r}=\left\{\sin u\cos v,\ \sin u\sin v,\ \cos u+\ln\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right\}$ seku ortogonalno.

Odrediti ortogonalne trajektorije koordinatnih krivih površi:

1715. $\vec{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ u+v\}$.

1716. $\vec{r}=\{v\cos u-a\sin u,\ v\sin u+a\cos u,\ au\}$ $(a>0)$.

1717. Na površi $\vec{r}=\{\cos\theta\cos\varphi,\ \cos\theta\sin\varphi,\ \sin\varphi\}$ odrediti ortogonalne trajektorije krivih $\varphi+\theta=$const.

1718. Kriva na obrtnoj površi koja sve meridijane te površi seče pod konstantnim uglom zove se loksodroma. Pokazati da je jednačina loksodrome obrtne površi $\vec{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ \varphi(u)\}$ data sa
$\int\sqrt{1+\varphi'^2}\,\frac{du}{u}+v\operatorname{ctg}\theta+c=0$ gde je c proizvoljna konstanta a θ ugao pod kojim loksodroma seče meridijane.

1719. Pokazati da je jednačina loksodrome na površi $\vec{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ \sqrt{r^2-(R-u)^2}\}$ data sa $\left(R+r\cos\left[\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{r}(v-v_0)\operatorname{ctg}\theta\right]\right)u=R^2-r^2$ ($v_0=$const.)

Odrediti krive koje polove uglove između koordinatnih krivih na datim površima:

1720. $\vec{r}=\{a\cos u\sin v,\ a\sin u\sin v,\ a\cos v\}$.

1721. $\vec{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ u+v\}$.

Odrediti liniju najvećeg nagiba datih površi:

1722. $\vec{r}=\{u, v, auv\}$. **1723.** $\vec{r}=\{u\cos v, u\sin v, av\}$.

Odrediti linije krivine datih površi:

1724. $\vec{r}=\{u, v, u^2+v^2\}$. **1725.** $\vec{r}=u\cos v, u\sin v, av\}$.

1726. $\vec{r}=\{-u^3+3u^2v+3u, -3uv^2+v^3-3v, 3u^2-3v^2\}$.

Odrediti asimptotske linije na datim površima:

1727. $\vec{r}=\{u, v, au^2+bv^2\}$. **1728.** $\vec{r}=\{u, uv, f(v)\}$.

1729. $\vec{r}=\{u\cos v, u\sin v, \sqrt{2}\,u\}$. **1730.** $\vec{r}=\{(1+u)\operatorname{ch} v, (1-u)\operatorname{sh} v, u\}$.

1731. $\vec{r}=\{(3u+3v), 3u^2+3v^2, 2u^3+2v^3\}$.

1732. $z=x\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{y}{x}\right)+\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$.

1733. Naći projekcije na ravan xOy asimptotskih linija površi $\vec{r}=\{u, v, u^m v^n\}$.

1734. Data je kriva $\vec{r}=\{a\operatorname{ch} t\cos t, a\operatorname{ch} t\sin t, at\}$. Pokazati da ova kriva pripada površi $x^2+y^2=a^2\operatorname{ch}^2\dfrac{z}{a}$ i da je asimptotska linija ove površi.

1735. Odrediti torziju asimptotskih linija površi $\vec{r}=\left\{u\cos v, u\sin v, \dfrac{1}{u}\right\}$.

1736. Data je površ (S): $\vec{r}=\left\{\sqrt{u}\cos v, \sqrt{u}\sin v, \dfrac{1}{u}\right\}$.

1° Napisati jednačinu ove površi u obliku $z=f(x, y)$ i nacrtati je.
2° Naći, na ovoj površi, tačke koje su najbliže koordinatnom početku.
3° Pokazati da je mreža koordinatnih linija na (S) ortogonalna.
4° Odrediti asimptotske linije površi (S).

1737. Data je površ $\vec{r}=\left\{u+\dfrac{v}{u}, u-\dfrac{v}{u}, u\varphi(v)\right\}$ $(\varphi(1)=1)$.

1° Odrediti funkciju $\varphi(v)$ tako da koordinatne linije $u=\text{const.}$ budu istovremeno i asimptotske linije površi.

2° Pokazati da je torzija tih asimptotskih linija konstantna.

1738. Data je površ (S): $\vec{r}=\left\{\dfrac{a}{2}\left(v+\dfrac{1}{v}\right)\cos u, \dfrac{b}{2}\left(v+\dfrac{1}{v}\right)\sin u, \dfrac{c}{2}\left(v-\dfrac{1}{v}\right)\right\}$.

1° Napisati jednačinu (S) u obliku $F(x, y, z)=0$ i nacrtati površ.

2° Kakva veza treba da postoji između konstanti a i b da bi mreža koordinatnih linija površi (S) bila ortogonalna?

3° Odrediti asimptotske linije ove površi.

1739. Pokazati da su koordinatne krive površi

$$\vec{r}=\{(u+v)(3+2u^2+2v^2-8uv), (v-u)(3+2u^2+2v^2+8uv), 12uv\}$$

njene asimptotske linije.

1740. Ako su S i S^* dve paralelne površi, pokazati da su asimptotske linije površi S korespondentne asimptotskim linijama površi S^* tada i samo tada ako je S razvojna površ.

Odrediti geodezijske krive na površi:

1741. $\vec{r}=\{u\cos v, u\sin v, av\}$. **1742.** $\vec{r}=\{u\cos v, u\sin v, u\}$.

1743. Pokazati da su veliki krugovi sfere njene geodezijske linije.

1744. Pokazati da tu geodezijske linije na cilindru zavojnice.

Glava VII

TENZORSKI RAČUN

§ 1. Sistemi i oznake

1° S i s t e m i. Uređen skup $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ označavaćemo sa

$$a_i \ (i=1, 2, \cdots, N)$$

i zvaćemo ga *sistem prvog reda* tipa (1, 0). Takođe je i

$$a^i \ (i=1, 2, \cdots, N)$$

sistem prvog reda tipa (0, 1). Elementi skupa su *elementi sistema* ili *komponente sistema*. Slično, skup elemenata pravougaone matrice

$$a_{ij} \text{ ili } a_i^j \text{ ili } a^{ij} \quad (i=1, 2, \cdots, M; \ j=1, 2, \cdots, N)$$

zvaćemo *sistem drugog reda*. Skup elemenata prostorne matrice

$$a_{ijk} \text{ ili } a_k^{ij} \text{ ili } a_{jk}^i \text{ ili } a^{ijk} \ (i=1,2,\cdots,M; \ j=1,2,\cdots,N; \ k=1,2,\cdots,P)$$

zvaćemo *sistem trećeg reda*. Itd ... Sistem k-og reda, tipa $(k, 0)$, obično se piše u obliku

$$a_{i_1 i_2 \cdots i_k}$$

a može raspored njegovih indeksa da bude i gore, kao

$$a_{i_1 i_2 \cdots i_p}^{j_1 j_2 \cdots j_q} \quad (p+q=k; \ \text{sistem tipa } (p, q))$$

pa imamo više tipova sistema k-og reda.

Dva sistema su jednaka ako su istog reda i tipa i ako su im odgovarajuće koordinate jednake.

2° K o n v e n c i j a o s a b i r a n j u. Dva puta ponovljeni indeks u sistemu označuje sabiranje po tome indeksu. Primeri:

$$a_{ii}=\sum_i a_{ii}; \quad a^i a^i=\sum_i (a^i)^2; \quad a_i b^i=\sum_i a_i b^i; \quad a_i b^j c^i = b^j \sum_i a_i c^i.$$

3° S i m e t r i č n i i a n t i s i m e t r i č n i s i s t e m i. Sistem $a_{ijk\cdots}$ je *simetričan po jednom paru indeksa* ako se ne menja kada se indeksi toga para permutuju. Sistem

$a_{ijk\cdots}$ je *antisimetričan po jednom paru indeksa* kada je vrednost sistema suprotnog znaka, ako se taj par indeksa permutuje. Ako je sistem simetričan (antisimetričan) po svakom paru indeksa, kaže se da je *simetričan (antisimetričan)*. Specijalno su često u upotrebi simetrični, tzv. Kronecerov sistem (δ simbol) δ_{ij} koji je definisan sa

$$\delta_{ij}=\begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

i antisimetrični e-sistem (e-simbol)

$$e_{ijk} \quad (i, j, k=1, 2, 3)$$

kome je $e_{123}=1$.

4° O p e r a c i j e s a s i s t e m i m a. 1) *Zbir (razlika)* dva sistema istog tipa je sistem toga tipa čije su komponente zbir (razlika) odgovarajućih komponenata datih sistema. Primer: zbir (razlika) sistema a_{ij}^k i b_{ij}^k je sistem

$$c_{ij}^k=a_{ij}^k \pm b_{ij}^k.$$

2) *Spoljašnji proizvod* dva sistema (bez obzira na tip i red) je sistem čije su komponente svi mogući proizvodi komponenata datih sistema. Primer: proizvod sistema a_{ij}^k i b_l je sistem $c_{ijl}^k=a_{ij}^k b_l$.

3) *Kontrakcija* sistema je unarna operacija kojom se od datog sistema dobija sistem u kome su dva indeksa, jedan gornji i jedan donji, ponovljena. Znači da dobijeni sistem ima red za dva manji od polaznog. Primer: ako se sistem a_k^{ij} kontrahuje po indeksima k i j dobija se sistem $a_j^{ij}=a_1^{i1}+a_2^{i2}+a_3^{i3}$.

4) *Unutrašnji proizvod* dva sistema se dobija kada se u spoljašnjem proizvodu dva sistema izvrši kontrakcija po jednom donjem indeksu jednog sistema jednom gornjem indeksu drugoga sistema.

1745. Napisati sledeće izraze koristeći konvenciju o sabiranju:

1° $df=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$; 2° $\frac{d\bar{x}^k}{dt}=\sum_{m=1}^{N}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^m}\frac{dx^m}{dt}$; 3° $\sum_{i=1}^{N}(x^i)^2$;

4° $\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N} g_{pq}\,dx^p\,dx^q$; 5° $g^{21}g_{11}+g^{22}g_{21}+g^{23}g_{31}+g^{24}g_{41}$;

6° $a_{11}^{121}+a_{12}^{122}+a_{12}^{221}+a_{22}^{222}$.

1746. Napisati sledeće sisteme u potpunosti (u razvijenom obliku):

1° $g_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^s}$, $N=3$*; 2° $\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}A^k)$, $N=3$;

3° $A^{jk}B_k^p C_j$, $N=2$.

1747. Napisati eksplicitno sve komponente Kronecerovog sistema $\delta_{ij}\ (i, j, =1, 2, \cdots, N)$.

---

* Svi indeksi uzimaju vrednosti $1, 2, \cdots, N$.

1748. Pokazati da za komponente sistema e_{ijk} važe iskazi: 1) Komponente su nula ako su makoja dva indeksa jednaka; 2) Komponente su 1, ako su i, j i k parna permutacija permutacije 1 2 3; 3) Komponente su -1, ako su i, j i k neparna permutacija permutacije 1 2 3.

1749. Koliko ima tipova sistema k-oga reda $(k>2)$?

1750. Koliko različitih elemenata može imati simetričan sistem k-og reda čiji indeksi uzimaju vrednosti $1, 2, 3, \cdots, n$?

1751. Svaki antisimetričan sistem trećeg reda može da se napiše u obliku $a^{ijk}=a^{123}e^{ijk}$ odnosno $a_{ijk}=a_{123}e_{ijk}$.

1752. Dokazati da se determinanta trećeg reda može napisati u obliku

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = e^{ijk} a_{i1} a_{j2} a_{k3} = e^{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} \quad (i, j, k=1, 2, 3).$$

1753. Potreban i dovoljan uslov da je a_{ij} antisimetričan sistem jeste da je $a_{ij}x^i x^j=0$ za svako x^i $(i, j=1, 2, \cdots, N)$.

1754. Pokazati da je:

$$1^\circ \ e_{ijh}e_{klh}=\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk};$$

$$2^\circ \ e_{ijh}e_{klh}+e_{jkh}e_{ilh}+e_{kih}e_{jlh}=0.$$

1755. Pokazati da je jednačina $ba_{mn}+ca_{nm}=0$ zadovoljena za $b=-c$ ako je a_{mn} simetričan sistem, i za $b=c$ ako je a_{mn} antisimetričan.

1756. Ako je $u=a_{ij}x^i x^j$ pokazati da je

$$\frac{\partial u}{\partial x^i}=(a_{ij}+a_{ji})x^j \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}=a_{ij}+a_{ji}.$$

1757. Pokazati da se sistem a_{ij} može napisati u obliku zbira simetričnog i antisimetričnog sistema istog tipa.

1758. Ako je $\Phi=a_{ij}u^i u^j$ pokazati da se uvek može napisati $\Phi=b_{ij}u^i u^j$ gde je b_{ij} simetričan sistem.

Pokazati da je:

1759. $\delta^{ij}\delta_{jk}=\delta^i_k$. 1760. $\delta^p_q a^{qr}_s=a^{pr}_s$. 1761. $\delta^p_q\delta^r_s A^{qs}=A^{pr}$.

1762. $\delta^p_q\delta^q_r\delta^r_s=\delta^p_s$. 1763. $\delta^p_q\delta^q_r\delta^r_s\delta^s_p=1$.

1764. Dat je simetričan sistem a_{ij} i antisimetričan sistem b^{ij}. Pokazati da je $a_{ij}b^{ij}=0$.

1765. Ako su x^i $(i=1, 2, \cdots, N)$ nezavisno promenljive, pokazati da je $\dfrac{\partial x^i}{\partial x^j}=\delta^i_j$.

1766. Označimo sa δ^{ijk}_{lmn} proizvod sistema e^{ijk} i e_{lmn}. Naći sve komponente sistema δ^{ijk}_{lmn}. Koliko ima komponenata koje su jednake nuli?

Dokazati da je:

1767. $\delta^{ijk}_{ijk}=3!$ 1768. $\delta^{rst}_{inm}=\delta^{rst}_{ntm}=\delta^{rs}_{mn}$.

1769. $\delta^{rs}_{mn}a^{mn}=a^{rs}-a^{sr}$. 1770. $\delta^{ij}_{mn}a^m_r a^n_s=a^i_r a^j_s-a^j_r a^i_s$.

1771. Neka je $a^i_j x^j=b^i$ $(i, j=1, 2, \ldots, N)$ sistem jednačina po nepoznatim x^j. Ako je $|a^i_j|=a$ determinanta sistema, pokazati da su rešenja data sa

$$x^k=\frac{A^k_i b^i}{a}$$ gde je A^k_i kofaktor elementa a^i_k.

1772. Pokazati da je kofaktor A^i_r elementa a^r_i determinante $|a^r_i|$ $(i, r=1, 2, 3)$ dat sa $A^i_r=\dfrac{1}{2!}\delta^{ijk}_{rst}a^s_j a^t_k$.

1773. Ako su svi kofaktori A^i_k determinante $|a^i_k|$ jednaki nuli, tada je $a^i_k a^j_l=a^j_k a^i_l$.

1774. Iz $a_{ij}x^i y^j\equiv 0$ sledi $a_{ij}=0$. Dokazati.

1775. Ako sistem a^r_i zadovoljava jednačinu $a^r_i a^i_s=\delta^r_s$, pokazati da je

$$|a^i_l|=1 \quad \text{i} \quad |a^r_s-\delta^r_s|=0$$

$$\text{ili} \quad |a^i_l|=-1 \quad \text{i} \quad |a^r_s+\delta^r_s|=0.$$

Neka je za determinantu $|a^i_j|$ a vrednost determinante, A_i^j kofaktor koji odgovara elementu a^i_j i $\alpha^j_i=\dfrac{A^j_i}{a}$. Slično je za determinantu $|a_{ij}|$.

Dokazati da je:

1776. 1° $a=a^i_j A^j_i$, gde se po j ne vrši sabiranje; 2° $\dfrac{\partial a}{\partial a^i_j}=A^j_i$.

1777. 1° $\dfrac{\partial(\ln a)}{\partial a^i_j}=\alpha^j_i$; 2° $\dfrac{\partial(\ln a)}{\partial \alpha^i_j}=-a^j_i$.

1778. 1° $\dfrac{\partial a_{ij}}{\partial a_{rs}}=\delta^r_i\delta^s_j$; 2° $\dfrac{\partial a^{ij}}{\partial a^{rs}}=\delta^i_r\delta^j_s$.

1779. 1° $\dfrac{\partial a^{ij}}{\partial a_{rs}}=-a^{is}a^{rj}$; 2° $\dfrac{\partial a_{ij}}{\partial a^{rs}}=-a_{is}a_{rj}$.

§ 2. Transformacije promenljivih. Tenzorska algebra

1° Transformacija koordinata. Neka je

(1) $$\bar{x}^i=\bar{x}^i(x^1, x^2, \cdots, x^N) \quad (i=1, 2, \cdots, N)$$

sistem jednoznačnih diferencijabilnih funkcija od promenljivih $x^1, x^2, \cdots, x^N$.

Pretpostavimo još da je jakobijan

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^N} \\ \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \bar{x}^N}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^N}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial \bar{x}^N}{\partial x^N} \end{vmatrix} = \frac{\partial(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \cdots, \bar{x}^N)}{\partial(x^1, x^2, \cdots, x^N)} = \left|\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\right|$$

različit od nule tj. da je dati sistem reverzibilan, odnosno da definiše sistem diferencijabilnih funkcija

$$x^i=x^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \cdots, \bar{x}^N).$$

Specijalno, ako je (1) sistem linearnih funkcija

$$\bar{x}^i=a^i_j x^j$$

tada je on reverzibilan ako je

$$|a^i_j| = \left|\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\right| \neq 0.$$

Ovakvim sistemima se često transformišu koordinate x^i jednog koordinatnog sistema u koordinate $\bar{x}^i$ drugog koordinatnog sistema.

2° Invarijante. Ako se funkcija $\varphi=\varphi(x^1, x^2, \cdots, x^N)$ prilikom transformacija (1) transformiše u $\bar{\varphi}=\bar{\varphi}(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \cdots, \bar{x}^N)$ tako da je

$$\varphi(x^1, x^2, \cdots, x^N)=\bar{\varphi}(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \cdots, \bar{x}^N)$$

tada kažemo da je $\varphi(x^1, x^2, \cdots, x^N)$ *invarijanta* u odnosu na transformacije (1) ili da je *tenzor nultog reda.*

3° Definicija tenzora.

1) *Kontravarijantni vektor i kontravarijantni tenzor prvog reda.* Ako se prilikom transformacija (1) komponente sistema

$$A^i \quad (i=1, 2, \cdots, N)$$

date u odnosu na koordinate x^i transformišu u komponente sistema $\bar{A}^i$ po zakonu

$$\bar{A}^i=A^j\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j},$$

gde se podrazumeva konvencija o sabiranju po j; tada kažemo da je taj sistem *kontravarijantni vektor* ili *kontravarijantni tenzor prvog reda.*

2) *Kovarijantni vektor i kovarijantni tenzor prvog reda.* Sistem A_i čije su komponente date u odnosu na koordinate x^i, koji se prilikom transformacija (1) transformiše u sistem $\bar{A}_i$ po zakonu

$$\bar{A}_i=A_j\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}$$

zove se *kovarijantni vektor* ili *kovarijantni tenzor prvog reda.*

3) *Tenzori višeg reda.* Sistem $A^{i_1, i_2, \cdots i_m}_{j_1, j_2, \cdots j_n}$ reda $m+n$ dat u odnosu na koordinate x^i koji se prilikom transformacija (1) transformiše u sistem $\bar{A}^{i_1, i_2, \cdots i_m}_{j_1, j_2, \cdots j_n}$ po zakonu

$$\bar{A}^{i_1, i_2, \cdots i_m}_{j_1, j_2, \cdots j_n}=A^{k_1, k_2, \cdots k_m}_{l_1, l_2, \cdots l_n}\frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial \bar{x}^{i_2}}{\partial x^{k_2}}\cdots\frac{\partial \bar{x}^{i_m}}{\partial x^{k_m}}\frac{\partial x^{l_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}}\frac{\partial x^{l_2}}{\partial \bar{x}^{j_2}}\cdots\frac{\partial x^{l_n}}{\partial \bar{x}^{j_n}}$$

zove se *tenzor $m+n$-og reda m-puta kontravarijantan i n-puta kovarijantan.*

4) *Operacija sa tenzorima.* Sve definicije operacija sistema ostaju u važnosti ako su sistemi tenzori. Takođe se definicije simetričnih i antisimetričnih sistema prenose na tenzore.

5) *Relativni tenzori.* Sistem $A^{i_1, i_2, \cdots i_m}_{j_1, j_2, \cdots j_n}$ je *relativni tenzor $m+n$-og reda, težine M*, n-puta kovarijantan i m-puta kontravarijantan ako se transformiše po zakonu

$$\bar{A}^{i_1, i_2, \cdots i_m}_{j_1, j_2, \cdots j_n}=\left|\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^s}\right| A^{k_1, k_2, \cdots k_m}_{l_1, l_2, \cdots l_n}\frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial \bar{x}^{i_2}}{\partial x^{k_2}}\cdots\frac{\partial \bar{x}^{i_m}}{\partial x^{k_m}}\frac{\partial x^{l_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}}\frac{\partial x^{l_2}}{\partial \bar{x}^{j_2}}\cdots\frac{\partial x^{l_n}}{\partial \bar{x}^{j_n}}$$

gde je $\left|\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^s}\right|$ jakobijan transformacija starih promenljivih x^i u nove promenljive $\bar{x}^i$.

Relativni tenzor gustine nula je *apsolutni tenzor*. Relativni tenzor gustine $+1$ zove se *tenzorska gustina*, a gustine -1 *tenzorski kapacitet.*

Relativni tenzor nultog reda čija je težina $+1$ je *skalarna gustina*, a čija je težina -1 je *skalarni kapacitet.*

1780. Ako je za transformaciju $\bar{x}^i=a^i_j x^j$ inverzna transformacija $x^r=\bar{a}^r_i x^i$, dokazati da je $a^i_r \bar{a}^r_i=1$.

1781. Transformacija $\bar{x}^i=a^i_j x^j$ je ortogonalna ako je $a^i_j a^i_k=\delta_{jk}$. Dokazati da je kod ortogonalne transformacije svaki elemenat determinante jednak svome kofaktoru i obrnuto, ako je svaki elemenat jednak svome kofaktoru, transformacija je ortogonalna.

1782. Data je linearna transformacija određena jednačinama

$$\bar{x}^i=a^i_j x^j \quad (i, j,=1 \cdots, N),$$

gde su a^i_j realni brojevi. Pod pretpostavkom da je $a^i_j a^i_k=\delta_{jk}$, pokazati da su u odnosu na ovu transformaciju invarijantne sledeće funkcije:

1° $d=(x^i-y^i)(x^i-y^i)$; 2° $\cos\alpha=\dfrac{x_i y_i}{(x^k x^k)(y^j y^j)}$.

1783. Data je bilinearna forma $c_{jl}x^j x^l$ sa svojom matricom (c_{jl} ($j, l=1, 2, \cdots N$). Ako se ona transformiše transformacijama $\bar{x}^i = a^i_j x^j$ dobija se $b_{jl}\bar{x}^j\bar{x}^l$. Pokazati da je $b_{ik}=a^j_i a^l_k c_{jl}$.

1784. Transformacije $\bar{x}^i = a^i_j x^j$, pod uslovom $a^j_i a^j_k = q\delta_{ik}$, održavaju ugao između vektora tj. održavaju izraz $\dfrac{x_i y_i}{(x^k x^k)(y^j y^j)}$. Dokazati.

1785. Pokazati da je kvadratna diferencijalna forma

$$ds^2=(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2-c^2(dx^4)^2 \quad (c>a)$$

apsolutna invarijanta u odnosu na Laurenzove transformacije

$$x^1=\frac{\bar{x}^1-v\bar{x}^4}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}, \quad x^2=\bar{x}^2, \quad x^3=\bar{x}^3, \quad x^4=\frac{\bar{x}^4-v\bar{x}^1/c^2}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}.$$

1786. Napisati zakon po kome se transformišu tenzori:

$$1^\circ\ A^l_{jk}; \quad 2^\circ\ B^{mn}_{ijk}; \quad 3^\circ\ C^{ijk}_m$$

prilikom proizvoljnih transformacija $\bar{x}^i=\bar{x}^i(x^1, x^2, \cdots, x^N)$ promenljivih x^i u promenljive $\bar{x}^i$.

1787. Ispitati da li su sledeći sistemi tenzori. Ako jesu, kojeg su reda i koje su varijantnosti. $1^\circ\ dx^i$; $\quad 2^\circ\ \dfrac{\partial f(x^1, x^2, \cdots, x^N)}{\partial x^k}$.

1788. Pokazati da $\dfrac{\partial A_p}{\partial x^q}$ nije tenzor iako je A_p kovarijantni tenzor prvog reda.

1789. Ako su koordinate jednog tenzora jednake nuli u jednom koordinatnom sistemu, tada su one jednake nuli u svim drugim sistemima. Dokazati.

1790. Ako su odgovarajuće komponente dva tenzora jednake u jednom koordinatnom sistemu, jednake su i u svakom drugom koordinatnom sistemu.

1791. Pokazati da je brzina fluida u nekoj tački kontravarijantni tenzor prvog reda.

1792. Ako je $v^k=\dfrac{dx^k}{dt}$ tenzor brzine fluida u nekoj tački, pokazati da $\dfrac{dv^k}{dt}$ nije tenzor.

1793. Pokazati da je Kronecerov simbol δ^j_i tenzor drugog reda jednom kovarijantan i jednom kontravarijantan.

1794. Pokazati da sistem δ_{ij} ($\delta_{ij}=0$ za $i\neq j$ i $\delta_{11}=\delta_{22}=\cdots=\delta_{NN}=1$) nije tenzor.

1795. Ako je A_{ij} simetričan tenzor, dokazati da je i $\bar{A}_{ij}$ simetričan tenzor.

1796. Ako je A_{ij} antisimetričan tenzor, dokazati da je i $\bar{A}_{ij}$ antisimetričan tenzor.

1797. Neka su ξ^k i η^k dva kontravarijantna vektora trodimenzionalnog prostora. Dokazati da sistem A^k, gde je $A^1=\xi^2\eta^3-\xi^3\eta^2$, $A^2=\xi^3\eta^1-\xi^1\eta^3$, $A^3=\xi^1\eta^2-\xi^2\eta^1$, nije vektor.

1798. Neka su ξ^k, η^k, ς^k tri vektora trodimenzionalnog prostora.

Dokazati da „zapremina"

$$V=\begin{vmatrix} \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 \\ \eta^1 & \eta^2 & \eta^3 \\ \varsigma^1 & \varsigma^2 & \varsigma^3 \end{vmatrix}$$

nije skalar.

1799. Ako je A^k sistem iz zadatka 1797. a V veličina iz prethodnog zadatka, dokazati da je $\dfrac{A^k}{V}$ kovarijantni vektor.

1800. Ako su A^{pq}_r i B^{pq}_r tenzori, pokazati da je njihov zbir (razlika) tenzor.

1801. Ako su A^{pq}_r i B^s_t tenzori, pokazati da je $C^{pqs}_{rt}=A^{pq}_r B^s_t$ takođe tenzor.

1802. Dat je tenzor A^{pq}_{rst}. 1° Ako se stavi $p=t$, pokazati da je A^{pq}_{rsp} tenzor. Kojeg je reda? 2° Staviti $p=t$ i $q=s$ i pokazati da je A^{pq}_{rpq} tenzor. Kojeg je reda?

1803. Naći kontrakciju od proizvoda tenzora A^p i B_q.

1804. Ako su A^p_q i B_r tenzori pokazati da su $A^p_q B^r$ i $A^p_q B^q$ tenzori i odrediti im red.

1805. Ako je A^{pq}_{rs} tenzor, pokazati da je $A^{pq}_{rs}+A^{qp}_{sr}$ simetričan tenzor i $A^{pq}_{rs}-A^{qp}_{sr}$ antisimetričan tenzor.

1806. Ako su A^{pq} i B_{rs} antisimetrični tenzori, pokazati da je $C^{pq}_{rs}=A^{pq}B_{rs}$ simetričan tenzor.

1807. Ako su A_{ij} i B_{ij} simetrični tenzori takvi da je

$$A_{ij}B_{kl}-A_{il}B_{jk}+A_{jk}B_{il}-A_{kl}B_{ij}=0$$

tada je $B_{ij}=\varrho A_{ij}$ gde je ϱ neki skalar. Dokazati.

1808. Koordinate antisimetričnog tenzora, koji ima dva ili više od dva indeksa jednaka, jednake su nuli. Dokazati.

1809. Ako je neki tenzor simetričan (antisimetričan), da li je kontrakcija po ponovljenim indeksima simetrična (antisimetrična)?

1810. Ako je $A(p, q, r)$ veličina koja zavisi od p, q i r takva da je $A(p, q, r)B_r{}^{qn}=0$ za proizvoljan tenzor $B_r{}^{2n}$ tad je $A(p, q, r)=0$ identitet. Dokazati.

1811. Ako je veličina $A(p, q, r)$ takva da je u jednom koordinatnom sistemu $A(p, q, r)B^{qs}_r=C^s_p$ gde je B^{qs}_r proizvoljni tenzor a C^s_p dati tenzor, dokazati da je $A(p, q, r)$ tenzor.

1812. Ako su $\xi^{j_1}_1, \xi^{j_2}_2, \ldots, \xi^{j_p}_p$ kontravarijantni vektori i $\overset{1}{\eta}_{i_1}, \overset{2}{\eta}_{i_2}, \ldots \overset{q}{\eta}_{i_q}$ kovarijantni vektori, dokazati da je

$$A^{j_1, j_2, \ldots j_p}_{i_1, i_2, \ldots i_q} = \xi^{j_1}_1 \xi^{j_2}_2 \ldots \xi^{j_p}_p \overset{1}{\eta}_{i_1} \overset{2}{\eta}_{i_2} \ldots \overset{q}{\eta}_{i_q}$$

tenzor tipa (q, p).

1813. Ako su koordinate dva relativna tenzora jednakih težina, istog tipa, jednake u jednom koordinatnom sistemu, pokazati da su jednake i u svakom drugom koordinatnom sistemu.

1814. Dokazati da je zbir (razlika) dva relativna tenzora jednake težine i istoga tipa, relativni tenzor iste težine i istoga tipa.

1815. Ako su A^p_q i B^{rs}_t relativni tenzori čije su težine redom w_1 i w_2, pokazati da su njihovi spoljašnji proizvodi i unutrašnji proizvodi relativni tenzori.

1816. Ako je A_{rs} neki apsolutni antisimetričan tenzor u četvorodimenzionom prostoru, pokazati da je $A_{14}A_{23} + {}_{24}A_{31} + A_{34}A_{12}$ skalarna gustina.

1817. Ako je A_{ij} apsolutni tenzor, pokazati da je determinanta $|A_{ij}|$ relativna invarijanta težine 2.

1818. Ako je A_{ij} apsolutni tenzor, pokazati da su kofaktori elemenata A_{ij} determinante $|A_{ij}|$ koordinate kontravarijantnog relativnog tenzora težine 2.

1819. Ako je A_{ij} apsolutni tenzor u četvorodimenzionom prostoru, pokazati da je $\sqrt{|A_{ij}|}$ skalarna gustina.

1820. Dat je tenzor A_{ij} čija je determinanta $|A_{ij}| = A$ pozitivna. Pokazati da su $\sqrt{A}\, e_{ijk}$ i $\frac{1}{\sqrt{A}} e_{ijk}$ apsolutni tenzori.

1821. Neka je $A(p, q)\, B^{qs}_r = C^s_{pr}$ gde je B^{qs}_r proizvoljan relativan tenzor težine w_1 i C^s_{pr} dati relativni tenzor težine w_2. Pokazati da je $A(p, q)$ relativni tenzor težine $w_2 - w_1$.

§ 3. Tenzorska analiza

1° Osnovni metrički tenzor i njegov inverzni tenzor. Neka su y^i pravougle koordinate a x^i proizvoljne generalisane koordinate u N-dimenzionom euklidskom prostoru, tako da između njih postoje veze

$$y^i = y^i(x^1, x^2, \ldots, x^N).$$

sistem

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^k}{\partial x^j} = \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^k}{\partial x^j}$$

je *osnovni (fundamentalni) metrički tenzor.*

Osnovna metrička forma prostora

(1) $$ds^2 = dy^i\, dy^i$$

može se izraziti preko generalisanih koordinata x^i u obliku

(2) $$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j.$$

Svaki simetričan sistem g_{ij} koji zavisi od generalisanih koordinata x^i definiše, kao (2), metriku nekog *Riemannovog prostora.* U slučaju da postoje koordinate y^i u kojima metrička forma (2) dobija oblik (1) takav prostor je Euklidov.

Označimo sa G^{ij} kofaktor elementa g_{ij} determinante $g = |g_{ij}|$. Sistem $g^{ij} = \frac{G^{ij}}{g}$ je dva puta kontravarijantni tenzor koji se zove *inverzni tenzor osnovnog metričkog tenzora ili osnovni kontravarijantni tenzor.* Tada je

$$g_{jk}\, g^{ik} = g_{kj}\, g^{ki} = \delta^i_j.$$

2° Združeni tenzori. Tenzor koji se dobija podizanjem ili spuštanjem indeksa datom tenzoru i dati tenzor zovu se *združeni tenzori.* Na mesto prvobitnog položaja indeksa stavlja se tačka.

Unutrašnji proizvod metričkog tenzora g_{ij} (ili g^{ij}) i datog tenzora uvek daje jedan novi tenzor koji je združen prvobitnom. Tako, ako je A_i kovarijantni vektor, $A^i_{\cdot} = g^{ij} A_j$ je kontravarijantni vektor. Isto tako, ako je A^i kontravarijantni vektor. Takođe je

$$A^p{}_{\cdot q} = g^{rp} A_{rq}, \quad A^{pq}_{\cdot\cdot} = g^{rp} g^{sq} A_{rs}, \quad A^p{}_{\cdot rs} = g_{rq} A^{pq}{}_{\cdot\cdot s}$$

$$A^{qm\cdot tk}_{\cdot\cdot n} = g^{pq} g_{sn} g^{rm} A^{q\cdot st}_{\cdot r\cdot\cdot p}.$$

Ako su svi indeksi donji podignuti ili svi indeksi gornji spušteni onda se na njihovim mestima ne stavlja tačka.

3° Skalarni proizvod vektora i fizičke koordinate tenzora. *Skalarni proizvod vektora* A^i i B_i je skalar $A^i B_i$.

Intenzitet A vektora A_i ili A^i je dat sa

$$A^2 = A^i A_i = g^{ij} A_i A_j = g_{ij} A^i A^j.$$

Kosinus ugla između vektora A_i i B_i je dat sa

$$\cos\alpha = \frac{A^k B_k}{\sqrt{(A^i A_i)(B^j B_j)}}.$$

Projekcija vektora A^i na vektor B^i je skalar

$$(A^i B_i)/\sqrt{B^i B_i}.$$

Neka su $\lambda^i_{(j)}$ jedinični vektori ((j) označava redni broj vektora). Tada su fizičke koordinate vektora A_i ili A^i u pravcu vektora $\lambda^j_{(k)}$ date sa $g_{ij} A^i \lambda^j_{(k)} = A_j \lambda^j_{(k)}$. Fizičke koordinate tenzora A_{ij} odnosno tenzora A^{ij} u pravcima vektora $\lambda^i_{(l)}$ i $\lambda^j_{(k)}$ su

$$g_{ir}\, g_{js}\, A^{rs} \lambda^i_{(l)} \lambda^j_{(k)} = A_{ij} \lambda^i_{(l)} \lambda^j_{(k)}.$$

4° **Christoffelovi simboli.** Simboli $[ij,\, k]$ i $\left\{ {k \atop ij} \right\}$ definisani sa:

$$[ij,\, k] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right),$$

$$\left\{ {k \atop ij} \right\} = g^{kh}\,[ij,\, h]$$

nazivaju se redom *Christoffelovi simboli prve i druge vrste.*

Pri transformaciji koordinata Christoffelovi simboli se transformišu po obrascima

$$\overline{[ij,\, k]} = [rs,\, p]\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}\,\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\,\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^k} + g_{rs}\frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j}\,\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^k},$$

$$\overline{\left\{ {h \atop ij} \right\}} = \left\{ {m \atop rs} \right\}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}\,\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\,\frac{\partial \bar{x}^h}{\partial x^m} + \frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j}\,\frac{\partial \bar{x}^h}{\partial x^m}.$$

5° **Riemann-Christoffelovi tenzori.** Sistem

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left\{ {l \atop ik} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^k}\left\{ {l \atop ij} \right\} + \left\{ {l \atop rj} \right\}\left\{ {r \atop ik} \right\} - \left\{ {l \atop rk} \right\}\left\{ {r \atop ij} \right\}$$

zove se *Riemann-Christoffelov tenzor* ili Riemannov simbol prve vrste.

Sistem $R_{lijk} = g_{lm} R^m_{ijk}$ zove se *kovarijantni Riemann-Christoffelov tenzor* ili Riemannov simbol prve vrste.

6° **Kovarijantni izvod tenzora.** Kovarijantni izvod tenzora A_i po x^j označava se sa $A_{i,j}$ a definisan je sa

$$A_{i,j} = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \left\{ {k \atop ij} \right\} A_k.$$

Kovarijantni izvod tenzora A^i po x^j označava se sa $A^i_{,j}$ a definisan je sa

$$A^i_{,j} = \frac{\partial A^i}{\partial x^j} + \left\{ {i \atop jk} \right\} A^k.$$

Uopšte, $A^{i_1 i_2 \cdots i_m}_{j_1 j_2 \cdots j_n,\, k}$ je oznaka za kovarijantni izvod tenzora $A^{i_1 i_2 \cdots i_m}_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ po x^k a definisan je sa

$$A^{i_1 i_2 \cdots i_m}_{j_1 j_2 \cdots j_n,\, k} = \frac{\partial A^{i_1 i_2 \cdots i_n}_{j_1 j_2 \cdots j_n}}{\partial x^k}$$

$$-\left\{ {l \atop j_1 k} \right\} A^{i_1 i_2 \cdots i_m}_{l j_2 \cdots j_n} - \left\{ {l \atop j_2 k} \right\} A^{i_1 i_2 \cdots i_m}_{j_1 l j_3 \cdots j_n} - \cdots - \left\{ {l \atop j_n k} \right\} A^{i_1 i_2 \cdots i_m}_{j_1 j_2 \cdots j_{n-1} l}$$

$$+\left\{ {i_1 \atop kl} \right\} A^{l i_2 \cdots i_m}_{j_1 j_2 \cdots j_n} + \left\{ {i_2 \atop kl} \right\} A^{i_1 l i_2 \cdots i_m}_{j_1 j_2 \cdots j_n} + \cdots + \left\{ {i_m \atop kl} \right\} A^{i_1 i_2 \cdots i_{m-1} l}_{j_1 j_2 \cdots j_n}.$$

7° **Apsolutni izvod tenzora.** Ako koordinate x^i zavise od jednog parametra t, tj ako je $x^i = x^i(t)$, tada se apsolutni izvod vektora A_i po parametru t označava sa $\frac{\delta A_i}{\delta t}$ a definiše se sa

$$\frac{\delta A_i}{\delta t} = A_{i,j}\frac{dx^j}{dt}.$$

Apsolutni izvod kontravarijantnog vektora A^i po parametru t je

$$\frac{\delta A^i}{\delta t} = A^i_{,j}\frac{dx^j}{dt}.$$

Uopšte, apsolutni izvod tenzora $A^{i_1 i_2 \cdots i_m}_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ po parametru t dat je sa

$$\frac{\delta A^{i_1 i_2 \cdots i_m}_{j_1 j_2 \cdots j_n}}{\delta t} = A^{i_1 i_2 \cdots i_m}_{j_1 j_2 \cdots j_n,\, k}\frac{dx^k}{dt}.$$

1822. Ako je $ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j$ invarijanta, pokazati da je g_{ij} simetrični kovarijantni tenzor drugog reda.

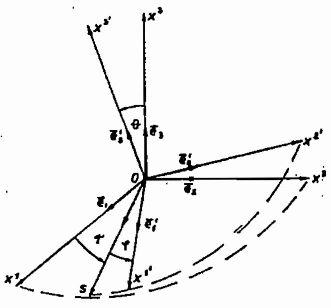
1823. U ravni je dat afini koordinatni sistem $(O,\, \vec{e}_1,\, \vec{e}_2)$ sa koordinatnim početkom u tački O i koordinatnim vektorima $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$ koji imaju dužine e_1 i e_2 a međusobno zaklapaju ugao ω.

1° Napisati koordinate osnovnog metričkog tenzora u opštem slučaju i u slučaju da je sistem Descartesov pravougli.

2° Izvesti, koristeći 1°, obrazac za rastojanje dveju tačaka u ravni.

3° Odrediti dužinu luka s krive $y = f(x)$ u kosouglom sistemu.

1824. Neka su $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ i $\vec{e}_3$ ortovi koordinatnih osa pravouglog koordinatnog sistema K sa koordinatnim početkom u tački O i $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$ i $\vec{e}_3'$ ortovi koordinatnih osa drugog pravouglog koordinatnog sistema K' sa koordinatnim početkom takođe u tački O. Neka se ravan $x^{1'} O x^{2'}$ seče sa ravni $x^1 O x^2$ po pravoj Os (sl. 9). Tada imamo nazive: ugao $\psi = \measuredangle\, x^1 O s$ — ugao precesije, ugao $\varphi = \measuredangle\, s O x^{1'}$ — ugao rotacije i ugao $\theta = \measuredangle\, x^3 O x^{3'}$ — ugao nutacije. Uglovi ψ, φ i θ se nazivaju Eulerovim uglovima.



Sl. 9

Izraziti vektore $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$ i $\vec{e}_3'$ preko $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ i $\vec{e}_3$ i ψ, φ, θ.

1825. Pokazati da su ψ, φ i θ nezavisni parametri.

1826. Neka je u trodimenzionom realnom prostoru kvadratni metrički tenzor dat matricom

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Dokazati da je prostor Euklidov.

1827. Odrediti koordinate metričkog tenzora g_{ij} za trodimenzioni prostor u cilindarskim koordinatama. Odrediti, takođe, ds^2.

1828. Odrediti koordinate metričkog tenzora g_{ij} za trodimenzioni prostor u sfernim koordinatama.

1829. Odrediti koordinate metričkog tenzora i inverznog metričkog tenzora u paraboličkim cilindarskim koordinatama (u, v, z).

$$\left(x=\frac{1}{2}(u^2-v^2),\quad y=uv,\quad z=z;\qquad -\infty<u<\infty,\ v>0,\quad -\infty<z<\infty\right).$$

1830. Odrediti koordinate metričkog tenzora i inverznog metričkog tenzora u eliptičkim cilindričkim koordinatama (u, v, z)

$$(x=a\,\mathrm{ch}\,u\cos v,\quad y=\mathrm{sh}\,u\sin v,\quad z=z;\quad u>0,\quad 0<v<2\pi,\quad -\infty<z<\infty).$$

1831. Ako je $g_{ij}=0$ za $i\neq j$ pokazati da je $g^{kk}=\dfrac{1}{g_{kk}}$, gde se ne vrši sabiranje, i $g^{kl}=0$ za $k\neq l$.

1832. Dokazati da je u euklidskom prostoru od N-dimenzija $g_{ij}\,g^{ij}=N$.

1833. Naći $g=|g^{ij}|$ i g^{ij} ako je osnovna metrička forma

$$ds^2=3\,(dx^1)^2+2\,(dx^2)^2+4\,(dx^3)^2-6\,dx^1\,dx^3.$$

1834. Dokazati da je g^{ij} simetrični kontravarijantni tenzor drugog reda.

1835. Dokazati da je:

$$1^\circ\ \frac{\partial g}{\partial g_{ij}}=g\,g^{ij};\qquad 2^\circ\ \frac{\partial(\ln g)}{\partial g_{ij}}=g^{ij};\qquad 3^\circ\ \frac{\partial(\ln g)}{\partial x^k}=g^{ij}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}.$$

1836. Neka je G_{ij} kofaktor determinante $|g^{ij}|$ koji odgovara elementu g^{ij}. Dokazati da je G_{ij} relativni tenzor težine -2.

1837. Odrediti jedinični vektor vektora A^p.

1838. Ako su λ^i i μ^i jedinični vektori, pokazati da je $|g_{ij}\,\lambda^i\mu^j|<1$.

1839. Ako su λ^i i μ^i jedinični vektori a ugao θ između njih, pokazati da je $\sin^2\theta=(g_{ij}\,g_{rs}-g_{ir}\,g_{js})\,\lambda^i\lambda^j\mu^r\mu^s$.

1840. Pokazati da je u trodimenzionalnom prostoru

$$1-\cos^2\theta_{23}-\cos^2\theta_{31}-\cos^2\theta_{12}+2\cos\theta_{12}\cos\theta_{23}\cos\theta_{31}=\frac{g}{g_{11}\,g_{22}\,g_{33}},$$

gde je θ_{ij} ugao između jediničnih vektora $\vec{e}_i$ i $\vec{e}_j$ koordinatnog triedra $e_i\ (i=1, 2, 3)$.

1841. Ako je θ_{23} ugao između koordinatnih vektora u trodimenzionom Euklidskom prostoru, pokazati da je $\sin^2\theta_{23}=\dfrac{g\,g^{11}}{g_{22}\,g_{33}}$.

1842. Ako je $A_j=g_{jk}A^k$, pokazati da je $A^k=g^{jk}A_j$.

1843. Ako su A^p i B^q vektori, pokazati da su sledeći izrazi invarijante:

$$1^\circ\ g_{pq}A^pB^q;\qquad 2^\circ\ \frac{g_{pq}A^pB^q}{\sqrt{(A^pA_p)\,(B^qB_q)}}.$$

1844. Tenzor $\varepsilon_{i_1 i_2\cdots i_n}=(-1)^s\sqrt{g}$, gde je s broj inverzija u permutaciji $(i_1\ i_2\cdots i_n)$ i $\varepsilon_{i_1 i_2\cdots i_n}=0$ ako su bar dva indeksa jednaka, naziva se kovarijantni diskriminantni tenzor. Slično se definiše kontravarijantni diskriminantni tenzor. Dokazati da je:

$$1^\circ\ \varepsilon^{i_1 i_2\cdots i_n}=g^{i_1 a_1}g^{i_2 a_2}\cdots g^{i_n a_n}\varepsilon_{a_1 a_2\cdots a_n},$$

$$2^\circ\ \varepsilon_{i_1 i_2\cdots i_n}=g_{i_1 a_1}g_{i_2 a_2}\cdots g_{i_n a_n}\varepsilon^{a_1 a_2\cdots a_n}.$$

1845. Naći vezu između sledećih združenih tenzora:

$$1^\circ\ A^{jkl}\ \text{i}\ A_{pqr};\quad 2^\circ\ A_{j\cdot l}^{\cdot k}\ \text{i}\ A^{kqr};\quad 3^\circ\ A^{p\cdot rs}_{\cdot q\cdot\cdot t}\ \text{i}\ A_{jqk}^{\cdot\cdot\cdot sl}.$$

1846. Pokazati da je:

$$1^\circ\ A_q^{\cdot p}B^p_{\cdot rs}=A^{pq}B_{qrs};\qquad 2^\circ\ A^{pq}_{\cdot\cdot r}B_p^{\cdot r}=A_{p\cdot r}^{\cdot q}B^{pr}=A_p^{\cdot qr}B_{\cdot r}.$$

1847. Ako je $A^p_{\cdot qr}=B^p_{\cdot q}C_r$ tada je $A_{pqr}=B_{pq}C_r$ i $A_p^{\cdot qr}=B_p^{\cdot q}C^r$. Dokazati.

1848. Da li su tačne jednakosti

$$1^\circ\ \bar{g}_{jk}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^p}=g_{pq}\frac{\partial x^q}{\partial\bar{x}^k};\qquad 2^\circ\ \bar{g}^{jk}\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^j}=g^{pq}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^q}?$$

1849. Ako je λ^i jedinični vektor, pokazati da su kosinusi uglova koje on gradi sa koordinatnim linijama nekog krivolinijskog koordinatnog sistema, u trodimenzionom prostoru, dati sa: $\dfrac{\lambda_1}{\sqrt{g_{11}}},\ \dfrac{\lambda_2}{\sqrt{g_{22}}},\ \dfrac{\lambda_3}{\sqrt{g_{33}}}$.

Dokazati da je:

1850. $1^\circ\ [pq, r]=[qp, r];\quad 2^\circ\ \left\{{s \atop pq}\right\}=\left\{{s \atop qp}\right\};\quad 3^\circ\ [pq, r]=g_{rs}\left\{{s \atop pq}\right\}$.

1851. $1^\circ\ \dfrac{\partial g_{pq}}{\partial x^m}=[pm, q]+[qm, p];\quad 2^\circ\ \dfrac{\partial g^{pq}}{\partial x^m}=-g^{pn}\left\{{q \atop mn}\right\}-g^{qn}\left\{{p \atop mn}\right\};$

$$3^\circ\ \left\{{p \atop pq}\right\}=\frac{\partial\ln\sqrt{g}}{\partial x^q}.$$

1852. $$\frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} = \overline{\left\{ {n \atop jk} \right\}} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^n} - \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} \left\{ {m \atop pq} \right\}.$$

1853. 1° $(pp, p) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p}$; 2° $[pp, r] = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{pp}}{\partial x^2}$ ako je $g_{pq} = 0$ za $p \neq q$; 3° $[pq, p] = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{pp}}{\partial x^q}$ ako je $g_{pq} = 0$ za $p \neq q$;

4° $[pq, r] = 0$ ako je $g_{pq} = 0$ za $p \neq q$.

U svim slučajevima se ne vrši sabiranje po ponovljenim indeksima.

1854. Ako je $g_{pq} = 0$ za $p \neq q$, dokazati da je:

$$1^\circ \left\{ {p \atop pp} \right\} = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln g_{pp}}{\partial x^p}; \qquad 2^\circ \left\{ {s \atop pp} \right\} = -\frac{1}{2 g_{ss}} \frac{\partial g_{pp}}{\partial x^s} \qquad (p \neq s);$$

$$3^\circ \left\{ {p \atop pq} \right\} = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln g_{pp}}{\partial x^q} \quad (p \neq q); \qquad 4^\circ \left\{ {s \atop pq} \right\} = 0$$

p, q i s su međusobno različiti. U svim slučajevima ne važi konvencija o sabiranju.

1855. Odrediti koordinate Christoffelovih simbola prve vrste u: 1° pravouglim, 2° cilindričnim i 3° sfernim koordinatama.

1856. Odrediti koordinate Christoffelovih simbola druge vrste u: 1° pravouglim, 2° cilindričnim i 3° sfernim koordinatama.

1857. Odrediti koordinate Christoffelovih simbola druge vrste u eliptičko cilindričnim koordinatama.

1858. Odrediti Cristoffelove simbole druge vrste koristeći metričku formu $ds^2 = (dx^1)^2 + [(x^2)^2 - (x^1)^2] (dx^2)^2$.

Pokazati da je:

1859. $R^l_{ijk} = -R^l_{jki}$.

1860. $R^l_{ijk} + R^l_{jki} + R^l_{kij} = 0$. 1861. $R^l_{ijk} = 0$.

1862. $$R_{lijk} = \frac{\partial}{\partial x_j} [ik, l] - \frac{\partial}{\partial x^k} [ij, l] + \left\{ {m \atop ij} \right\} [kl, m] - \left\{ {m \atop ik} \right\} [jl, m].$$

1863. $R_{lijk} = -R_{likj}$. 1864. $R_{lijk} = R_{iljk}$. 1865. $R_{lijk} = R_{jkli}$.

1866. $R_{lijk} + R_{ljki} + R_{lkij}$.

1867. Pokazati da je broj nezavisnih koordinata u n-dimenzionom Riemannovom prostoru $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$.

1868. Naći koordinate Riemann-Christoffelovog tenzora u euklidskom prostoru.

1869. Ako je u odnosu na pravougli sistem koordinata u dvodimenzionom Riemannovom prostoru metrička forma data sa $ds^2 = g_{11} (dx^1)^2 + g_{22} (dx^2)^2$, dokazati da je

$$R_{1212} = -\frac{\sqrt{g}}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right) \right].$$

1870. Pokazati da je sistem $R_{ij} = R^k_{ijk}$ tenzor. (Ovaj tenzor se naziva Ricciev tenzor).

1871. Dokazati da je

$$R_{ij} = \frac{\partial^2 \ln \sqrt{g}}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial}{\partial x^h} \left\{ {h \atop ij} \right\} + \left\{ {l \atop ih} \right\} \left\{ {h \atop li} \right\} - \left\{ {l \atop ij} \right\} \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial x^l}.$$

1872. Proveriti jednakost u nekom trodimenzionom Riemannovom prostoru

$$R_{lijk} = g_{lk} R_{ij} + g_{ij} R_{lk} - g_{lj} R_{ik} - g_{ik} R_{lj} + \frac{R}{2} (g_{lj} g_{ik} - g_{lk} g_{ij}),$$

gde je $R = g^{ij} R_{ij}$.

1873. Ako su A_p i A^p tenzori, pokazati da su tenzori:

$$1^\circ \ A_{p,q} = \frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \left\{ {s \atop pq} \right\} A_s; \qquad 2^\circ \ A^p_{,q} = \frac{\partial A^p}{\partial x^q} + \left\{ {p \atop qs} \right\} A^s.$$

1874. Pokazati da je

$$A_{i,j} - A_{j,i} = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A^j}{\partial x_i}.$$

1875. Naći kovarijantne izvode po x^q sledećih tenzora:

1° A_{jk}; 2° A^{jk}; 3° A^j_k; 4° A^j_{kl}; 5° A^{jkl}_{mn}.

Dokazati da je:

1876. 1° $g_{jk,q} = 0$; 2° $g^{jk}_{,q} = 0$; 3° $\delta^{jk}_{k,q} = 0$.

1877. 1° $(g_{jk} A^k)_{,q} = g_{jk} A_{,q}^{k}$; 2° $(A^j B_k)_{,q} = A^j_{,q} B_k + A^j B_{k,q}$;

3° $(\delta^j_k A_j)_{;q} = \delta^j_k A_{j,q}$.

1878. $(g_{jk} A^{km}_n)_{,q} = g_{jk} A^{km}_{n,q}$.

1879. $\dfrac{\delta A^j}{\delta t}=\dfrac{\partial A^j}{\partial x^q}\dfrac{dx^q}{dt}+\left\{\begin{matrix} i \\ qs\end{matrix}\right\}A^s\dfrac{dx^q}{dt}=\dfrac{dA^j}{dt}+\left\{\begin{matrix} j \\ qs\end{matrix}\right\}A^s\dfrac{dx^q}{dt}.$

1880. $\delta A^j_k/\delta t = dA^j_k/dt-\left\{\begin{matrix} s \\ kq\end{matrix}\right\}A^j_s\, dx^q/dt+\left\{\begin{matrix} j \\ qs\end{matrix}\right\}A^s_k\, dx^q/dt.$

1881. 1° $\delta g_{jk}/\delta t=0$; 2° $\delta g^{jk}/\delta t=0$; 3° $\delta\delta^j_k/\delta t=0$.

1882. $\delta\Phi/\delta t=d\Phi/dt$;

gde je Φ invarijanta.

1883. $\dfrac{d}{dt}(g^{pq}A_p A_q)=2\,g^{pq}A_p\dfrac{\delta A_q}{\delta t}.$

1884. $\dfrac{d}{dt}(g_{ij}A^i B^j)=g_{ij}\dfrac{\delta A^i}{\delta t}B^j+g_{ij}A^i\dfrac{\delta B^j}{\delta t}.$

1885. $g_{jk}\,\delta^j_r\dfrac{\delta A^r_p}{\delta t}=g_{rk}\left(\dfrac{dA^r_p}{dt}-\left\{\begin{matrix} s \\ pq\end{matrix}\right\}A^r_s\dfrac{dx^q}{dt}+\left\{\begin{matrix} r \\ qs\end{matrix}\right\}A^s_p\dfrac{dx^q}{dt}\right).$

§ 4. Primena tenzora u diferencijalnoj geometriji i mehanici

1° Tenzorski oblik gradijenta, divergencije, rotora i laplasijana. 1) Ako je Φ skalar ili invarijanta tad je *gradijent od* Φ definisan sa

$$\nabla\Phi=\mathrm{grad}\,\Phi=\Phi_{,p}=\frac{\partial\Phi}{\partial x^p}$$

gde je $\Phi_{,p}$ oznaka za kovarijantni izvod Φ po x^p.

2) *Divergencija* vektora A^p je definisana sa

$$\mathrm{div}\,A^p=A^p_{,p}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}\,A^k)$$

gde je $A^p_{,p}$ kontrakcija vektora $A^p_{,q}$.

3) *Rotor* vektora A_p je definisan sa

$$\mathrm{rot}\,A_p=A_{p,q}-A_{q,p}=\frac{\partial A_p}{\partial x^q}-\frac{\partial A_q}{\partial x^p}.$$

4) *Laplasijan* od Φ je definisan sa

$$\nabla^2\Phi=\mathrm{div}\,\Phi_{,p}.$$

2° Kriva u prostoru. Neka su (1) $x^i=x^i(t)$ jednačine krive u Riemanovom prostoru. Tada je:

1) Dužina luka krive između tačaka t_1 i t_2 data sa

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}\,dt.$$

2) Promenljivi vektori A^i definisani na krivoj (1) su međusobno *paralelni* i jednakih intenziteta ako zadovoljavaju jednačinu

$$\frac{dA^i}{dt}+\left\{\begin{matrix} j \\ jk\end{matrix}\right\}A^j\frac{dx^k}{dt}=0.$$

3) *Geodezijska linija* (kriva čija je dužina luka između dve date tačke najmanja) je rešenje jednačine

$$\frac{d^2x^l}{ds^2}+\left\{\begin{matrix} l \\ jk\end{matrix}\right\}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0.$$

4) *Frenetovi obrasci* krive (1) su:

$$\frac{d\tau^i}{ds}+\left\{\begin{matrix} i \\ jk\end{matrix}\right\}\tau^j\frac{dx^k}{ds}=K\beta^i,$$

$$\frac{d\beta^i}{ds}+\left\{\begin{matrix} i \\ jk\end{matrix}\right\}\beta^j\frac{dx^k}{ds}=-(K\tau^i+T\nu^i),$$

$$\frac{d\nu^i}{ds}+\left\{\begin{matrix} i \\ jk\end{matrix}\right\}\nu^j\frac{dx^k}{ds}=T\beta^i$$

gde su τ^i, β^i, ν^i redom kontravarijantne koordinate jediničnih vektora tangente, glavne normale i binormale, s luk te krive a K i T krivina odnosno torzija.

3° Unutrašnja geometrija površi. Neka su $x^i=x^i(u^1, u^2)$ $(i=1, 2, 3)$ jednačine površi, a $u^\alpha=u^\alpha(t)$ $(\alpha=1, 2)$ jednačine krive na toj površi.

1) *Prva osnovna forma površi* je izraz

$$g_{\alpha\beta}\,du^\alpha\,du^\beta$$

2) *Krivina prostora.* Riemannov prostor čija se metrička forma može, u odnosu na neki sistem koordinata x^i napisati u obliku

$$ds^2=\varepsilon_i\,(dx^i)^2,$$

gde su ε_i jednaki 1 ili -1, zove se ravan prostor ili pseudo-Euklidov prostor. Ako su svi ε_i jednaki 1 prostor je Euklidov.

Potreban i dovoljan uslov da je jedan prostor, pozitivno definitne metrike, Euklidov jeste da je

$$R_{lijk}=0 \quad \text{ili} \quad R^l_{ijk}=0.$$

Ovi tenzori se zovu i tenzori krivine prostora.

3) *Totalna krivina površi (Gaussova krivina)* je

$$K=\frac{R_{1212}}{|g_{\alpha\beta}|}.$$

4) *Druga osnovna kvadratna forma površi* je izraz

$$d_{\alpha\beta}\, du^{\alpha}\, du^{\beta} \qquad \text{gde je} \qquad d_{\alpha\beta} = \sum_i x^i \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^{\alpha}\, \partial u^{\beta}}.$$

5) *Normalna krivina površi za pravac* du^{α} je data sa

$$K = \frac{1}{R} = \frac{d_{\alpha\beta}\, du^{\alpha}\, du^{\beta}}{g_{\alpha\beta}\, du^{\alpha}\, du^{\beta}}.$$

6) *Asimptotske linije* površi su integrali jednačine

$$d_{\alpha\beta}\, du^{\alpha}\, du^{\beta} = 0.$$

1886. Pokazati da je $A_{i,j} = A_{j,i}$, ako je A_i neki gradijent, i obrnuto.

1887. Izraziti divergenciju vektora A^p preko njegovih fizičkih koordinata duž tangentnih vektora koordinatnih krivih: 1° u cilindričnim koordinatama; 2° u sfernim koordinatama.

1888. Naći laplasijan $\nabla^2 \Phi$ u: 1° cilindričnim koordinatama, 2° sfernim koordinatama.

1889. Dokazati da je $\nabla^2 \Phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}\, g^{kr} \frac{\partial \Phi}{\partial x^r}\right)$.

1890. Koristeći tenzorske oznake pokazati da je

1° $\operatorname{div}(\operatorname{rot} A^p) = 0$; 2° $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \Phi) = 0$.

1891. Pokazati da se $\operatorname{div} A_p$ može napisati u obliku

$$\operatorname{div} A_p = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{A_j}{\sqrt{g}} G^{ij}\right)$$

gde su G^{ij} kofaktori determinante $g = |g_{ij}|$.

1892. Ako je a_{ij} rotor kovarijantnog vektora pokazati da je

$a_{ij,k} + a_{jk,i} + a_{ki,j} = 0$ i da je to ekvivalentno sa

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial x^j} = 0.$$

1893. Dokazati da je $\frac{\partial}{\partial x^k}$ $(\operatorname{grad} \Phi)^2 = 2\, g^{ij} \Phi_{,i} \Phi_{,jk}$, gde je $(\operatorname{grad} \Phi)^2$ oznaka za kvadrat intenziteta vektora $\operatorname{grad} \Phi$.

1894. Napisati u tenzorskom obliku Stokesovu formulu.

1895. Napisati diferencijalne jednačine geodezijskih linija u: 1° cilindričnim koordinatama; 2° polarnim koordinatama.

1896. Geodezijska nula linija zove se ona linija za koju diferencijalna jednačina geodezijske linije ima prvi integral

$$g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0.$$

1897. Pokazati da su, u trodimenzionom prostoru čija je metrička forma određena sa $ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 - (dx^3)^2$, geodezijske nula linije određene sa

$$x^i = a^i s + b^i$$

gde su a^i i b^i parametri pri čemu je $(a^1)^2 + (a^2)^2 - (a^3)^2 = 0$.

1898. Potreban i dovoljan uslov da $u^2 = \varphi(u^1)$ bude geodezijska linija na površi $x^i = x^i(u^1, u^2)$ jeste da bude

$$\varphi'' - \left\{ {1 \atop 22} \right\} \varphi'^3 + \left(\left\{ {2 \atop 22} \right\} - 2\left\{ {1 \atop 12} \right\} \right) \varphi'^2 + \left(2\left\{ {2 \atop 12} \right\} - \left\{ {1 \atop 11} \right\} \right) \varphi' + \left\{ {2 \atop 11} \right\} = 0$$

gde crte označavaju izvod po u^1.

1899. Ako su A^p i A_p kontravarijantne i kovarijantne koordinate nekog vektora, pokazati da ako kovarijantne koordinate zadovoljavaju uslov za paralelno pomeranje, zadovoljavaju ga i kontravarijantne i obrnuto.

1900. Potreban i dovoljan uslov da jedinični vektori tangente krivih $u^{\alpha} = \text{const}$ $(\alpha = 1, 2)$ budu paralelni u odnosu na krivu c na površi jeste da je ova površ integral jednačine $\left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\} du^{\gamma} = 0$ $(\beta \neq \alpha)$.

1901. Napisati uslov za paralelno pomeranje vektora po paralelnim krugovima na jediničnoj sferi. Specijalno za vektor intenziteta a koji je tangencijalan na nulti meridijan.

1902. Neka je τ^p tangentni vektor krive $x^p = x^p(s)$ gde je s luk krive ν^p jedinični vektor glavne normale. Pokazati da je: 1° $g_{pq}\tau^p \tau^q = 1$;

2° $g_{pq}\tau^p \cdot \frac{\delta \tau^q}{\delta s} = 0$; 3° vektor $\frac{\delta \nu^p}{\delta s}$ normalan na ν^p.

1903. Dokazati da je

1° $g_{pq}\tau^p \nu^q = 0$; 2° $g_{pq}\tau^p \frac{\delta \nu^q}{\delta s} = -K$; 3° $\beta^r = \frac{1}{T}\left(\frac{\delta \nu^r}{\delta s} + K\tau^r\right)$,

gde je K—krivina, T—torzija a β^r jedinični vektor binormale.

1904. Naći ugao između koordinatnih krivih površi $x^1 = x^1$, $x^2 = x^2$, $x^3 = f(x^1, x^2)$.

1905. Odrediti ugao θ između krivih na površi sa kovarijantnim metričkim tenzorom g_{ij}, koje su definisane jednačinama

$$P_{1i}\, du^i = 0 \quad \text{i} \quad P_{2i}\, du^i = 0,$$

gde su P_{ij} date funkcije od u^1 i u^2.

1906. Pokazati da su ortogonalne trajektorije krivih $u^1 = \text{const}$ i $u^2 = \text{const}$ na površi $\vec{r} = \vec{r}(u^1, u^2)$, redom, rešenja jednačina

$$g_{2i}\, du^i = 0, \qquad g_{1i}\, du^i = 0.$$

1907. Naći diferencijalne jednačine izogonalnih trajektorija koordinatnih krivih na površi čija je osnovna metrička forma $ds^2 = g_{ij}\, du^i\, du^j$.

1908. Napisati jednačine krivih na površi sa datom osnovnom metričkom formom g_{ij} a koje polove uglove između koordinatnih krivih $u^i = \text{const}$.

1909. Data je prva osnovna forma površi $a^2 [\cos^2 \omega\, (du^1)^2 + \sin^2 \omega\, (du^2)^2]$ gde je $\omega = \omega(u^1, u^2)$. Naći $R_{12\,12}$.

1910. Koordinate Riccevog tenzora za neku površ su

$$R_{\alpha\beta} = g^{\gamma\delta} R_{\gamma\alpha\beta\delta} = -\frac{g_{\alpha\beta}}{g} R_{12\,12}. \qquad \text{Dokazati.}$$

1911. Naći totalnu krivinu površi

$$x^1 = a \sin u^1 \cos u^2, \quad x^2 = a \sin u^1 \sin u^2, \quad x^3 = a \cos u^1.$$

1912. Pokazati da je za obrtnu površ

$$x^1 = u^1 \cos u^2, \quad x^2 = u^1 \sin u^2, \quad x^3 = \varphi(u^1),$$

$$K = \frac{R_{12\,12}}{g_{11}\, g_{22}} = \frac{\varphi' \varphi''}{u^1 (1 + \varphi'^2)^2}.$$

1913. Ako su koordinate tako izabrane da se neka indefinitna kvadratna forma svodi na $2a_{12}\, du^1\, du^2$ krivina te forme biće data sa

$$K = -\frac{1}{a_{12}} \frac{\partial^2 (\ln a_{12})}{\partial u^1\, \partial u^2}. \qquad \text{Dokazati.}$$

1914. Na površi sa datom metričkom formom

$$ds^2 = g_{11} (du^1)^2 + 2\, g_{12}\, du^1\, du^2 + g_{22} (du^2)^2.$$

posmatrati krive definisane diferencijalnom jednačinom

$$(1) \qquad P(u^1, u^2)(du^1)^2 + Q(u^1, u^2)\, du^1\, du^2 + R(u^1, u^2)(du^2)^2 = 0$$

u kojoj su P, Q i R date funkcije. Naći pod kojim uslovom krive (1) obrazuju na površi ortogonalnu mrežu tj. dvoparametarsku familiju krivih takvu da kroz svaku tačku površi prolaze po dve krive te familije koje se seku ortogonalno.

1915. Ako su koordinate neke površi takve da je $g_{12} = d_{12} = 0$ tada je normalna krivina $\frac{1}{R}$ maksimum ili minimum u pravcu koordinatnih krivih i $\varrho_1 = \frac{g_{11}}{d_{11}}$, $\varrho_2 = \frac{g_{22}}{d_{22}}$ su koreni jednačine

$$(d_{11} d_{22} - d_{12})^2 R^2 - (d_{11} g_{22} + d_{22} g_{11} - 2\, d_{12}\, g_{12}) R + g = 0.$$

1916. Ako su asimptotske linije koordinatne linije, tada je

$$1^\circ \ \overline{\begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha\alpha \end{Bmatrix}} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha\alpha \end{Bmatrix} - 2 \begin{Bmatrix} \beta \\ \beta\beta \end{Bmatrix}; \qquad 2^\circ \ \overline{\begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha\beta \end{Bmatrix}} = -\begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha\beta \end{Bmatrix};$$

$$3^\circ \ \overline{\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta\beta \end{Bmatrix}} = -\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta\beta \end{Bmatrix} \qquad (\alpha \neq \beta).$$

1917. Pokazati da je ubrzanje materijalne tačke dato sa

$$\frac{\delta v^k}{\delta t} = \frac{d^2 x^k}{dt^2} + \begin{Bmatrix} k \\ p\,q \end{Bmatrix} \frac{dx^p}{dt} \frac{dx^q}{dt}.$$

1918. Naći fizičke koordinate brzine i ubrzanja čestice u cilindričnim koordinatama

1919. Izraziti Maxwellove jednačine

$$1^\circ \ \operatorname{div} \vec{B} = 0; \quad 2^\circ \ \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\varrho; \quad 3^\circ \ \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t};$$

$$4^\circ \ \nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{I}.$$

u tenzorskom obliku.

1920. Ako je T kinetička energija materijalne tačke mase m u odnosu na generalisane koordinate x^i, pokazati da je njena brzina v^i data sa

$$v^i = \frac{1}{m} g^{ij} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^j}.$$

1921. Pokazati da uslov za konzervativnost sile, određena generalisanim koordinatama Q_i glasi $Q_{i,j} - Q_{j,i} = 0$.

Glava VIII

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

§ 1. Diferencijalne jednačine prvog reda

1° Obična diferencijalna jednačina prvog reda rešena po y' ima oblik

(1) $$y' = f(x, y)$$

pri čemu je $y = y(x)$ nepoznata funkcija a y' njen izvod. Funkcija $y = y(x)$ koja zadovoljava jednačinu (1) zove se *integral* ili *rešenje* te jednačine. Kriva koja odgovara tom rešenju naziva se *integralna kriva*.

Funkcija

$$\varphi(x, y, c) = 0$$

koja sadrži proizvoljnu konstantu c, a koja zadovoljava jednačinu (1), zove se *opšti integral* ili *opšte rešenje* te jednačine. Rešenja koja se dobijaju iz opšteg rešenja dajući konstanti c konkretne vrednosti zovu se *partikularna rešenja* ili *partikularni integrali*.

2° Cauchyev problem. Problem nalaženja rešenja jednačine (1) koje zadovoljava početne uslove

(2) $$y = y_0 \quad \text{za} \quad x = x_0,$$

gde su x_0 i y_0 dati brojevi, naziva se *Cauchyev problem*. Problem nalaženja rešenja sa početnim datim vrednostima y_0 i x_0, ako jednačina (1) nije definisana u tački (x_0, y_0), ali je definisana u okolini te tačke, ili ako pak početne vrednosti nisu konačne, naziva se *singularni Cauchyev problem*. U tom slučaju rešenje $y = y(x)$ $[x = x(y)]$ ima osobinu

(3) $$y(x) \to y_0 \text{ kada } x \to x_0 \; [x(y) \to x_0 \text{ kada } y \to y_0].$$

Problem egzistencije i jednostavnosti Cauchyevog rešenja rešavaju sledeće dve teoreme:

Teorema 1. (*Peanova teorema*). *Ako je desna strana jednačine* (1) *definisana i neprekidna u pravougaoniku*

$$R: |x - x_0| < a; \quad |y - y_0| < b,$$

gde su a i b dati pozitivni brojevi, a sem toga je i ograničena u toj oblasti, tj.

$$|f(x, y)| < M$$

gde je M konstantan pozitivan broj, a (x, y) proizvoljna tačka iz oblasti R, onda jednačina (1) *ima bar jedno rešenje,*

(4) $$y = y(x)$$

koje zadovoljava početne uslove (2), *definisano (i neprekidno diferencijabilno) u intervalu*

(5) $$|x - x_0| < h$$

gde je

$$h = \min\left(a; \frac{b}{M}\right)$$

Teorema 2. (*Picardova teorema*). *Ako je desna strana jednačine* (1) *definisana u oblasti R i zadovoljava uslove:*

1) *$f(x, y)$ je neprekidna funkcija,*

2) $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *postoji i ograničena je*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| < K,$$

gde je K fiksan pozitivan broj, onda jednačina (1) *ima jedinstveno rešenje* (4). *koje zadovoljava početne uslove* (2), *definisano (i neprekidno diferencijabilno) u intervalu* (5).

3° Osnovne diferencijalne jednačine prvog reda oblika $y' = f(x, y)$.

1) Jednačina oblika

$$P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0,$$

naziva se *diferencijalna jednačina koja razdvaja promenljive*. Njeno rešenje definisano je jednakošću

$$\int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy = c.$$

2) Jednačina oblika

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{odnosno} \quad M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0,$$

gde su $M(x, y)$ i $N(x, y)$ homogene funkcije istog stepena homogeniteta, naziva se *homogena diferencijalna jednačina*. Smenom $y = ux$ gde je u nova funkcija ova jednačina se svodi na jednačinu koja razdvaja promenljive i njen opšti integral ima oblik

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = x + c.$$

Jednačina oblika

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{ax + by + c}\right)$$

svodi se na homogenu prenošenjem koordinatnog početka u tačku preseka pravih $ax + by + c = 0$ i $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$. Ako se pak te prave ne seku, onda je $a_1 x + b_1 y = k(ax + by)$; otuda jednačina dobija oblik $y' = F(ax + by)$ koja se smenom $z = ax + by$ (ili $z = ax + by + c$) svodi na jednačinu koja razdvaja promenljive.

Neke jednačine mogu biti svedene na homogenu smenom $y = z^m$. Broj m obično nije unapred poznat. Da bismo ga našli treba u jednačini izvršiti smenu $y = z^m$. Iz zahteva da jednačina bude homogena određuje se broj m, ako je to moguće.

3) Jednačina oblika

$$y' + p(x)\,y = q(x)$$

naziva se *linearna diferencijalna jednačina*. Njeno opšte rešenje je

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(c + \int q e^{\int p(x)dx} dx\right).$$

Obično se ono traži u obliku $y = uv$ gde su u i v nove nepoznate funkcije promenljive x.

Na linearnu jednačinu svode se: *Bernoullieva jednačina*

$$y' + p(x) = q(x) y^{\alpha} \qquad (\alpha \neq 0, 1)$$

smenom $z = y^{1-\alpha}$ (takođe se i njeno rešenje može tražiti direktno u obliku $y = uv$).

Riccatieva jednačina

$$y' + p(x) y^2 + q(x) y = r(x)$$

kada je poznat jedan njen partikularni integral y_1 smenom $y = y_1 + \frac{1}{z}$ gde je z nova funkcija.

4) Jednačina oblika

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$$

pri čemu je $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ naziva se jednačina *totalnog diferencijala*. Njen opšti integral može se dobiti iz jednakosti

$$C = \int P(x, y)\,dx + \int \left[Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)\,dx\right] dy$$

ili iz jednakosti

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy = C$$

ako su funkcije P i Q definisane u tački (x_0, y_0).

Funkcija $\mu = \mu(x, y)$ naziva se *integracioni faktor* ako je jednačina

$$\mu P(x, y)\,dx + \mu Q(x, y)\,dy = 0$$

jednačina totalnog diferencijala. Integracioni faktor možemo odrediti iz jednačine $\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$ ili što je isto iz jednačine

$$P\frac{\partial \mu}{\partial y} - Q\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(Q'_x - P'_y\right)$$

Integracioni faktor, koji zavisi samo od x određuje se iz jednačine $\frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{P'_y - Q'_x}{Q}$, a samo od y, iz jednačine $\frac{d \ln \mu}{dy} = \frac{Q'_x - P'_y}{P}$.

4° Osnovne difrencijalne jednačine prvog reda oblika $F(x, y, y') = 0$. Ako diferencijalna jednačina ima jedan od oblika $f(x, y') = 0$ ili $f(y, y') = 0$ onda se često y' uzima kao parametar ili funkcija parametra. Ako se stavi $y' = p$, a iz jednačine $f(x, y') = 0$ se nađe $x = \varphi(p)$ onda je $dx = \varphi'(p)\,dp$. Otuda je $dy = p\,dx = p\,\varphi'(p)\,dp$. Tako se mogu preko parametra p izraziti x i y:

$$x = \varphi(p), \quad y + c = \int p\,\varphi'(p)\,dp.$$

Slično se rešava i jednačina $f(y, y') = 0$.

Da bi se rešila jednačina $F(x, y, y') = 0$, korisno je, ako se može, prethodno je rešiti po y. Ako se pri tome dobije $y = \varphi(y')x + \psi(y)$, onda se jednačina može integraliti. Od interesa su dva slučaja:

1) Ako je $\varphi(y') = y'$ onda se dobija *Clairautova jednačina*

$$y = y'x + \psi(y').$$

Njen opšti integral ima oblik

$$y = cx + \psi(c).$$

Sem toga jednačina može imati još singularni integral koji se dobija isključivanjem p iz jednačina $y = px + \psi(p)$ i $x + \psi'(p) = 0$.

2) Ako je $\varphi(y') \neq y'$ onda se dobija *Lagrangeova jednačina*

$$y = \varphi(y')\,x + \psi(y')$$

Ako se stavi $y' = p$ a za funkciju uzme x, onda ova jednačina prelazi u linearnu

$$[\varphi(p) - p]\frac{dx}{dp} + x\varphi'(p) + \psi(p) = 0.$$

Sem toga, jednačina može imati singularni integral oblika $y = \varphi(c)\,x + \psi(c)$ gde je c koren jednačine $c = \varphi(c)$.

5° Ako su funkcija $F(x, y, y')$ i izvodi $\frac{\partial F}{\partial y}$ i $\frac{\partial F}{\partial y'}$ neprekidni, onda proizvoljno rešenje jednačine

$$F(x, y, y') = 0 \tag{6}$$

takođe zadovoljava i jednačinu

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0. \tag{7}$$

Otuda, da bismo dobili singularno rešenje jednačine (6) treba isključiti y' iz jednačina (6) i (7).

Tako dobijena jednačina $\psi(x, y) = 0$ naziva se jednačina *diskriminantne* krive. Za svaku granu diskriminantne krive treba proveriti, da li je to grana rešenja jednačine (6), pa ako jeste, da li je to rešenje singularno, tj. da li je narušena jedinstvenost u svakoj njegovoj tački. Ispitivanje jedinstvenosti lako je proveriti kod onih jednačina čije opšte rešenje možemo naći.

Ako familija krivih $\Phi(x, y, c) = 0$ koja predstavlja rešenje jednačine $F(x, y, y') = 0$ ima obvojnicu $y = \varphi(x)$, onda je ta obvojnica singularno rešenje te iste jednačine. Ako funkcija Φ ima neprekidan prvi izvod, onda radi nalaženja obvojnice treba isključiti c iz jednačina

$$\Phi(x, y, c) = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial \Phi(x, y, c)}{\partial c} = 0$$

i proveriti da li je dobijena kriva obvojnica.

6° Trajektorije. *Izogonalna trajektorija* familije krivih $f(x, y, a) = 0$ naziva se linija koja seče sve krive familije pod istim uglom α.

Da bismo dobili diferencijalnu jednačinu trajektorija, treba isključiti a iz jednačina

$$f(x, y, a)=0 \quad \text{i} \quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}y'+\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}-\dfrac{\partial f}{\partial x}y'}.$$

U specijalnom slučaju kada je ugao $\alpha=\frac{\pi}{2}$ onda se trajektorije nazivaju *ortogonalne*.

Formirati diferencijalne jednačine čija su opšta rešenja:

1922. $y=ce^{\sqrt{x^2-1}}$ **1923.** $y=e^{cx}$. **1924.** $y=\sin(x+c)$.

1925. $x^2+cy^2=2y$. **1926.** $y^2+cx=x^3$. **1927.** $y=c(x-c)^2$.

1928. $cy=\sin cx$.

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

1929. $yy'-x=0$. **1930.** $y=1+y'^2$. **1931.** $\frac{x}{y}=\frac{y'}{x+1}$.

1932. $y'^2+y^2-1=0$. **1933.** $x+xy+y'(y+xy)=0$.

1934. $xyy'^2+(x^2+y^2)y'+xy=0$. **1935.** $\sqrt{1-x^2}\,dy+\sqrt{1-y^2}\,dx=0$.

1936. $y\sqrt{1-x^2}\,dy+x\sqrt{1-y^2}\,dx=0$. **1937.** $2st^2s'=1+t^2$.

Pogodnom smenom dovesti u sledećim jednačinama do razdvajanja promenljivih a zatim ih integraliti:

1938. $y'=(x-y)^2+1$. **1939.** $y'=\sin(x-y)$ **1940.** $y'=(ax+by+c)^2$.

Naći opšti i partikularni integral za date početne uslove sledećih jednačina:

1941. $2\sqrt{x}\,dy=y\,dx$, $y(4)=1$. **1942.** $e^y(y'+1)=1$, $y(0)=\ln 2$.

1943. $y'\sin x=y\ln y$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

1944. $(a^2+y^2)\,dx+2x\sqrt{ax-x^2}\,dy=0$, $y(a)=0$.

1945. $y-xy'=a(1+x^2y')$, $y(1)=1$.

1946. $x^2y'-\cos 2y=1$, $y(\infty)=\frac{9}{4}\pi$.

1947. $3y^2y'+16x=2xy^3$; $y(x)$ ostaje ograničeno kada $x\to\infty$.

1948. Napisati jednačinu krive koja prolazi kroz tačku $\left(1, \frac{1}{3}\right)$ a kod koje je koeficijent pravca tangente, u svakoj tački, tri puta veći od koeficijenta pravca radijus vektora te tačke.

1949. Naći familiju krivih kod kojih je subtangenta konstantna i jednaka a.

1950. Naći krive kod kojih je površina trougla koji obrazuje tangenta, ordinata tačke dodira i apscisna osa konstantna veličina jednaka a^2.

1951. Naći familiju krivih kod kojih je dužinu tangente jednak rastojanju dodirne tačke od koordinatnog početka.

1952. Pri malim količinama radioaktivne materije, može se smatrati da je brzina raspadanja direktno proporcionalna količini radioaktivne materije. Naći masu radioaktivne materije u funkciji od vremena.

1953. Teška materijalna tačka mase m počinje da pada u sredini sa otporom, pri čemu sila otpora zavisi od brzine po zakonu $f=kv^m$. Odrediti zakon promene brzine u vremenu i put pređen za vreme t $(n=1, 2)$.

1954. Motorni čamac se kreće po mirnoj vodi brzinom $v_0=20$ km/čas. Pri punoj brzini motor se isključi i kroz 20 sec nakon toga brzina čamca se smanji na $v=8$ km/čas. Otpor vode je proporcionalan brzini kretanja čamca. Odrediti brzinu čamca 20 min posle isključivanja motora.

1955. U sud, koji sadrži 10 l vode, neprestano utiče, brzinom 2 l u minutu, rastvor koji u svakom litru sadrži 0,3 kg soli. Ulazeći u sud rastvor se meša sa vodom a zatim smesa izlazi iz suda istom tom brzinom. Koliko će soli biti u sudu nakon 5 minuta?

Naći opšti integral sledećih homogenih jednačina:

1956. $xy'-y=\sqrt{x^2+y^2}$ **1957.** $\frac{ds}{dt}=\frac{s}{t}-\frac{t}{s}$.

1958. $x^2+y^2-2xyy'=0$.

1959. $y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$. **1960.** $y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$. **1961.** $xy'=y\ln\frac{y}{x}$.

1962. $xy'-y=x\operatorname{tg}\frac{y}{x}$. **1963.** $(y+\sqrt{xy})\,dx=x\,dy$.

1964. $xy'-y=(x+y)\ln\frac{x+y}{x}$. **1965.** $xy'=y\cos\ln\frac{y}{x}$.

1966. $1+e^{\frac{x}{y}}+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)y'=0$. **1967.** $y'=\frac{x-y+1}{x+y-3}$.

1968. $(2x-4y+6)\,dx+(x+y-3)\,dy=0$.

1969. $(2x+y+1)\,dx-(4x+2y-3)\,dy=0.$

1970. $x-y-1+(y-x+2)\,y'=0.$ **1971.** $(y+2)\,dx=(2x+y-4)\,dy.$

1972. $y'=2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2.$ **1973.** $(y'+1)\ln\dfrac{y+x}{x+3}=\dfrac{y+x}{x+3}.$

1974. Data je jednačina

$$2x^4yy'+y^4=4x^6$$

Stavljajući $y=z^m$ odrediti m tako da se data jednačina svede na homogenu a zatim naći njen opšti integral.

1975. Kakva veza mora postojati između α i β da se jednačina

$$y'=ax^\alpha+by^\beta$$

smenom $y=z^m$, svede na homogenu?

1976. Naći krive kod kojih je rastojanje tangente od koordinatnog početka jednako apscisi dodirne tačke.

1977. Naći familiju krivih koje imaju osobinu da je dužina tangente jednaka odsečku koji odseca tangenta na pozitivnom delu x ose.

1978. Naći jednačinu krive, koja prolazi kroz tačku $(1, 0)$ i ima osobinu da je odsečak tangente na Oy osi jednak rastojanju dodirne tačke od koordinatnog početka.

1979. Tačka M krive c projektuje se na y osu u tački Q, a normala u tački M seče x osu u tački N. Odrediti krive (c) tako da se prave OM i QN seku pod pravim uglom, a zatim naći onu od krivih (c) koja prolazi kroz tačku $(2, 0)$.

1980. Pronaći potreban i dovoljan uslov da rešenje homogene jednačine $y'=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ bude predstavljeno zatvorenim krivama koje okružuju koordinatni početak.

Naći opšti integral sledećih linearnih jednačina:

1981. $y'+y+x=0.$ **1982.** $y'-y=e^x.$

1983. $y'+\dfrac{y}{1+x}+x^2=0.$ **1984.** $y'+y\cos x=\sin x\cos x.$

1985. $y'-\dfrac{2}{(x+1)}\,y=(x+1)^3.$ **1986.** $t\,ds-2s\,dt=t^3\ln t\,dt.$

1987. $dx+(e^y-x)\,dy=0.$ **1988.** $y'=\dfrac{y}{2y\ln y+y-x}.$

1989. Naći onu integralnu krivu diferencijalne jednačine

$$(1-x^2)\,y'+xy-1=0$$

koja prolazi kroz tačku $(0, 1)$.

1990. Naći onu integralnu krivu diferencijalne jednačine

$$xy'-\frac{y}{x+1}=x$$

koja prolazi kroz tačku $(1, -1)$.

Podesnom zamenom ili diferenciranjem svesti sledeće jednačine na linearne a zatim naći njihov opšti integral:

1991. $(x^2+y^2+2x-2y)\,dx+2(y-1)\,dy=0.$ **1992.** $(x+1)(yy'-1)=y.$

1993. $x(e^y-y')=2.$ **1994.** $y'-1=e^{x+2y}.$

1995. $y'+\sin y+x\cos y+x=0.$ **1996.** $(x^2-1)\,y'\sin y+2x\cos y=2x-2x^3.$

1997. $y(x)=\int_0^x y(t)\,dt+x+1.$ **1998.** $\int_0^x (x-t)\,y(t)\,dt=2x+\int_0^x y(t)\,dt.$

1999. Odrediti krive kod kojih je odsečak koji odseca tangenta na ordinatnoj osi jednak subnormali dodirne tačke.

2000. Naći krive kod kojih je površina između apscise, tangente i radijus vektora tačka dodira jednaka a^2.

2001. Naći krive koje imaju osobinu da im tangenta u svakoj tački obrazuje sa koordinatnim osama i ordinatom tačke dodira trapez konstantne površine a^2? Između tih krivih naći onu koja prolazi kroz tačku (a, a).

2002. Ako je R otpor, L koeficijent samoindukcije a U napon nekog električnog kola, onda njegova jednačina dinamičke ravnoteže ima oblik

$$L\frac{di}{dt}+Ri=U$$

Naći struju u funkciji od vremena t ako je $i=i_0$ za $t=0$.

2003. Kondenzator kapaciteta c uključuje se u kolo napona E i otpora R. Odrediti opterećenje q kondenzatora u momentu t nakon uključivanja.

2004. U kolu čiji je otpor R a samoindukcija L dejstvuje periodična elektromotorna sila $E_1=a\sin\dfrac{2\pi}{T}t$, gde je T period, t vreme i a amplituda ili maksimalna vrednost veličine E_1. Odrediti struju i kola u svakom momentu ako je za $t=0$ i $i=0$.

2005. Naći ono rešenje jednačine $y' \sin 2x = 2(y+\cos x)$ koje ostaje ograničeno kada $x \to \frac{\pi}{2}$.

2006. Pokazati da jednačina $\frac{dx}{dt}+x=f(t)$, gde je $|f(t)|<M$ za $-\infty<t<\infty$, ima jedno rešenje za $t\in(\infty,\infty)$ i naći ga.
Pokazati da je dobijeno rešenje periodično, ako je funkcija $f(t)$ periodična.

2007. Naći periodično rešenje jednačine

$$y' = y\cos^2 x + \sin x.$$

2008. Pokazati da samo jedno rešenje jednačine $xy'-(2x^2+1)y=x^2$ teži konačnoj vrednosti kada $x\to\infty$, i naći to rešenje.

Naći opšti integral sledećih Bernoullievih jednačina:

2009. $y'+2xy=2x^3y^3$. **2010.** $y'+\frac{y}{x+1}+y^2=0$.

2011. $y^{n-1}(ay'+y)=x$. **2012.** $xy'+y=y^2\ln x$.

2013. $y'-y\,\mathrm{tg}\,x+y^2\cos x=0$. **2014.** $y'+2\frac{y}{x}=\frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$.

2015. $xy'-4y-x^2\sqrt{y}=0$. **2016.** $y\,dy-a\frac{y^2}{x^2}dx=b\frac{dx}{x^2}$.

2017. $y'=\frac{y\varphi'(x)-y^2}{\varphi(x)}$ gde je $\varphi(x)$ data funkcija.

2018. $x\,dx=\left(\frac{x^2}{y}-y^3\right)dy$. **2019.** $y'x^3\sin y=xy'-2y$.

2020. $(2x^2y\ln y-x)y'=y$.

2021. Naći familiju krivih kod kojih je u svakoj tački zbir dužine normale i subnormale jednak jedinici, a zatim naći onu krivu koja prolazi kroz tačku (0, 0).

2022. Tangenta u proizvoljnoj tački M krivih c seče Oy osu u tački N. Odrediti krive c tako da se odsečci MN vide iz tačke $(a, 0)$ pod pravim uglom.

2023. Naći familiju krivih c takvu da tangenta povučena u proizvoljnoj tački krivih odseca na ordinatnoj (ili apscisnoj) osi odsečak

1° proporcionalan kvadratu ordinate (ili apscise) tačke dodira;

2° proporcionalan trećem stepenu ordinate (ili apscise) tačke dodira.

2024. Naći familiju krivih c, zadatih jednačinom oblika $r=f(\varphi)$ kod kojih je površina sektora ograničenog tim krivama i radijusima neke fiksne

tačke (r_0, φ_0), i neke promenljive tačke (r, φ) tih krivih, proporcionalna proizvodu koordinata promenljive tačke r i φ. Koeficijent proporcionalnosti je k.

2025. Naći opšti integral Riccatieve jednačine

$$y'(1-\sin x\cos x)+y^2\cos x-y+\sin x=0$$

ako je njen partikularni integral $y_1=\cos x$.

2026. Data je Riccatieva jednačina

$$y'-\frac{1}{1-x^3}y^2+\frac{x^2}{1-x^3}y+\frac{2x}{1-x^3}=0.$$

1° Odrediti konstantu a tako da $y=ax^2$ bude partikularni integral date jednačine a zatim naći njeno opšte rešenje;

2° Odrediti konstante a i b tako da $y=ax+b$ bude partikularni integral i naći opšte rešenje.

2027. Odrediti konstante c i d tako da $y=\frac{c}{x^2}+\frac{d}{x}$ bude partikularni integral jednačine

$$y'+y^2-\frac{a^2}{x^4}=0.$$

Naći opšti integral sledećih jednačina ako one imaju partikularni integral oblika $y=\frac{a}{x}$:

2028. $x^2y'=x^2y^2+xy+1$. **2029.** $y'+y^2=2x^{-2}$.

2030. $4y'+y^2+4x^{-2}=0$. **2031.** $x^2y'+(xy-2)^2=0$.

Koristeći podesno izabrane smene integrali sledeće jednačine:

2032. $y'+y^2-2x^2y+x^4-2x-1=0$.

2033. $y'+ay^2=\frac{b}{x^2}$. **2034.** $y'+y^2+\frac{1}{x}y-\frac{4}{x^2}=0$.

Naći opšti integral sledećih jednačina totalnog diferencijala:

2035. $xy'\cos y+\sin y=0$.

2036. $\left(4-\frac{y^2}{x^2}\right)dx+2\frac{y}{x}dy=0$. **2037.** $(x^3+3xy^2)dx+(y^3+3x^2y)dy=0$.

2038. $\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$. **2039.** $(2x^3-xy^2)dx+(2y^3-x^2y)dy=0$.

2040. $\frac{x}{x^2+y^2}dy=\left(\frac{y}{x^2+y^2}-1\right)dx$. **2041.** $e^y dx+(xe^y-2y)dy=0$.

2042. $yx^{y-1}\,dx + x^y \ln x\,dy = 0$. **2043.** $\dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2}$.

2044. $2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)dx - \sqrt{x^2-y}\,dy = 0$.

2045. $\left(\dfrac{x}{\sin y}+2\right)dx + \dfrac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y - 1}\,dy = 0$.

2046. $\dfrac{y+\sin x\cos^2(xy)}{\cos^2(xy)}\,dx + \dfrac{x}{\cos^2(xy)}\,dy + \sin y\,dy = 0$.

2047. $\left(\dfrac{1}{y}\sin\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x} + 1\right)dx + \left(\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y^2}\sin\dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y^2}\right)dy = 0$.

2048. Od svih integralnih krivih zadatih jednačinom

$$\left(1 + x\sqrt{x^2+y^2}\right)dx + \left(-1+\sqrt{x^2+y^2}\right)dy = 0$$

izdvojiti onu koja prolazi kroz tačku (0, 1).

2049. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' = \dfrac{2xy+1}{y-x^2}$ a zatim odrediti onu integralnu krivu koja seče pravu $y=-2$ pod uglom od 45°.

Pokazati da sledeće diferencijalne jednačine imaju integracioni faktor oblika $\mu=\mu(x)$ ili $\mu=\mu(y)$ i naći njihov opšti integral:

2050. $(xy^2-y^3)\,dx + (1-xy^2)\,dy = 0$. **2051.** $(x^m+y)\,dx - x\,dy = 0$.

2052. $\left(2xy + x^2y + \dfrac{y^3}{3}\right)dx + (x^2+y^2)\,dy = 0$. **2053.** $y(1+xy)\,dx - x\,dy = 0$.

2054. $(x^2+y^2)\,(x\,dy - y\,dx) = (a+x)\,x^4\,dx$.

2055. $(2xy^2-y)\,dx + (y^2+x+y)\,dy = 0$.

2056. $(x\cos y - y\sin y)\,dx + (x\sin y + y\cos y)\,dy = 0$.

Pokazati da jednačine imaju integracioni faktor oblika $\mu=\mu(x^2+y^2)$ i naći njihov opšti integral:

2057. $x\,dx + y\,dy + x\,dy - y\,dx = 0$. **2058.** $(2x-y)\,dx + (x+2y)\,dy = 0$.

Pokazati da jednačine imaju integracione faktore oblika $\mu=\mu(x+y)$ ili $\mu=\mu(xy)$ i rešiti ih:

2059. $(x^2+x^2y+2xy-y^2-y^3)\,dx + (y^2+xy^2+2xy-x^2-x^3)\,dy = 0$.

2060. $(2x^3y^2-y)\,dx + (2x^2y^3-x)\,dy = 0$. **2061.** $xy^2\,dx + (x^2y-x)\,dy = 0$.

2062. $x^2y^3 + y + (x^3y^2-x)\,y' = 0$.

2063. Pokazati da je integracioni faktor linearne jednačine $y' + p(x)\,y = q(x)$ funkcija $\mu = e^{\int p(x)\,dx}$

2064. Naći krive koje imaju osobinu da je odsečak tangente između x ose i prave $y=ax+b$ podeljen tačkom dodira na dva jednaka dela.

2065. Dokazati da rešenja jednačine $y' = x^3 - y^3$ uz proizvoljne početne uslove $y(x_0)=y_0$ postoje za $x_0 < x < \infty$.

Naći oblast u kojima su rešenja jednačina jedinstvena:

2066. $y' = 2xy + y^2$. **2067.** $y' = 2 + \sqrt[3]{y-2x}$.

2068. $xy' = y + \sqrt{y^2-x^2}$.

Naći opšte i singularno rešenje (ako postoji) sledećih jednačina:

2069. $y'^2 - y^2 = 0$. **2070.** $(y'+1)^3 = 27\,(x+y)^2$.

2071. $y^2(y'^2+1) = 1$. **2072.** $y'^2 - 4y^3 = 0$.

2073. $xy'^2 = y$. **2074.** $xy'^3 + x = 1$.

2075. $y'^3 + y^2 = yy'(y'+1)$. **2076.** $4(1-y) = (3y-2)^2\,y'^2$.

2077. $xy'^2 = y(2y'-1) = 0$. **2078.** $y'^2 - 2yy' = y^2(e^x-1)$.

2079. $yy'(yy'-2x) = x^2 - 2y^2$. **2080.** $y(y-2xy')^2 = 2y'$.

Sledeće jednačine rešiti po y' a zatim integraliti:

2081. $y'^2 - (x+y)\,y' + xy = 0$. **2082.** $y'^2 + yy' - x(x+y) = 0$.

2083. $y'^2 - (x+y)\,y' + xy = 0$. **2084.** $y'^2 + x = 2y$.

2085. $y'^3 - (x^2+xy+y^2)\,y'^2 + (x^3y + x^2y^2 + xy^3)\,y' - x^3y^3 = 0$.

2086. $y'^3 + (x+2)\,e^y = 0$. **2087.** $y'^2 + 4xy' - y^2 - 2x^2y = x^4 - 4x^2$.

Sledeće jednačine rešiti metodom uvođenja parametra:

2088. $xy'^3 - 1 - y' = 0$. **2089.** $y = y'^5 + y'^3 y' + 5$.

2090. $x = y'^3 - y' - 1$. **2091.** $x^3 + y'^3 - 3xy' = 0$.

2092. $y - yy'^2 - 2y'x = 0$. **2093.** $x\sqrt{1+y'^2} = y'$.

2094. $\dfrac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = 1$. **2095.** $y = y'^2 - y'x + \dfrac{x^2}{2}$.

2096. $y'^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0$. **2097.** $y'^2 - y'^3 = y^2$.

2098. $y'^3 + y^2 = xyy'$. **2099.** $2xy' - y = y'\ln yy'$.

2100. $y' = e^{\frac{xy'}{y}}$.

Rešiti sledeće Lagrangeove jednačine:

2101. $y=2xy'-y'^2$ 2102. $y=2xy'-y'^3$

2103. $y=x(1+y')+y'^2$. 2104. $x=yy'+ay'^2$.

2105. $y=2y'x+\dfrac{x^2}{2}+y'^2$. 2106. $y=xy'+ax\sqrt{1+y'^2}$.

2107. Naći singularno rešenje Lagrangeove jednačine

$$x-y=\frac{4}{9}y'^2-\frac{8}{27}y'^3.$$

2108. Tangenta i normala neke krive postavljene u nekoj tački $M(x, y)$ seku x osu respektivno u tačkama T i N. Odrediti sve krive koje imaju osobinu da je $\overline{OM}^2=\overline{OT}\cdot\overline{ON}$.

Rešiti sledeće Clairautove jednačine:

2109. $y=y'x+y'-y'^2$. 2110. $y=y'x+\sqrt{1+y'^2}$.

2111. $y=y'x+\dfrac{a}{y'}$. 2112. $y=y'x+\sqrt{a^2-b^2y'^2}$.

2113. Naći krivu koja ima osobinu da tangenta u svakoj njenoj tački odseca na koordinatnim osama odsečke čiji je zbir jednak a.

2114. Naći krivu koja ima osobinu da površina kruga koji tangenta obrazuje sa Ox i Oy osom iznosi $2k^2$.

2115. Odrediti krivu liniju koja ima osobinu da je proizvod odsečka koji čini tangenta na ordinatnoj osi i ordinate tačke dodira, proporcionalan razlici između dužine normale i subnormale, ako je koeficijenat proporcionalnosti $\dfrac{a}{2}$.

2116. Data je familija integralnih krivih

$$y^2-(x-c)^3=0$$

neke diferencijalne jednačine prvog reda. Naći singularno rešenje te jednačine.

2117. Data je familija integralnih krivih $(y-c)^2=(x-c)^3$ neke diferencijalne jednačine. Naći singularno rešenje te jednačine.

Naći ortogonalne trajektorije familija krivih:

2118. $y=ax^2$. 2119. $y^2=2p(x-a)$.

2120. $(2a-x)y^2=x^3$. 2121. $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

2122. $r=a(1+\cos\varphi)$. 2123. $r^2(\pi-\varphi)=a^2\varphi$.

2124. $r^2=\ln\operatorname{tg}\varphi+c$.

2125. $r^{2n}-2a^nr^n\cos n\varphi+a^{2n}=c^{2n}$ ako su a i n dati.

2126. Naći evolventu parabole, tj. ortogonalnu trajektoriju njenih tangenti.

2127. Naći evolventu lančanice $y=a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$.

2128. Naći evolventu evolvente kruga

$x=2a(\cos t+t\sin t)$, $y=2a(\sin t-t\cos t)$.

Naći izogonalne trajektorije familije linija:

2129. $y=ax$. 2130. $r=a(1+\cos\varphi)$.

2131. $r^2\cos 2\varphi=a^2$.

2132. Naći krive koje presecaju tangente kruga $x^2+y^2=a^2$ pod uglom od 45°.

§ 2. Razni primeri diferencijalnih jednačina prvog reda

Rešiti sledeće jednačine:

2133. $y'=\dfrac{1}{2y}\cdot\dfrac{2x-y^2+1}{3x+4y^2+1}$. 2134. $(x^2+1)y'=xy+1$, $y(0)=1$.

2135. $(x+2y+7)y'+2x-y+4=0$. 2136. $(x+2y+1)y'-(x+2y-1)=0$.

2137. $(y-x^2)y'-x=0$. 2138. $y'+f'(x)y-f(x)f'(x)=0$.

2139. $y'=\dfrac{y-x^2\sqrt{x^2-y^2}}{xy\sqrt{x^2-y^2}+x}$. 2140. $xy'+(\sin y-3x^2\cos y)\cos y=0$.

2141. $(xy-x^2)y'+y^2-3xy-2x^2=0$. 2142. $2x^2yy'+y^2-2x^3-x^2=0$.

2143. $yy'\sin^2x+y^2\sin x\cos x-1=0$. 2144. $(y^2+4\sin x)y'-\cos x=0$.

2145. $(2xy^3+y)y'+2y^2-4=0$. 2146. $(x^2y^2+x)y'+y=0$.

2147. $(y')^7-(y')^5+y'+3=0$. 2148. $y'=y^2f(xy)$.

2149. $xy'+y=f(x)\varphi(xy)$.

2150. $x(2x-1)y'+y^2-(4x+1)y+4x=0$ ako je njen partikularni integral $y=1$.

2151. $\dfrac{y-xy'}{x+yy'}=2$. 2152. $y(y-xy')=\sqrt{x^4+y^4}$.

2153. $xy'+y=\ln y'$.

2154. $(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy)=(x^2+y^2+x)(x\,dy-y\,dx)$.

2155. $x^2(y'+y^2)=a(xy-1)$. Posebno razmatrati slučaj kada je $a=1$.

2156. $xy'-x(y-x)\sqrt{y^2-x^2}-y=0$. **2157.** $(x^2-1)y'+y^2-2xy+1=0$.

2158. $y=\left(y'-\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^3$.

2159. $(\cos x-x\sin x)\,y\,dx+(x\cos x-2y)\,dy=0$.

2160. $y^2y'+x^2\sin^3 x=y^3\operatorname{ctg} x$. **2161.** $y^2+x^2y'^5=xy(y'^2+y'^3)$.

2162. $\left(x-y\cos\frac{y}{x}\right)dx+x\cos\frac{y}{x}\,dy=0$.

2163. $[\sin(x+y)+x\cos(x+y)]\,dx+x\cos(x+y)\,dy=0$.

2164. $(x^2+1)\,y'+x\sin y\cos y-x(x^2+1)\cos^2 y=0$.

2165. $(x^2y^2+1)\,y+(xy-1)^2xy'=0$; $y(a)=1$.

2166. $(x^2-a^2)\,dx+2xy\,dy=0$; $y(2a)=3a$.

2167. $xyy'=x^2y'+y^2$; $y(1)=1$. **2168.** $xyy'-y^2=(x+y)^2e^{-\frac{y}{x}}$.

2169. $2\left(x^2y+\sqrt{1+x^4y^2}\right)dx+x^3\,dy=0$.

2170. $[2x-\ln(y+1)]\,dx-\frac{x+y}{y+1}\,dy=0$.

2171. $xyy'-x^2\sqrt{y^2+1}=(x+1)(y^2+1)$.

2172. $(xy'-y)^2=y'^2-\frac{2yy'}{x}+1$. **2173.** $x(y'^2+e^{2y})=-2y'$.

2174. Partikularni integral diferencijalne jednačine

$$y'+y^2-3y\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^2x-1=0$$

ima oblik $k\operatorname{tg}x$, gde je k konstanta koju treba odrediti. **Naći njen** opšti integral.

2175. Pokazati da jednačina

$$(x^2+x)\,y'+y^2+(1-2x)\,y-2x=0$$

ima partikularno rešenje oblika $y_1=k$ gde je k konstanta koju treba odrediti. Pokazati da sve integralne krive prolaze kroz dve stalne tačke.

2176. Data je diferencijalna jednačina $y'=f(x,y)$

Ako se pretpostavi da integracioni faktor ove jednačine zavisi samo od x, pokazati da je onda jednačina linearna.

2177. Data je diferencijalna jednačina

$$(x^3-1)\,y'=2xy^2-x^2y-1$$

1° Odrediti njen partikularni integral u obliku $y=ax+b$ pa zatim naći njen opšti integral.

2° Naći partikularni integral $y=\varphi(x)$ date jednačine koji za $x=0$ uzima vrednost $y=-\frac{1}{4}$.

2178. Data je funkcija $y=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$. Pokazati da ona zadovoljava jednu diferencijalnu jednačinu oblika $y'=R(x,y)$ gde je $R(x,y)$ racionalna funkcija po x i y koju treba odrediti. Zatim integraliti tako formiranu diferencijalnu jednačinu.

2179. Pokazati da funkcija

$$y(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^x-1}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

zadovoljava jednu diferencijalnu jednačinu prvog reda oblika $y'=R(x,y)$, gde je R racionalna funkcija po x i y.

2180. Pokazati da se diferencijalna jednačina

$$y'=\frac{(x^2+y^2-a)\,y+\lambda x}{(x^2+y^2-k)\,x-\beta y}$$

gde su α i β dva parametra, svodi smenom $x=\varrho\cos\varphi$ i $y=\varrho\sin\varphi$ na oblik koji razdvaja promenljive.

2181. Odrediti integralne krive diferencijalne jednačine $8xyy'-16y^2+x^2=0$. Ispitati te krive i nacrtati ih. Ako integralne krive ograničavaju jedan deo ravni, izračunati veličinu te površine i dužinu luka krivih.

2182. Pokazati da se diferencijalna jednačina $y'^3-y'^2-4y^2-27y^4=0$ može predstaviti pomoću relacija $y'=(1+t^2)(1+3t^2)$, $y=t+t^3$ gde je t parametar.

Iskoristiti ovu činjenicu za iznalaženje rešenja date jednačine.

2183. Data je diferencijalna jednačina $y'+\frac{x}{y}=1$.

1° Stavljajući $y=vx$, pokazati da je rešenje ove jednačine definisano relacijom

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x^2-xy+y^2)+\operatorname{arc\,tg}\frac{2y-x}{x\sqrt{3}}=c_1$$

2° Stavljajući $x=vy$ pokazati da je rešenje definisano relacijom

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x^2-xy+y^2)-\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-y}{y\sqrt{3}}=c_2$$

3° Pokazati da su ova rešenja ekvivalentna i naći vezu između c_1 i c_2.

2184. Pokazati da je funkcija $y(x)=\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x-x^2}}$ jedno rešenje diferencijalne jednačine $y'=f(x)\,y+\varphi(x)$ gde su $f(x)$ i $\varphi(x)$ racionalne funkcije po x koje treba odrediti.
Pokazati da se jedno partikularno rešenje ove jednačine može razviti u potencijalni red u okolini tačke $x=0$.

2185. Pokazati da integralne krive jednačine

$$(4y-3x-5)\,y'-3y+7x+2=0$$

čine jednu familiju zatvorenih krivih. Pokazati da su integralne krive simetrične u odnosu na pravu $y=1$.

2186. Pokazati da jednačina

$$y(2x-y+2)\,dx+2(x-y)\,dy=0$$

ima integracioni faktor oblika $\mu=\mu(x)$ i naći njen opšti integral.

2187. Pokazati da jednačina

$$(x+2y)\,dx+y\,dy=0$$

ima integracioni faktor oblika $\mu=\mu(x+y)$ i naći njen opšti integral.

2188. 1° Pokazati da postoji takva funkcija $\mu=\mu(xy)$ da izraz

$$\mu(x^2y^2+x)\,dx+\mu\,y\,dx$$

predstavlja totalni diferencijal.

2° Odrediti integralne krive odgovarajuće jednačine i izdvojiti onu koja prolazi kroz tačku $(-1,\ 1)$.

2189. Data je diferencijalna jednačina

$$\frac{1}{x}(\lambda x^2-y^2)\,dx+(\mu x+2\lambda y)\,dy=0.$$

1° Odrediti parametre λ i μ tako da jednačina ima integracioni faktor $\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

2° Za tako dobijene vrednosti parametra μ i λ naći ono partikularno rešenje $\varphi(x,\ y)=0$ koje ispunjava uslov $\varphi(a,\ 0)=0$ $(a>0)$.

2190. Naći uslov pod kojim diferencijalna jednačina

$$P\,dx+Q\,dy=0$$

dopušta integracioni faktor oblika $\mu=\mu(y^2-x)$. Pokazati da se taj faktor može dobiti kvadraturom.
Primeniti to na slučaj

$$P=(2y^2-2x-1)\,e^x+(2y^2-3x)\,e^y,$$

$$Q=2ye^x+2x(y^2+y-x)\,e^y.$$

2191. Data je diferencijalna jednačina

$$P(x,y)\,dx+Q(x,\ y)\,dy=0$$

1° Naći vezu između funkcija P i Q takvu da je data jednačina integralni faktor oblika $\mu=\mu(x+y)$.

2° Dobijeni rezultat primeniti za nalaženje opšteg integrala jednačine

$$(2xy-y^2-y)\,dx+(2xy-x^2-x)\,dy=0$$

3° U slučaju kada data jednačina dopušta istovremeno integracione faktore $\lambda(x+y)$ i $\mu(x-y)$, izraziti P i Q u funkciji od λ, μ, λ' i μ'.

2192. Naći familiju krivih takvu da tangenta u proizvoljnoj tački tih krivih, njen radijus vektor i osa Ox obrazuju trougao konstantne površine a.

2193. Odrediti krive u ravni koje imaju osobinu da normala u svakoj njihovoj tački prolazi kroz jednu stalnu tačku te ravni.

2194. Naći linije kod kojih apscisa težišta krivolinijskog trapeza koji obrazuju te linije, koordinatne ose i prava $x=a$, iznosi $\dfrac{3a}{4}$ za svako a.

2195. Naći krive kod kojih je zbir normale i subnormale proporcionalan apscisi. Koliki treba da bude koeficijenat proporcionalnosti da bi dobijena kriva bila drugog reda?

2196. Naći linije kod kojih sredina odsečka tangente između koordinatnih osa, leži na paraboli $y^2=2px$.

2197. U ravni je data tačka O i prava d.

1° Odrediti krive c tako da rastojanje svake tačke M ove krive od prave d bude jednako rastojanju O od tangente na krivu u tački M.

2° Kroz proizvoljnu tačku A ravni prolaze, uopšte, dve integralne krive. Naći skup tačaka A u kojima se tangente integralne krive poklapaju.

2198. Kroz proizvoljnu tačku M neke krive k u ravni $z=0$ povučena je prava MN tako da je odnos između koeficijenta pravca te prave i tangente na krivu c u tački M konstantan realan broj a.

1° Naći jednačinu krive c ako prava MN stalno dodiruje krivu $y=\frac{1}{2}x^2$.

Razlikovati slučajeve $a=\frac{1}{2}$ i $a\neq\frac{1}{2}$.

2° Naći jednačinu one konoidne površi čija je direktorna ravan koordinatna ravan $z=0$ a čije su generatrise prave koje prolaze kroz Oz osu i krivu

$$x=\alpha(u), \quad y=\beta(u), \quad z=u \qquad (L),$$

ako je projekcija krive (L) na ravan $z=0$ kriva k koja odgovara vrednosti $a=\frac{1}{2}$ pri čemu je μ parametar koji figuriše u jednačini krive k.

2199. Odrediti ortogonalne trajektorije krivih $(x^2+y^2)^2+2b^2(y^2-x^2)=a$, gde je b konstanta i a — promenljivi parametar.

2200. Naći skup tačaka takvih da se dve integralne krive jednačine

$$xy'^2-yy'+1=0,$$

koje prolaze kroz te tačke seku: 1° pod pravim uglom; 2° pod uglom od 45°.

2201. Čestica pada u sredini čiji je otpor proporcionalan kvadratu brzine čestice. Pokazati da je jednačina kretanja

$$\frac{dv}{dt}=g-kv^2$$

gde je k konstanta a g ubrzanje zemljine teže. Integraliti tu jednačinu i pokazati da $v\to\sqrt{\frac{g}{k}}$ kada $t\to\infty$.

2202. Brzina materijalne tačke u proizvoljnom momentu razlikuje se od srednje brzine (od početka kretanja do tog trenutka) za veličinu, koja je proporcionalna kinetičkoj energiji tačke a obrnuto proporcionalna vremenu, računatom od početka. Naći zavisnost puta od vremena.

2203. Raketa početne mase M_0 kreće se pravolinijski pod dejstvom sile koju proizvodi neprekidno isticanje mlaza gasova, koji izbacuje raketa. Brzina u_0 isticanja gasova (u odnosu na raketu) je konstantna i orijen-

tisana je suprotno početnoj brzini rakete v_0. Naći zakon kretanja rakete, zanemarujući silu teže i otpor vazduha. (Problem Cuolkovskog).

2204. Na rastojanju a u tačkama A i B nalaze se dva suprotno naelektrisana električna naboja $+q$ i $-q$. Uzimajući tačku A kao koordinatni početak a za x osu pravu AB, formirati jednačinu ekvipotencijalnih linija električnog polja, koje obrazuju pomenuti naboji.

§ 3. Diferencijalne jednačine drugog i višeg reda

1° Jednačina oblika

$$F(x, y, y', \cdots y^{(n)})=0 \tag{1}$$

gde je $y=y(x)$ tražena funkcija naziva se *obična diferencijalna jednačina n-og reda.* Funkcija $y=\varphi(x)$ za koju jednačina (1) postaje identitet naziva se *rešenje* te jednačine, a grafik te funkcije zove se *integralna kriva.* Ako je rešenje zadato u obliku $\Phi(x, y)=0$ onda se ono obično naziva *integral.*

Integral

$$\Phi(x, y, c_1, \cdots, c_n)=0 \tag{2}$$

diferencijalne jednačine (1) koja sadrži n proizvoljnih nezavisnih konstanata $c_1, \cdots, c_n$ koji je ekvivalentan (u datoj oblasti) jednačini (1), naziva se *opšti integral* te jednačine (u odgovarajućoj oblasti). Ako se konstantama $c_1, \cdots, c_n$ u jednačini (2), daju određene brojne vrednosti, dobija se *partikularni integral$_n$* Obrnuto, imajući familiju krivih (2) i ne isključujući parametre $c_1, \cdots, c_n$ iz sistema jednačina

$$\Phi=0, \quad \frac{d\Phi}{dx}=0, \quad \cdots, \quad \frac{d^n\Phi}{dx^n}=0,$$

dobijamo, u opštem slučaju, diferencijalnu jednačinu oblika (1) čiji je opšti integral u odgovarajućoj oblasti relacija (2).

2° Cauchyev problem. Ako su za traženo partikularno rešenje $y=y(x)$ diferencijalne jednačine

$$y^{(n)}=f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \tag{3}$$

zadati *početni uslovi*

$$y(x_0)=y_0, \quad y'(x_0)=y_0', \quad \cdots, \quad y^{(n-1)}(0)=y_0^{(n-1)}$$

a poznato je opšte rešenje

$$y=\varphi(x, c_1, \cdots c_n)$$

onda se proizvoljne konstante određuju, ako je to moguće, iz sistema jednačina

$$y_0=\varphi(x_0, c_1, \cdots c_n),$$

$$y_0'=\varphi_x'(x_0, c_1, \cdots c_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_0^{(n-1)}=\varphi_x^{(n-1)}(x_0, c_1, \cdots c_n).$$

Slično kao i kod jednačine prvog reda postoje teoreme koje obezbeđuju uslove egzistencije i jednostavnosti rešenja diferencijalne jednačine (3), koje zadovoljava date početne uslove.

3° Snižavanje reda jednačine. 1) Red diferencijalne jednačine oblika

$$y^{(n)}=f(x)$$

snižava se neposrednom integracijom. Njen opšti integral može se predstaviti formulom

$$y=\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt+c_0+c_1x+\cdots+c_{n-1}x^{n-1}.$$

2) Ako je diferencijalna jednačina oblika

$$F(x,\ y^{(k)},\ \ldots,\ y^{(n)})=0$$

onda se njen red može sniziti za jedinicu stavljajući $y^{(k)}=p\Rightarrow y^{(k+1)}=p'$ itd. Tako se dobija jednačina $(n-1)$-og reda

$$F(x,\ p,\ p',\ \ldots,\ p^{(n-k)})=0.$$

3) Ako je diferencijalna jednačina oblika

$$F(y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n)})=0$$

onda se njen red može sniziti za jedinicu stavljajući $y'=p\Rightarrow y''=p\dfrac{dp}{dy}$ itd.

4) Red jednačine može se sniziti ako je ona homogena po x i y u generalisanom smislu, tj. ako se ne menja zamenjujući x sa kx i y sa $k^m y$ (pri čemu se y' zamenjuje sa $k^{m-1}y'$, y'' sa $k^{m-2}y''$ itd.). Da bismo ustanovili homogenitet jednačine i odredili broj m, potrebno je izjednačiti izložioce svih članova u kojima figuriše broj k nakon izvršene zamene.

Pošto se na taj način odredi broj m, treba izvršiti zamenu $x=e^t$, $y=ze^{mt}$, gde je $z=z(t)$ nova nepoznata funkcija a t nova nezavisno promenljiva. Tako dobijena jednačina ne sadrži nezavisno promenljivu t. Njen red se zatim snižava na već navedeni način.

5) Red jednačine može se lako sniziti ako se ona može transformisati tako da obe njene strane budu potpuni izvodi po x kakvih bilo funkcija.

4° Funkcije $y_1=\varphi_1(x)$, $y_2=\varphi_2(x)$, $\cdots$ $y_n=\varphi_n(x)$ nazivaju se *linearno zavisne*, ako postoje konstante c_1, c_2, $\cdots c_n$ koje nisu istovremeno jednake nuli, tako da je

$$c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n=0;$$

u protivnom slučaju funkcije se nazivaju *linearno nezavisne*.

Opšte rešenje *homogene linearne* diferencijalne jednačine

(4) $$y^{(n)}+a_1(x)\,y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)\,y=0$$

sa neprekidnim koeficijentima $a_i(x)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots n)$ ima oblik

$$y=c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n$$

gde su y_1, y_2, $\cdots y_n$ linearno nezavisna rešenja jednačine (4) *(osnovni sistem rešenja)*.

Opšti integral *nehomogene linearne* diferencijalne jednačine

(5) $$y^{(n)}+a_1(x)\,y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=f(x)$$

gde su funkcije $a_1(x)$, $\ldots$, $a_n(x)$ i $f(x)$ neprekidne, ima oblik

$$y=y_0+Y,$$

pri čemu je y_0 opšti integral odgovarajuće homogene jednačine (4) a Y partikularno rešenje linearne nehomogene jednačine (5).

Ako je poznat partikularni integral y_1 linearne homogene jednačine n-og reda, onda se red jednačine može sniziti smenom $y=y_1u(x)$ za 1 i da tako dobijena jednačina takođe bude linearna. Opšti metod za nalaženje partikularnog integrala ne postoji. U nekim slučajevima moguće ga je naći putem probanja.

Ako je poznat osnovni sistem rešenja y_1, y_2, $\cdots y_n$ homogene jednačine (4), onda opšti integral odgovarajuće nemomogene jednačine (5) može biti nađen po formuli

$$y=c_1(x)\,y_1+c_2(x)\,y_2+\cdots+c_n(x)\,y_n,$$

gde se funkcije $c_i(x)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ određuju iz sistema jednačina

$$c_1'(x)\,y_1+c_2'(x)\,y_2+\cdots+c_n'(x)\,y_n=0,$$

$$c_1'(x)\,y_1'+c_2'(x)\,y_2'+\cdots+c_n'(x)\,y_n'=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_1'(x)\,y^{(n-2)}+c_2'(x)\,y_2^{(n-2)}+\cdots+c_n'(x)\,y_n^{(n-2)}=0$$

$$c_1'(x)\,y_1^{(n-1)}+c_2'(x)\,y^{(n-1)}+\cdots+c_n'(x)\,y_n^{(n-1)}=f(x).$$

Ovaj postupak naziva se *Lagrangeov metod varijacije konstanata.*

5° Osnovni sistem rešenja y_1, y_2, $\cdots$, y_n homogene linearne jednačine sa konstantnim koeficijentima

(6) $$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0$$

konstruiše se na osnovu karaktera korena *karakteristične jednačine*

(7) $$r^n+a_1r^{n-1}+\cdots+a_{n-1}r+a_n=0$$

na sledeći način: 1) ako je r realan koren jednačine (1) reda m, onda njemu odgovara m linearno nezavisnih rešenja jednačine (6) oblika:

$$y_1=e^{rx},\quad y_2=xe^{rx},\quad \cdots,\quad y_m=x^{m-1}e^{rx};$$

2) ako je $\alpha\pm\beta_i$ par kompleksnih korena jednačine (7), reda m, onda njima odgovara $2m$ linearno nezavisnih rešenja jednačine (6):

$$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad y_2=e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad y_3=xe^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$y_n=xe^{\alpha x}\sin\beta x,\quad \cdots,\quad y_{2m-1}=x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$y_{2m}=x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Opšti integral nehomogene diferencijalne jednačine:

(8) $$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)$$

može biti zapisan u obliku zbira

$$y=y_0+Y,$$

gde je y_0 opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine a Y partikularno rešenje jednačine (8). Ako je

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x), \quad \text{a} \quad Y_i \ (i=1,\ 2,\ \cdots n)$$

odgovarajuće rešenje jednačina

$$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_n y=f_i(x)$$

onda je i zbir $y=Y_1+Y_2+\cdots+Y_n$ rešenje jednačine (8).
Funkcija Y može biti nađena *metodom neodređenih koeficijenata* u sledećim prostijim slučajevima:

1) $f(x)=e^{ax}P_n(x)$, gde je $P_n(x)$ polinom n-og stepena.
Ako a nije koren karakteristične jednačine (7), onda treba staviti $Y=e^{ax}Q_n(x)$ gde je $Q_n(x)$ polinom stepena n sa neodređenim koeficijentima.
Ako je a koren karakteristične jednačine onda se uzima $Y=x^m e^{ax}Q_n(x)$ gde je m red korena $a\,(m=1,\ \cdots,\ n)$.

2) $f(x)=e^{ax}[P_n(x)\cos bx+Q_k(x)\sin bx]$.

Ako $a\pm bi$ nisu koreni jednačine (7), onda se stavlja

$$Y=e^{ax}[S_N(x)\cos bx+T_N(x)\sin bx]$$

gde su $S_N(x)$ i $T_N(x)$ polinomi stepena $N=\max(n,\ k)$.
Ako su $a\pm bi$ koreni jednačine (z), onda uzeti

$$Y=x^m e^{ax}[S_N(x)\cos bx+T_N(x)\sin bx]$$

gde je m red korena $a\pm bi$.
U opštem slučaju za rešavanje jednačine (8) primenjuje se *Lagrangeov metod varijacije konstanata.*

6° Linearna jednačina oblika

(9) $$(ax+b)^n y^{(n)}+A_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+A_{n-1}(ax+b)y+A_n y=f(x)$$

gde su $a,\ b,\ A_1,\ \cdots A_{n-1},\ A_n$ konstante naziva se *Eulerova jednačina.* Uvodeći novu nezavisno promenljivu

$$ax+b=e^t \Rightarrow y'=ae^{-t}\frac{dy}{dt}, \quad y''=a^2e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right) \quad \text{itd.}$$

Eulerova jednačina se svodi na linearnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima.
Za homogenu Eulerovu jednačinu

(10) $$x^n y^{(n)}+A_1 x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+A_{n-1}xy'+A_n y=0$$

rešenje može da se traži u obliku $y=x^r$. Zamenjujući u (10) $y,\ y',\ \cdots\ y^{(n)}$, određene iz uvedene zamene, dobija se karakteristična jednačina iz koje se određuje izložilac r.
Ako je r realan koren karakteristične jednačine reda m onda njemu odgovara m linearno nezavisnih rešenja

$$y_1=x^r, \quad y_2=x^r\ln x, \quad y_3=x^r(\ln x)^2, \quad \cdots, \quad y_m=x^r(\ln x)^{m-1}.$$

Ako je $\alpha\pm\beta i$ par kompleksnih korena reda m, onda njemu odgovara $2m$ linearno nezavisnih rešenja

$$y_1=x^\alpha\cos(\beta\ln x), \quad y_2=x^\alpha\sin(\beta\ln x), \quad y_3=x^\alpha\ln x\cos(\beta\ln x),$$
$$y_4=x^\alpha\ln x\sin(\beta\ln x, \quad \cdots, \quad y_{2m-1}=x^\alpha(\ln)^{m-1}\cos(\beta\ln x),$$
$$y_{2m}=x^\alpha(\ln x)^{m-1}\sin(\beta\ln x).$$

Naći diferencijalne jednačine čiji je opšti integral

2205. $y=c_1(x-c_2)^2$. **2206.** $(x-a)^2+by^2=1$.

2207. $y=c_1\sin x+c_2 x$.

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

2208. $y''=xe^x$. **2209.** $y'''=\sin x$. **2210.** $y''=x+\sin x$.

2211. $y^{IV}=x$. **2212.** $y'''\sin^4 x=\sin 2x$.

2213. $y'''=2xy''$. **2214.** $xy^{IV}+y'''=e^x$.

2215. $y''=4\sin 2x;\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0$.

Naći opšti integral jednačina:

2216. $y'^2=y''$ **2217.** $(1-x^2)y''-xy'-2=0$.

2218. $y''+y'\operatorname{tg}x-\sin 2x=0$. **2219.** $y''+y'+x=0$.

2220. $(1+x^2)y''+1+y'^2=0$. **2221.** $2xy'y''=y'^2-1$.

2222. $y''(e^x+1)+y'=0$. **2223.** $y''^3+xy''=2y'$.

2224. $y''-xy'''+y'''^3=0$. **2225.** $xy''=y'+x\sin\frac{y'}{x}$.

2226. $xy''=y'+x(y'^2+x^2)$.

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

2227. $y''+2yy'^3=0$. **2228.** $3yy''-5y'^2=0$.

2229. $y''\sin y=2y'^2\cos y$. **2230.** $y(1-\ln y)y''+(1+\sin y)y'^2=0$.

2231. $2yy''-3y'^2-4y^2=0$. **2232.** $yy''-y'^2=y^2\ln y$.

2233. $y''=e^y$. **2234.** $y'^2=(3y-2y')y''$.

2235. $y''+y'^2=2e^{-y}$. **2236.** $yy''-2yy'\ln y=y'^2$.

2237. $y''(1+yy')=y'(1+y'^2)$. **2238.** $2yy''+y'^2+y'^4=0$.

2239. Naći onu integralnu krivu diferencijalne jednačine $yy''+y'^2=0$ koja prolazi kroz koordinatni početak a koeficijenat pravca tangente u proizvoljnoj tački krive jednak je recipročnoj vrednosti ordinate te tačke.

Koristeći homogenost sledećih jednačina sniziti im red a zatim naći opšti integral:

2240. $x^4 y'' - (x^3 + 2xy)\, y' + 4y^2 = 0.$

2241. $xyy'' + yy' + x^2 y'^3 = 0.$ **2242.** $x^2 y'' + xy' + y = 0.$

2243. $xyy'' - xy'^2 = yy'.$ **2244.** $(x^2+1)(y'^2 - yy'') = xyy'.$

2245. $x^2 yy'' = (y - xy')^2.$ **2246.** $x^2 (y'^2 - 2yy'') = y^2.$

2247. $y'' = \left(2xy - \dfrac{5}{x}\right) y' + 4y^2 - \dfrac{4y}{x^2}.$

2248. $x^4 (y'^2 - 2yy'') = 4x^3 yy' + 1.$ **2249.** $yy' + xyy'' - xy'^2 = x^3.$

2250. $x^2 (yy'' - y'^2) + xyy' = y\sqrt{x^2 y'^2 + y^2}.$

2251. $40\, y'''^3 - 45\, y'' y''' y^{IV} + 9\, y''^2 y^{V} = 0$ (jednačina koničnih preseka).

Sledeće jednačine transformisati tako da obe njihove strane budu potpuni izvodi a zatim ih rešiti:

2252. $yy'' + y'^2 - \dfrac{2yy'}{x} + \dfrac{y^2}{x^2} = 0.$

2253. $y'y''' - y''^2 = 0.$ **2254.** $y'y''' = 2y''^2.$

2255. $yy'' = y'(y' + 1).$ **2256.** $5y'''^2 - 3y'' y^{IV} = 0.$

2257. $xy'' - y' = x^2 yy'.$

2258. Odrediti krive kod kojih je poluprečnik krivine jednak trećem stepenu dužine normale.

2259. Naći krive kod kojih je poluprečnik krivine proporcionalan radijus vektoru odgovarajuće tačke.

2260. Naći krive, kod kojih je u proizvoljnoj tački poluprečnik krivine dva puta veći od odsečka normale, koji odsecaju ta kriva i x osa. Razmotriti dva slučaja: 1° kada je kriva ispupčena prema apscisnoj osi; 2° ako je kriva izdubljena prema apscisnoj osi.

2261. Naći krive kod kojih je poluprečnik obrnuto proporcionalan kosinusu ugla između tangente i apscisne ose.

2262. Po strmoj ravni dužine $l = 10\,\text{m}$ klizi telo. Ugao nagiba ravni je $\alpha = 45°$. Koeficijent trenja tela po površi ravni je $k = 0{,}5$. Odrediti zakon kretanja tela i vreme u toku koga telo pređe niz celu ravan, ako se u početnom trenutku nalazilo na vrhu strme ravni.

2263. Konzola (greda pričvršćena na jednom kraju) dužine $l = 6\,\text{m}$ opterećena je silom $F = 2\,t$ na slobodnom kraju. Naći jednačinu elastične linije

(krive izvijanja) i odrediti veličinu savijanja slobodnog kraja grede (modul elastičnosti je $E = 2\,100\,000\,\text{kg/cm}^2$ a moment inercije preseka grede $I = 30\,000\,\text{cm}^4$.

2264. Greda dužine l, koja je poduprta na krajevima, ravnomerno je opterećena teretom ukupne težine P. Odrediti jednačinu elastične linije i uvijanje na sredini grede.

2265. Odrediti oblik koji dobija teška sajla pričvršćena na krajevima, pod uticajem sopstvene težine.

2266. Dokazati da jednačina kretanja klatna $y'' + \sin y = 0$ ima partikularno rešenje $y(x)$ koje teži broju π kada $x \to \infty$.

Ispitati linearnu zavisnost sledećih sistema funkcija:

2267. 1° $x,\ x+1$; 2° $x^2,\ -2x^2$; 3° $x,\ x^2,\ x^3$;
4° $e^x,\ e^{2x},\ e^{3x}$; 5° $\sin^2 x,\ \cos^2 x,\ 1$.

2268. 1° $1,\ x,\ x^2,\ \dots\ x^n$; 2° $e^{k_1 x},\ e^{k_2 x},\ \dots\ e^{k_n x}$, gde je $k_i \neq k_j$ za $i \neq j$.

2269. $1,\ \sin^2 x,\ \cos 2x.$ **2270.** $\sin x,\ \cos x,\ \sin 2x.$

2271. $\operatorname{arctg} x,\ \operatorname{arcctg} x,\ 1.$ **2272.** $x,\ x^3,\ |x^3|.$

U sledećim primerima formirati homogene diferencijalne jednačine (što je moguće manjeg reda) ako su data njihova partikularna rešenja:

2273. 1° $y_1 = \sin x,\ y_2 = \cos x$; 2° $y_1 = e^x,\ y_2 = xe^x$; 3° $y_1 = x,\ y_2 = x^2$;
4° $y_1 = 3x,\ y_2 = x-2,\ y_3 = e^x + 1$.

2274. 1° $y_1 = e^x,\ y_2 = \operatorname{sh} x,\ y_3 = \operatorname{ch} x$; 2° $y_1 = x,\ y_2 = x^3,\ y_3 = |x^3|$;
3° $y_1 = e^x,\ y_2 = e^x \sin x,\ y_3 = e^x \cos x$.

2275. Znajući osnovni sistem rešenja linearne homogene jednačine

$$y_1 = x, \quad y_2 = x^2, \quad y^3 = x^3$$

naći njeno partikularno rešenje y, koje zadovoljava uslove:

$$y(1) = 0, \quad y'(1) = -1, \quad y''(1) = 2.$$

Naći opšti integral sledećih jednačina ako je dat jedan njihov partikularni integral:

2276. $xy'' + 2y' + xy = 0;\quad y_1 = \dfrac{\sin x}{x}.$

2277. $x^2 (\ln x - 1)\, y'' - xy' + y = 0;\quad y_1 = x.$

2278. $y'' + \dfrac{x}{1-x} y' - \dfrac{1}{1-x} y = 0;\quad y_1 = x.$

2279. $(2x - x^2)\, y'' + (x^2 - 2)\, y' + 2(1-x)\, y = 0;\quad y_1 = x^2.$

2280. $x^2(x^2-1)y''-x(x^2-2)y'+(x^2-2)y=0, \quad y_1=2x.$

2281. $x^2(x+1)y''-2y=0; \quad y_1=1+\frac{1}{x}.$

2282. $y''+(\operatorname{tg}x-2\operatorname{ctg}x)y'+2\operatorname{ctg}^2x\cdot y=0; \quad y_1=\sin x.$

2283. $y''\sin^3x=4y\sin 3x; \quad y_1=\sin^4 x.$

2284. $xy''+2y'-xy=0; \quad y_1=\frac{e^x}{x}.$

2285. $(1+x^2)y''+xy'-n^2y=0; \quad y_1=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^n.$

2286. $x^2(2x-1)y'''+(4x-3)xy''-2xy'+2y=0; \quad y_1=x; \quad y_2=\frac{1}{x}.$

2287. Naći partikularno rešenje jednačine

$$(1-2x^2)y''+2y'+4y=0$$

u obliku polinoma.

Naći opšti integral sledećih jednačina, znajući da imaju partikularni integral oblika eksponencijalne funkcije $y_1=e^{ax}$ ili u obliku polinoma $y_1=x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+\ldots$:

2288. $(2x+1)y''+4xy'-4y=0.$ 2289. $xy''-(x+2)y'+y=0.$

2290. $xy''-(2x+1)y'+(x+1)y=0.$ 2291. $x^2y''\ln x-xy'+y=0.$

2292. $x(2x+1)y''+2(x+1)y'-2y=0.$

2293. $x(x^2+6)y''-4(x^2+3)y'+6xy=0.$

2294. Naći opšti integral jednačine

$$x(x-1)y''-(2x-1)y'+2y=2x^3-3x^2$$

ako je $y_1=x^2$ partikularno rešenje odgovarajuće homogene jednačine.

2295. Naći opšti integral jednačine

$$(x+1)xy''+(x+2)y'-y=x+\frac{1}{x}$$

ako odgovarajuća homogena jednačina ima partikularno rešenje u obliku polinoma.

2296. Naći opšte rešenje jednačine

$$(x^2-1)y''+4xy'+2y=6x$$

ako su poznata dva partikularna rešenja jednačine

$$y_1=x \quad \text{i} \quad y_2=\frac{x^2+x+1}{x+1}.$$

Metodom varijacije konstanata rešiti jednačine:

2297. $xy''+y'=x^2.$ 2298. $y''-2y'+y=\frac{e^x}{x}.$

2299. $y''-y=\frac{2e^x}{e^x-1}.$ 2300. $y''+y=\frac{1}{\sin x}.$

2301. $y''+4y=2\operatorname{tg}x.$ 2302. $y''+y=\frac{1}{\cos 2x\sqrt{\cos 2x}}.$

2303. $x^3(y''-y)=x^2-2.$ 2304. $y''-6y'+9y=\frac{9x^2+6x+2}{x^3}.$

2305. $y'''+y=\sec x.$

Naći opšti integral sledećih jednačina:

2306. $y''-3y'+2y=0.$ 2307. $y''-2y'+y=0.$

2308. $y''-2y'+2y=0.$ 2309. $y''+2y'+3y=0.$

2310. $y''+4y=0.$ 2311. $y'''-8y=0.$

2312. $y'''+y=0.$ 2313. $y'''-5y''+17y'-13y=0.$

2314. $y^{\mathrm{IV}}-y=0.$ 2315. $y^{\mathrm{IV}}-5y''+4y=0.$

2316. $y^{\mathrm{IV}}-y'''-y''-y'+12y=0.$ 2317. $y^{\mathrm{V}}-10y'''+9y'=0.$

2318. $y^{\mathrm{V}}+8y''+16y'=0.$ 2319. $y^{\mathrm{VII}}+3y^{\mathrm{VI}}+3y^{\mathrm{V}}+y^{\mathrm{IV}}=0.$

2320. $y''+y=1; \quad y(0)=0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$

2321. $y''+y=2x-\pi; \quad y(0)=0, \quad y(\pi)=0.$

2322. $y'''-y'=0; \quad y(0)=3, \quad y'(0)=-1, \quad y''(0)=1.$

2323. $y^{\mathrm{IV}}+4y=0; \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1, \quad y(\infty)=0.$

2324. $y^{\mathrm{IV}}-a^4y=0; \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0, \quad y''(l)=0, \quad y'''(l)=b.$

2325. Kretanje materijalne tačke mase m duž x ose pod uticajem elastične sile kx, gde je k proizvoljna konstanta, i trenja $r\dot{x}$ (r=const), zove se slobodno oscilatorno kretanje. Jednačina toga kretanja ima oblik:

$$m\ddot{x}+r\dot{x}+kx=0.$$

Naći opšte rešenje ove jednačine.

2326. Naći vezu između puta x i vremena t, oscilatornog kretanja materijalne tačke mase $m=1$ koja se kreće pod dejstvom elastične sile w^2x bez trenja, ako je u početnom trenutku $t=0$ tačka bila u položaju $x=1$.

2327. Naći zakon kretanja fizičkog klatna.

2328. Odrediti zakon kretanja materijalne tačke mase m pod uticajem sile, orijentisane prema centru O i direktno proporcionalnoj rastojanju tačke od centra privlačenja O.

Naći opšti integral jednačina:

2329. $y''-5y'+6y=x$. **2330.** $y''+2y=x^2+2$.

2331. $y''-y=x^2+1$. **2332.** $\dfrac{d^2s}{dt^2}+2\dfrac{ds}{dt}+2s=2t^3-2$.

2333. $y'''+y'=x^4$. **2334.** $y''-2y'+y=e^{2x}$.

2335. $y''-a^2y=e^{bx}$. **2336.** $y''-3y'+2y=e^{3x}$.

2337. $y''-3y'+2y=e^x$. **2338.** $y''-4y'+4y=e^{2x}$.

2339. $y''+y=e^{-x}+2$. **2340.** $y''+y'-2y=(x^2-1)e^{2x}$.

2341. $y''-3y'+2y=(x^2+x)e^{3x}$. **2342.** $y'''-y''=xe^x$.

2343. $y'''+y''=x^2+1+3e^x$. **2344.** $y''+y=\sin 2x$.

2345. $y''+y=\sin x$. **2346.** $y'''-4y'=xe^{2x}+\sin x+x$.

2347. $y'''-2y'+4y=e^{-x}\cos x+e^x\sin x$.

2348. $y''-2y'+2y=4e^x\sin x$. **2349.** $y''+y=xe^x\cos x$.

2350. $2y''+5y'=e^{-x}[(110x+43)\cos x+(1-30x)\sin x]$.

2351. $y''+y=2x\cos x\cos 3x$. **2352.** $y''+n^2y=ax\sin nx+b\cos nx$.

2353. $y'''+y''-y'+15y=\sin 2x$. **2354.** $y'''+y'=\operatorname{tg} x\sec x$.

2355. $y^{IV}+2y'''+5y''+8y'+4y=\cos x+40e^x$.

Naći opšti integral sledećih Eulerovih jednačina:

2356. $x^2y''+xy'+y=1$. **2357.** $x^2y''-3xy'+4y=0$.

2358. $x^2y''+3xy'+y=0$. **2329.** $x^3y'''+x^2y''+3xy'-8x=0$.

2360. $x^3y'''+xy'-y=0$. **2361.** $x^3y'''+2x^2y''-xy'+y=0$.

2362. $y''+\dfrac{y'}{x}+\dfrac{y}{x^2}=0$. **2363.** $x^2y''-4xy'+6y=x$.

2364. $x^2y''-2xy'+2y=2x^3-x$. **2365.** $x^3y'''-x^2y''+2xy'-2y=x^3+3x$.

2366. $(1+x)^2y''-3(1+x)y'+4y=(1+x)^3$

2367. $(x+1)^3y''+3(x+1)^2y'+(x+1)y=6\ln(x+1)$.

2368. $x^3y''-x^2y'-3xy+16\ln x=0$.

2369. $(x+1)^2y''+(x+1)y'+y=x^2+2\sin\ln(1+x)$.

2370. $x^2y''+xy'-y=\dfrac{x}{(x+1)^2}-\ln(x+1)$.

2371. $x^4y'''+2x^3y''=1;\quad y(1)=0;\quad y'(1)=0;\quad y''(1)=0$.

U sledećim jednačinama, oblika $a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=0$, smenom $y=a(x)z$ anulirati član uz prvi izvod, a zatim rešiti te jednačine:

2372. $x^2y''-4xy'+(6-x^2)y=0$. **2373.** $(x^2-x)y''+(x+1)y'-y=0$.

2374. $(x^2-x)y''+(2x-3)y'-2y=0$.

2375. $x^2(2x+1)(x+1)y''-2x(x^2+3x+1)y'+(6x+2)y=0$.

2376. $(1+x^2)y''+6xy'+6y=0$.

U sledećim jednačinama izvršiti zamenu $x=\varphi(t)$, birajući funkciju $\varphi(t)$ tako da se anulira koeficijenat uz $\dfrac{dy}{dt}$:

2377. $2xy''+y'-2y=0$. **2378.** $xy''-y'-4x^3y=0$.

2379. $(1+x^2)^2y''+x(1+x^2)y'+y=0$.

2380. $y''-y'+e^{4x}y=0$.

2381. $y''\sin x\cos x-y'+m^2y\operatorname{tg} x\sin^2 x=0$.

2382. Jednačina oscilatornog kretanja, tj. kretanja materijalne tačke mase m po x osi pod dejstvom: sile kx, trenja $r\dot{x}$ i neke spoljašnje sile $f(t)$, koja zavisi od vremena, ima oblik $m\ddot{x}+r\dot{x}+kx=f(t)$. Napisati jednačinu kretanja materijalne tačke mase m pod dejstvom sile k^2x bez trenja a pod uticajem spoljašnje periodične sile $f(t)=2k\sin kt$, i rešiti je.

2383. Materijalna tačka jedinične mase kreće se po x osi pod dejstvom konstantne sile čiji je pravac x osa, uz trenje koje je jednako brzini kretanja. Naći zakon kretanja ako je $x(0)=0$ i $v(0)=0$.

2384. Na telo jedinične mase dejstvuju dve sile $f_1=-k^2x$ i $f_2=-fk^2\operatorname{sign} x'$ jednaka fk^2 i orijentisana suprotno brzini. Početna brzina $x'=0$ a početno rastojanje od početka je $x_0=nf$. Naći kretanje tela.

2385. U strujnom kolu, koje je uključeno na izvor elektromotorne sile e, vezani su paralelno indukcioni kalem induktivnosti L, otpor R i kondenzator kapaciteta C. Naći struju u kolu u funkciji od vremena t, ako su u početnom momentu struja i opterećenje kondenzatora jednaki nuli.

2386. Rešiti jednačinu

$$y''' = (x^2y'' - 2xy' + 2y)P(x) + Q(x)$$

smenom $x^2y'' - 2xy' + 2y = u$, ako su P i Q date funkcije.

2387. Naći rastojanje između dve susedne nule proizvoljnog (ali ne identički jednakog nuli) rešenja jednačine $y'' + my = 0$, gde je $m = \text{const} > 0$. Koliko nula može biti na intervalu $a < x < b$?

2388. Ako je $|f(t)| < \dfrac{c}{t^{1+a}}$, dokazati da jednačina $u'' - [1 - f(u)]u = 0$ ima takva dva rešenja $u_1(t)$ i $u_2(t)$ da je

$$u_1(t) = e^t\left[1 + 0\left(\frac{1}{t^a}\right)\right], \qquad u_2(t) = e^{-t}\left[1 + 0\left(\frac{1}{t^a}\right)\right]$$

kada $t \to \infty$.

§ 4. Razni primeri diferencijalnih jednačina drugog i višeg reda

Naći opšti integral jednačina:

2389. $(1+x^2)^2y'' + 2x(1+x^2)y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = \sqrt{2}$

2390. $yy'' + 4y^2 - \dfrac{1}{y}y'^2 = 0;\ y(0) = 1; \quad y'(0) = \sqrt{6}.$

2391. $(x^2+y^2)y'' - yy'^2 + xy'^3 + xy' - y = 0.$

2392. $yy'' + y'^2 = f(x).$

2393. $(y - xy')^2 + x^2yy'' = 0, \ y(-1) = 0, \ y(1) = \sqrt{2}.$ 2394. $yy'' = y'^2 + y'\sqrt{y^2 + y'}$

2395. $y'' + \dfrac{1}{y^2}e^{y^2}y' - 2yy'^2 = 0; \quad y\left(-\dfrac{1}{2e}\right) = 1, \quad y'\left(-\dfrac{1}{2e}\right) = e.$

2396. $y' = xy'' - \dfrac{y''^2}{2}.$

2397. $y''\cos y + y'^2\sin y = y'; \quad y(-1) = \dfrac{\pi}{6}; \quad y'(-1) = 2$

2398. $3y'(y'')^2 - (1 + y'^2)y''' = 0.$

2399. $x^2y'' - 3xy' = \dfrac{6y^2}{x^2} - 4y; \quad y(1) = 1; \quad y'(1) = 4.$

2400. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}.$ 2401. $x^2y'' - 2y = \sin(\ln x).$

2402. $(1+x)y'' + (1+x)y' + y = 2\cos\ln(1+x).$

2403. $(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0.$ 2404. $y'' - 6y' + 9y = 36\sqrt{x} - \dfrac{12x+1}{x\sqrt{x}}.$

2405. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = e^{2x} + e^{3x}; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 1; \quad y''(0) = 0.$

2406. $y^{\mathrm{IV}} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = \dfrac{\pi}{2} + 4\cos x; \quad y(0) = y'(0); \quad y(\pi) = y'(\pi) = 0.$

2407. $(1+x^2)y'' + 2xy' = (6x^2 + 2); \quad y(-1) = y'(-1) = 0,$ ako je njen partikularni integral $y_1 = x^2$.

2408. $(x^2+1)y'' + 5xy' + 4y = 0,$ ako je njen partikularni integral

$$y_1 = \frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}.$$

2409. $(1+x^2)y'' + xy' - n^2y = 0,$ ako je njeno partikularno rešenje

$$y_1 = \left(x - \sqrt{x^2+1}\right)^n.$$

2410. $(3x^3 + x)y'' + 2y' - 6xy = 4 - 12x^2,$ ako su $y_1 = 2x$ i $y_2 = (x+1)^2$ dva njena partikularna rešenja.

2411. $x^2(y+x)y'' - (xy' - y)^2 = 0.$ 2412. $x^4y'' + 2x^3y' - 4y = \dfrac{1}{x}.$

2413. $y'' - y' + e^{2x}y = e^{2x}; \quad y(\ln\pi) = y'(\ln\pi) = 0.$

2414. $xy'' + 2y' - xy = e^x.$ 2415. $y'' + \dfrac{2}{x}y' - a^2y = 2.$

2416. $y'' - 2xy' + (x^2+2)y = e^{\frac{x^2+2x}{2}}; \quad y(0) = \dfrac{1}{4}; \quad y'(0) = \dfrac{1}{2}.$

2417. $x^4y'' + c^2y = 0.$ 2418. $x^4y'' - c^2y = 0.$

2419. $xy'' - 4y' - xy = 0,$ diferenciranjem četiri puta uzastopice i korišćenjem dobijenog rezultata.

2420. $x^2(1-x)^2y'' + By = 0,$ nalaženjem partikularnog integrala u obliku $y = x^m(1-x)^n$.

2421. Koristeći smenu $z = yy'$ naći opšte rešenje jednačine

$$xyy'' + xy'^2 = yy'$$

a zatim odrediti onu od integralnih krivih koja prolazi kroz tačke (2, 0) i (0, 1), i izračunati njom ograničenu površinu.

2422. Naći oblik opšteg rešenja diferencijalne jednačine

$$y'' + 2(\lambda - 1)y' + (\lambda^2 + \lambda - 1)y = (3\lambda - 2)\cos\lambda x$$

za razne vrednosti parametra λ.

2423. Odrediti parametar k tako da funkcija $y=x^k$ bude partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$$6x^2y''+5xy'-2y=0.$$

2424. U jednačini $y''+2y'+(\lambda^2+1)y=0$ odrediti vrednost parametra λ tako da jednačina ima rešenja koja se anuliraju u tačkama $x=0$ i $x=2\pi$ i još u dvema tačkama između 0 i 2π.

2425. Ako je $y_0(x)$ jedno partikularno rešenje jednačine $y''+\frac{1}{x}y'+y=0$ pokazati da je $y_0'(x)$ partikularno rešenje jednačine

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{1}{x^2}\right)y=0.$$

2426. Pokazati da je svaki partikularni integral diferencijalne jednačine

$$y''\sin x-y'(\cos x+\sin x)+y\cos x=\cos x$$

takođe partikularno rešenje jednačine

$$y'''-y''+y'-y=-1.$$

Rešiti ove jednačine i naći partikularno rešenje prve jednačine koja je periodična funkcija i zadovoljava uslov $y(0)=2$.

2427. Za koju vrednost parametra a jednačina

$$(1-x^2)y''-2xy'+ay=0$$

ima partikularno rešenje u obliku polinoma trećeg stepena? Naći to rešenje.

2428. Pokazati da je funkcija $\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(1-x^2)^{\frac{2n-1}{2}}$ jedno partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$$(x^2-1)y''+xy'-n^2y=0, \qquad n\in N, \quad |x|<1.$$

2429. U diferencijalnoj jednačini

$$(1+x^2)y''-2xy'+(ax^2+bx+c)y=0$$

odrediti konstante a, b i c tako da je $y=e^{mx}$ jedan njen partikularni integral. Naći opšte rešenje date jednačine.

2430. 1° Naći opšti integral jednačine

$$L(y)\equiv(2x+1)y''+(4x-2)y'-8y=0$$

znajući da ona ima partikularno rešenje u obliku polinoma.

2° Koristeći dobijeni rezultat rešiti jednačinu

$$L(y)=(2x+1)\sqrt{x}.$$

2431. Data je diferencijalna jednačina

$$y''+\frac{4x-2}{2x+1}y'-\frac{8}{2x+1}y=2(2x+1)^2e^{-x}$$

čiji partikularni integral homogenog dela ima oblik $y=e^{mx}$.

1° Naći opšte rešenje jednačine,

2° Odrediti integralnu krivu koja dodiruje x osu u koordinatnom početku.

2432. Data je jednačina

$$2x\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\operatorname{ctg} y+x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Odrediti njeno rešenje oblika $u=f(x)\cos y$ koje zadovoljava uslove

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\cos y \quad \text{za} \quad x=a \quad (a=\text{const}) \quad \text{i} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\partial u}{\partial x}=0.$$

Naći najopštiju funkciju $u=u(r)$ koja zadovoljava jednačine:

2433. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, ako je $r=x^2+y^2$.

2434. $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$, ako je $r=\frac{y}{x}$.

2435. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{4u}{x^2+y^2}=0$, ako je $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

2436. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$, ako je $r=x^2+y^2+z^2$.

2437. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$, ako je $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

2438. 1° Naći izraz kojim treba pomnožiti diferencijalnu jednačinu

$$yy''+y'^2-\frac{yy'}{\sqrt{1+x^2}}=0$$

da bi ona bila izvod diferencijalne jednačine prvog reda. Naći zatim njen opšti integral.

2° Pokazati da se opšti integral može takođe dobiti polazeći od smene $y'=yz(x)$.

2439. Data je jednačina $y''=\alpha y'+\beta y$, gde su α i $\beta>0$ funkcije od x. Kakva veza mora postojati između α i β da bi jednačina imala dva linearno nezavisna integrala y_1 i y_2 vezana relacijom $y_1 y_2=1$? U slučaju kada je $\alpha=\frac{1}{x}$ odrediti β i naći opšti integral.

2440. Kakva veza mora postojati između funkcija $f(x)$ i $\varphi(x)$ da bi jednačina

$$y''+f(x)y'+\varphi(x)y=0$$

imala dva partikularna integrala od kojih je jedan kvadrat drugoga?

2441. Naći jedan partikularni integral homogenog dela linearne deferencijalne jednačine

$$x^4y''+(x^2-1)xy'-(x^2-1)y=\frac{1}{x^5}$$

i zatim rešiti ovu jednačinu.

2442. Data je funkcija $y=x^n e^{-x}$, $n\in N$.

1° Pokazati da ova funkcija zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$x(y'+y)=ny.$$

2° Polazeći od ove jednačine, zaključiti da je funkcija

$$z(x)=\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

jedno partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$$x\frac{d^2z}{dx^2}+(x+1)\frac{dz}{dx}+(n+1)z=0.$$

3° Pokazati da je funkcija

$$w(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

polinom stepena n i da ona zadovoljava jednačinu

$$x\frac{d^2w}{dx^2}+(1-x)\frac{dw}{dx}+nw=0.$$

Ako je k prirodan broj izračunati integral

$$I=\int_0^\infty x^k\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)\,dx,$$

za $k=n$ i $k<n$.

2443. Neka je y bilo koji integral jednačine $y''=f(x)y$, gde je $f(x)$ diferencijabilna funkcija po x. Pokazati da onda i $z=y^2$ zadovoljava jednu linearno homogenu diferencijalnu jednačinu trećeg reda i naći tu jednačinu.

2444. Diferencijalna jednačina

(1) $$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$$

svodi se smenom $x=q(t)$ na jednačinu

(2) $$\ddot{y}+p(t)\dot{y}+q(t)y=0.$$

Pokazati da koeficijenti jednačina (1) i (2) zadovoljavaju relaciju

$$\left[2P(x)Q(x)+\frac{d}{dx}(Q(x))\right][Q(x)]^{-3/2}\equiv\left[2p(t)q(t)\frac{dq(t)}{dt}\right][q(t)]^{-3/2}.$$

2445. Dokazati ako *Emdenova* jednačina $y''+\frac{2}{x}y'+y^\alpha=0$ gde je $\alpha\in R$, ima jedno rešenje $f(x)$, da je tada i funkcija $A^{\frac{2}{\alpha-1}}f(Ax)$ gde je A pozitivna konstanta takođe njeno rešenje.

Proveriti da li data jednačina ima za $n=5$ jedno partikularno rešenje oblika $y(x)=(ax^2+bx+c)^{-1/2}$, gde su a, b i c konstante.

2446. Pokazati da je funkcija

$$\frac{d^n}{dx^n}(x-1)^{n+p}(x+1)^{n+q}$$

jedno partikularno rešenje linearne diferencijalne jednačine

$$(1-x^2)y''+[(p+q-2)x+(p-q)]y'+(n+1)(n+p+q)y=0.$$

2447. Pokazati da se diferencijalna jednačina $x^2y''-yy'^2+y=0$ svodi smenom $x=\varepsilon e^t$, $y=\varepsilon e^t\varphi(t)\,(\varepsilon=\pm 1)$ na oblik

$$\frac{dz}{d\varphi}=\frac{\varphi(z^2-1)}{z-\varphi}\quad\left(z=\frac{d\varphi}{dt}+\varphi\right).$$

2448. Data je jednačina

$$xy'''+4x^2y''+4x(2-x^2)y'-12x^2y-20x^4=0.$$

1° Pokazati da je ona izvod neke jednačine nižeg reda.

2° Naći njen opšti integral.

2449. Data je diferencijalna jednačina

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+ay=0.$$

1° Ako je njen partikularni integral zbir $f_1(x)+f_2(x)$ respektivno parne i neparne funkcije, pokazati da i svaka od te dve funkcije ponaosob zadovoljava datu diferencijalnu jednačinu.

2° Odrediti konstantu a tako da polinom trećeg stepena bude partikularni integral date jednačine. Naći taj partikularni integral a zatim i opšti integral jednačine.

2450. Pokazati da se opšte rešenje jednačine

$$y''+k^2y=f(x)$$

ako je k realan broj, može izraziti u obliku

$$y=A\cos kx+B\sin kx+\frac{1}{k}\int_{x_0}^{x}f(t)\sin k(x-t)\,dt$$

gde su A i B integracione konstante, a x_0 neka podesno izabrana brojna vrednost.

2451. Pokazati da jedno partikularno ješenje jednačine

$$xy''+2(\lambda+1)y'+xy=0,$$

ima oblik $y(x)=\int_0^1(1-t^2)^\lambda\cos xt\,dt, \quad \lambda>-1$

Ako je λ prirodan broj pokazati da se ovaj integral može izraziti pomoću elementarnih funkcija.

2452. Pokazati da su funkcije

$$y_1=\sqrt{\frac{1+ix}{2}} \quad \text{i} \quad y_2=\sqrt{\frac{1-ix}{2}}$$

dva partikularna rešenja diferencijalne jednačine $(1+x^2)y''+xy'-\frac{1}{4}y=0$.

Na osnovu ove činjenice zaključiti da je funkcija $\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$ takođe jedno partikularno rešenje jednačine.

2453. Dokazati da je funkcija

$$y(x)=\int_0^\pi\cos(ax\cos t)\,dt$$

gde je a konstanta, rešenje jednačine

$$xy''+y'+a^2xy=0.$$

2454. Odrediti ono rešenje jednačine $4y''=y$ koje zadovoljava uslove:

1° $y\to0$ kada $x\to\infty$, i $y'=6$ za $x=0$;

2° $y\to0$ kada $x\to-\infty$, i $y'=6$ za $x=0$.

2455. Data je diferencijalna jednačina

$$y''+ay'+by=f(x)$$

gde su a i b konstante.

Pokazati da se opšte rešenje ove jednačine može napisati u obliku

$$y=Ae^{-\frac{1}{2}ax}\sin\frac{\lambda}{2}(x-B)+\frac{2}{\lambda}\int_{x_0}^{x}f(t)\,e^{\frac{1}{2}a(t-x)}\sin\frac{\lambda}{2}(x-t)\,dt$$

gde je $\lambda^2=4b-a^2>0$, A i B integracione konstante a x_0 podesno izabrana brojna vrednost.

2456. Data je diferencijalna jednačina

$$y''=f(x)$$

pokazati da se njeno partikularno rešenje $y(a)=0$, $y(b)=0$, $a\neq b$ može predstaviti u obliku

$$y=\frac{x-a}{b-a}\int_x^b(t-b)f(t)\,dt+\frac{x-b}{b-a}\int_a^x(t-a)f(t)\,dt$$

2457. Data je jednačina

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$$

1° Naći vezu između funkcija $P(x)$ i $Q(x)$ pri kojoj se data jednačina svodi smenom $x=f(x)$ na jednačinu $y''+ay'+by=0$

2° Ako je $P(x)=\frac{2}{x}$, odrediti funkciju $f(t)$ a potom opšti integral polazne jednačine.

2458. Data je diferencijalna jednačina

$$(x^2-1)\,y''+[x-(\alpha+\beta)\sqrt{x^2-1}]\,y'+\alpha\beta\,y=0$$

$$(\alpha,\ \beta\in R,\ x>1)$$

1° Smenom $x=\operatorname{ch} t$ naći opšti integral date jednačine.

2° Za $\alpha=5$ i $\beta=3$ odrediti partikularni integral koji je kada $x\to\infty$ beskonačno velika veličina ekvivalentna sa x^3.

3° Kakvi treba da budu α i β da bi rešenje date jednačine ostalo konačno kada $x\to\infty$.

2459. Odrediti krive kod kojih je poluprečnik krivine dva puta veći od dužine normale u proizvoljnoj tački. Mogu li se odrediti krive kod kojih poluprečnik krivine i dužina normale stoje u ma kakvoj linearnoj vezi?

2460. 1° Naći familiju krivih čiji se centar krivine svake tačke projektuje u presek A tangente odgovarajuće tačke M i ose Ox. Pokazati da je za svaku od ovih krivih odsečak $\overline{MA}$ konstantan.

2° Odrediti zatim ovu krivu te familije koja dodiruje Oy osu u tački $(0,\ a)$.

2461. Na površi $z=x^2$ naći sve krive kod kojih tangenta u proizvoljnoj tački M prolazi kroz središte odsečka AB, pri čemu su A i B tačke preseka oskulatorne ravni date krive u tački M sa koordinatnim osama Ox i Oy.

2462. Integraliti jednačinu $xy''-4y'-xy=0$ diferencirajući je četiri puta uzastopce i koristeći dobijene jednakosti.

2463. 1° Naći familiju krivih čiji je poluprečnik krivine jednak onom delu normale koji odsecaju prave $y=0$ i $y=h$.

2° Naći ono partikularno rešenje koje zadovoljava uslove

$$y=0,\ x=-\frac{h\pi}{4},\ y'=1,\ x=0.$$

3° Utvrditi čemu teži x u dobijenom partikularnom integralu kada $y\to\infty$.

2464. Materijalna tačka lagano se potapa u tečnost. Naći zakon kretanja ako se uzme da je pri laganom potapanju otpor tečnosti proporcionalan brzini potapanja.

2465. Naći zakon kretanja tela, koje pada bez početne brzine, smatrajući da je otpor vazduha proporcionalan kvadratu brzine i da brzina ima graničnu vrednost od 75 m/sec kada $t\to\infty$.

§ 5. Rešavanje diferencijalnih jednačina pomoću redova

1° Ako je funkcija $f(x,\ y)$ u okolini tačke $(x_0,\ y_0)$ analitička, tj. može da se predstavi redom po stepenima $(x-x_0)$ i $(y-y_0)$, onda je rešenje jednačine $y'=f(x,\ y)$ sa početnim uslovima $y(x_0)=y_0$ takođe analitička funkcija, tj. može da se izrazi potencijalnim redom u okolini tačke x_0. Analogno tvrđenje važi za jednačinu

$y^{(n)}=f(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})$ sa početnim uslovima $y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$. Za određivanje koeficijenta reda, pored metode utvrđivanja koeficijenata, može se takođe koristiti i Taylorov red

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

gde je $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0,\ y_0)$ a ostali izvodi $y^{(n)}(x_0)$ $(n=2,\ 3\ldots)$ se uzastopno nalaze diferenciranjem jednačine $y'=f(x,\ y)$ i zamenom umesto x broja x_0.

2° Za jednačinu

(1) $$p_0(x)\,y^{(n)}+p_1(x)\,y^{(n-1)}+\cdots+p_n(x)=0$$

kod koje je $p_0(x_0)=0$ tj. koeficijent uz najveći stepen se anulira u tački x_0, rešenje u obliku potencijalnog reda može da ne postoji. U tom slučaju mogu postojati rešenja u obliku generalisanog potencijalnog reda

(2) $$a_0(x-x_0)^m+a_1(x-x_0)^{m+1}+a_2(x-x_0)^{m+2}+\ldots,$$

gde broj m ne mora biti ceo. Da bismo ih našli treba zameniti red (2) u jednačini (1), i izjednačavajući koeficijente uz najmanje stepene od $(x-x_0)$ naći moguće vrednosti eksponenata m, a zatim za svaku od tih vrednoti m odrediti koeficijente a_i.

Naći u obliku potencijalnog reda rešenje sledećih jednačina:

2466. $y'=y;\ y(0)=1$.

2467. $y'=x+y;\ y_0=y(0)=1$.

2468. $y'=y^2+x^3;\ y(0)=\dfrac{1}{2}$.

2469. $y'=x^2+y;\ y(x_0)=y_0$.

2470. $y'=x^2-4x+y+1;\ y(2)=3$.

2471. $y'=\dfrac{2x-y}{1-x};\ y(0)=y_0$.

2472. $(1-xy)\,y'-y=0$.

2473. $xy'-y-x-1=0$ po stepenima od $(x-1)$.

2474. $y'-x^2-e^y=0,\ y(0)=0$.

2475. $(1-x)\,y'=x^2-y$. **2476.** $xy'=1-x+2y$ po $(x-1)$.

2477. $y'=2x^2+3y$. **2478.** $y'=2x+\cos y;\ y(0)=0$.

2479. $(x+1)\,y'=x^2-2x+y$.

2480. Oceniti sa kolikom tačnošću se može dobiti za $|x|<0{,}2$ rešenje jednačine

$$y'=e^y-x^2y,\ y(0)=0,$$

ako se u odgovarajućem potencijalnom redu, uzmu samo četiri člana (do a_4x^4 zaključno).

Naći u obliku potencijalnog reda rešenje sledećih jednačina:

2481. $(1+x^2)y''+xy'-y=0.$

2482. $y''=xy'-y+e^x;\ y(0)=1,\ y'(0)=0.$

2483. $2y''-xy'-2y=0;\ y(0)=0,\ y(2)=e.$

2484. $y''-xy=0.$ **2485.** $y''-x^2y'-y=0.$

2486. $y''-2x^2y'+4xy=x^2+2x+2.$

2487. $y''+(x-1)y'+y=0$ po $(x-2)$. **2488.** $y''+xy=0.$

2489. $y''+2x^2y=0.$ **2490.** $y''-xy'+x^2y=0.$

2491. $(1-x^2)y''-2xy'+p(p+1)y=0$, gde je p konstanta.

2492. $y''+x^2y=1+x+x^2$ po x.

2493. $y'''-xy''+(x-2)y'+y=0.$

2494. $2xy''+(x+1)y'+3y=0.$

2495. $2x^2y''-xy'+(x^2+1)y=0.$

2496. $3xy''+2y'+x^2y=0.$ **2497.** $xy''+y'-y=0.$

2498. $xy''+y'+x^2y=0.$ **2499.** $xy''-3y'+xy=0.$

2500. $(x-x^2)y''-3y'+2y=0.$

2501. $xy''+(x-1)y'-y=0.$

2502. $(x^2-x)y''+3y'-2y=x+\dfrac{3}{x^2}$, u blizini $x=0$.

2503. $2x^2(x-1)y''+x(3x+1)y'-2y=0$, da potencijalni red bude konvergentan u blizini $x=\infty$.

2504. $x^3y''+x(1-x)y'+y=0$, da potencijalni red bude konvergentan u blizini $x=\infty$.

2505. $2(x^2+y^3)y''-(x-3x^2)y'+y=0.$

2506. $4xy''+2(1-x)y'-y=0.$

2507. $2x^2y''-xy'+(1-x^2)y=0.$

2508. $xy''+y'+xy=0.$ **2509.** $x^2y''-xy'+(x^2+1)y=0.$

2510. $xy''-2y'+y=0.$ **2511.** $xy''+2y'+xy=0.$

2512. $x^2(x+1)y''+x(x+1)y'-y=0$, po x.

2513. $2xy''+y'-y=x+1.$

2514. $2x^3y''+x^2y'+y=0$, u okolini tačke $x=\infty$.

2515. $x^3y''+(x^2+x)y'-y=0.$

2516. Rešiti Legendreovu jednačinu

$$(1-x^2)y''-2xy'+p(p+1)y=0.$$

2517. Rešiti Besselovu jednačinu

$$x^2y''+xy'+(x^2-k^2)y=0.$$

Rešiti Besselove jednačine:

2518. $x^2y''+xy'+\left(4x^2-\dfrac{9}{25}\right)y=0.$

2519. $x^2y''+xy'+(3x^2-4)y=0.$

2520. Koristeći smenu $y=u\sqrt{x}$ rešiti jednačinu $x^2y''+\left(x^2-p^2+\dfrac{1}{4}\right)y=0$ gde je p pozitivna konstanta.

2521. Ako je $y(x)$ rešenje Besselove jednačine pokazati da funkcija $u(x)=x^{-a}y(x)$ zadovoljava jednačinu

$$xu''+(2a+1)u'+xu=0.$$

2522. Smenom $y=z\sqrt{x}$ transformisati jednačinu $y''+y=0$ na Besselovu, i napisati rešenje dobijene jednačine u obliku $y=\sqrt{x}\,[c_1 I_{1/2}(x)+c_2 I_{-1/2}(x)]$ pri čemu $I_{1/2}(x)$ i $I_{-1/2}(x)$ definišu respektivno $ax^{-1/2}\sin x$ i $bx^{-1/2}\cos x$.

2523. Jednačinu $y''+xy=0$, smenom $y=\left(\dfrac{3}{2}t\right)^{1/3}u$, $x=\dfrac{3}{2}t^{2/3}$ svesti na Besselovu i izraziti njeno opšte rešenje pomoću Besselovih funkcija.

2524. Odrediti vrednost konstanti α, β i γ tako da se jednačina

$$x^2y''-2xy'+4(x^4-1)y=0$$

smenom $x=\alpha t^{\beta}$, $y=ut^{\gamma}$ (u je funkcija nove nezavisno promenljive t) svede na Besselovu i napisati opšte rešenje dobijene i polazne jednačine.

2525. Rešiti Gaussovu diferencijalnu jednačinu

$$(x-x^2)y''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]y'-\alpha\beta y=0.$$

gde α, β, $\gamma\in R$.

Rešiti jednačine:

2526. $(x-x^2)y''+\left(\dfrac{3}{2}-2x\right)y'-\dfrac{1}{4}y=0.$

2527. $(x-x^2)y''+4(1-x)y'-2y=0.$

2528. Pokazati da je

1° $F(\alpha, \beta, \beta, x)=(1-x)^{-\alpha}$, 2° $xF(1, 1, 2, -x)=\ln(1+x)$.

2529. Rešiti jednačinu

$$(x^2-3x+2)y''+4xy'+2y=0$$

svodeći je na Gaussovu smenom $x=\xi z+\eta$.

2530. Pokazati da je

1° $\dfrac{1}{1-x}=F(1, \beta, \beta, x)$; 2° $\arcsin x = xF\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}, x^2\right)$

3° $\operatorname{arc\,tg} x = xF\left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}, -x^2\right)$; 4° $e^x=\lim\limits_{\alpha\to\infty} F\left(\alpha, 1, 1, \dfrac{x}{\alpha}\right)$;

4° $\sin x = \lim\limits_{\substack{\alpha\to\infty\\ \beta\to\infty}} xF\left(\alpha, \beta, \dfrac{3}{2}, -\dfrac{x^2}{4\alpha\beta}\right)$

gde $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ označava jedan partikularni integral Gaussove jednačine.

Proveriti da li sledeće jednačine imaju rešenje u obliku potencijalnog reda (ili generalisanog potencijalnog reda):

2531. $x^2y''+xy'-(x+2)y=0$. **2532.** $x^2y''+xy'+(1-x)y=0$.

2533. $x^2y'+(x-1)y=-1$.

Naći u obliku trigonometrijskih redova periodično rešenje jednačina:

2534. $y''+y'+y=|\sin x|$.

2535. $y'''-y'-y=\dfrac{2\sin x}{5-4\cos x}$.

2536. Naći partikularno rešenje $y(x)$ u obliku Fourierovog reda sa periodom π jednačine

$$y''+y=x\cos x, \quad x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Napisati brojni red $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Naći elementarnu funkciju $y(x)$ ako je poznat njen red:

2537. $y(x)=x+\dfrac{x^5}{5!}+\dfrac{x^9}{9!}+\dfrac{x^{13}}{13!}+\cdots$

2538. $y(x)=1+\dfrac{x^4}{4!}+\dfrac{x^8}{8!}+\dfrac{x^{12}}{12!}+\cdots$

2539. Data je diferencijalna jednačina

$$xy''+(a+\lambda)xy'+(a+b)y=0$$

gde su a, b i λ konstante.

1° Naći u obliku potencijalnog reda ono partikularno rešenje $y(x)$ koje ispunjava uslove $y(0)=0$, $y'(0)=1$ i ispitati konvergenciju tog reda.

2° Koju elementarnu funkciju predstavlja $y(x)$ kada je $b=x$.

3° U slučaju $b=\lambda$ naći opšti integral $y=\varphi(x, c_1, c_2)$ date diferencijalne jednačine.

4° Pod pretpostavkom $\alpha=a+b>0$, naći $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x, c_1, c_2)$

2540. Dokazati da jednačina

$$xy''-(x+\alpha+\beta)y'+\alpha y=0$$

gde su α i β prirodni brojevi ima kao partikularni integral jedan polinom. Izvesti odatle da ona ima i partikularni integral oblika $e^x P(x)$, gde je $P(x)$ polinom.

2541. 1° Pokazati da je funkcija $y(x)=\sqrt{-x+\sqrt{x^2+1}}$ partikularno rešenje jedne linearne diferencijalne jednačine (E) drugog reda, čiji su koeficijenti racionalne funkcije po x.

2° Polazeći od jednačine (E), pokazati da je

$$y(x)=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^k\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n$$

$$x\in[-1, 1], \text{ gde je } k=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(n-2) \text{ za } n \text{ parno,}\\[2mm] \dfrac{1}{2}(n-3) \text{ za } n \text{ neparno}\end{cases}$$

3° Da li je funkcija $y(x)=\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$ takođe rešenje jednačine (E)?

2542. Data je diferencijalna jednačina

$$x^2y''+4xy'+2y=\ln(1+x)$$

1° Odrediti partikularno rešenje $y(x)$ koje se može razviti u potencijalni red u okolini tačke $x=0$ i ispitati konvergenciju tog reda.

2° Izračunati $y\left(\dfrac{1}{2}\right)$ sa greškom manjom od 10^{-3}.

3° Odrediti zbir reda u konačnom obliku $(x\neq 0)$.

2543. 1° Pomoću potencijalnih redova naći opšti integral diferencijalne jednačine

$$(1-\alpha x)\,y''+\alpha^2 xy'-\alpha^2 y=0$$

gde je α data konstanta.

2° Na površi $y=e^x$ odrediti krive koje imaju osobinu da oskulatorna ravan u svakoj tački $A(x, y, z)$ prolazi kroz tačku $B(2x, 2y, 2z)$.

3° Ako je $z=\varphi(x)$ jednačina one od projekcija tih krivih na ravan $y=0$ koja u tački $(0, 1)$ te ravni dodiruje pravu $z=x+1$ izračunati veličinu dela površi $y=e^x$ koji isecaju površine $z=0$ i $z=\varphi(x)$ za $3<0$.

§ 6. Sistemi diferencijalnih jednačina

1° Svaki sistem jednačina višeg reda može se uvek svesti na odgovarajući sistem jednačine prvog reda. Stoga je dovoljno ispitivati *normalni* sistem od n jednačina sa n nepoznatih funkcija $x_1, x_2, \dots, x_n$ koje zavise od promenljive t:

$$\frac{dx_1}{dt}=f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$(1)\qquad \frac{dx_2}{dt}=f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{dx_n}{dt}=f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Sistem od n jednačina prvog reda može se uvek svesti na jednu jednačinu n-og reda koju treba integraliti.

2° Prvi integrali. Pod *prvim integralom* sistema (1) podrazumeva se ma kakva relacija između nezavisno promenljive t, funkcija $x_1, x_2, \dots, x_n$ i jedne proizvoljne konstante c_1, tj. relacije oblika

$$(2)\qquad \varphi_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n)=c_1$$

koju zadovoljava svaki sistem rešenja jednačine (1).

Relacija

$$\frac{d\varphi_1}{dt}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}f_1+\dots+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{n1}}f_n=0$$

daje potreban i dovoljan uslov da jednačina (2) predstavlja prvi integral sistema (1). Ako je poznato n prvih integrala nezavisnih među sobom

$$\varphi_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n)=c_1,$$

$$(3)\qquad \varphi_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n)=c_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varphi_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)=c_n$$

onda oni predstavljaju *opšte integrale* sistema (1), rešenog po proizvoljnim konstantama. Pošto su ovi integrali linearno nezavisni, tj. pošto je

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}\neq 0$$

to se jednačine (3) mogu rešiti po x_i:

$$x_1=\psi_1(t, c_1, c_2, \dots, c_n),$$

$$x_2=\psi_2(t, c_1, c_2, \dots, c_n),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_n=\psi_n(t, c_1, c_2, \dots, c_n),$$

pa se tako dobijaju opšti integrali sistema (1).

Radi nalaženja prvih integrala često je zgodno napisati sistem (1) u simetričnom obliku i koristeći osobine proporcije naći neku jednostavnu integralnu kombinaciju.

Rešiti sledeće sisteme jednačina:

2544. $\dfrac{dy}{dx}=y+z+x,\quad \dfrac{dz}{dx}=-4y-3z+2x.$

2545. $\dfrac{dx}{dt}=x+2y+t,\quad \dfrac{dy}{dt}=2x+y+t.$

2546. $\dot{x}=y+2e^t,\ \dot{y}=x+t^2.$

2547. $\dot{x}=y-5\cos t,\ \dot{y}=2x+y.$

2548. $\dfrac{dx}{dt}=y+z.$ **2549.** $\dfrac{dy}{dx}=1-\dfrac{1}{z},\ \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{y-x}.$

$\dfrac{dy}{dt}=x+z.$

$\dfrac{dz}{dt}=x+y.$

2550. $\dfrac{d^2y}{dx^2}=z,\quad \dfrac{d^2z}{dx^2}=y.$ **2551.** $\ddot{x}=2y,\ \ddot{y}=-2x.$

2552. $\ddot{x}+x=\dot{y},\ 4\dot{x}+2x=\dot{y}+2y;$

$x(0)=0,\ y(0)=1,\ \dot{x}(0)=2,$

i proveriti da li rešenje ovog sistema zadovoljava jednačinu

$$(5x-2y)^2=4(y-2x).$$

2553. $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{dy}{dt}+x=e^t,$

$\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{d^2y}{dt^2}=1.$

2554. $2\ddot{x}+2\dot{x}+x+3\ddot{y}+\dot{y}+y=0,$

$\ddot{x}+4\dot{x}-x+3\ddot{y}+2\dot{y}-y=0$

2555. $6\ddot{x}-3\dot{x}+6x+\dot{y}=t,\ \ddot{x}+8x+y=0$

$x(0)=\dfrac{11}{36},\ y(0)=-\dfrac{22}{9},\ \dot{x}(0)=\dfrac{1}{6}$, i pokazati da je skup tačaka (x, y) rešenja datoga sistema jedna prava oblika $y=kx$.

2556. $\ddot{x}=3x-4\dot{y},\ \ddot{y}=3y+4\dot{x};\ x(0)=2,\ y(0)=2,\ \dot{x}(0)=0,\ \dot{y}(0)=0$

2557. $5\ddot{x}+5x+3\ddot{y}+3y+8\ddot{z}+8z=0,$

$\ddot{x}+4x+3\ddot{y}+12y+3\ddot{z}+12z=0,$

$\ddot{x}-2x-2\ddot{y}-11y-9z=0.$

Nalaženjem prvih integrala rešiti sisteme:

2558. $dx=\dfrac{dy}{y+z}=\dfrac{dz}{x+y+z}.$

2559. $\dfrac{dx}{dt}=y,\ \dfrac{dy}{dt}=x.$ 2560. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{y}{y-x},\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{x}{y-x}.$

2561. $\dfrac{dx}{dt}=x(y^2-z^2),$

$\dfrac{dy}{dt}=-y(x^2+z^2),$

$\dfrac{dz}{dt}=z(x^2+y^2).$

2562. $\dfrac{dx}{dt}=y-z,\ \dfrac{dy}{dt}=x^2+y,\ \dfrac{dz}{dt}=x^2+z.$ 2563. $\dfrac{dx}{y-z}=\dfrac{dy}{z-x}=\dfrac{dz}{y-x}$

2564. $\dfrac{dx}{xz}=\dfrac{dy}{yz}=\dfrac{dz}{-xy}.$ 2565. $\dfrac{dx}{y+z}=\dfrac{dy}{y+z}=\dfrac{dz}{x+y}.$

2566. $\dfrac{dx}{y-u}=\dfrac{dy}{z-x}=\dfrac{dz}{u-y}=\dfrac{du}{x-z}.$ 2567. $\dfrac{dx}{x+y^2+z^2}=\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dz}{z}.$

2568. $\dfrac{dx}{x(y+z)}=\dfrac{dy}{z(z-y)}=\dfrac{dz}{y(y-z)}.$

2569. $\dfrac{dx}{x^2}=\dfrac{dy}{xy-2z^2}=\dfrac{dz}{xz}.$

2570. $\dfrac{dx}{x(y^2-z^2)}=\dfrac{dy}{y(z^2+x^2)}=\dfrac{dz}{z(x^2+y^2)}.$ 2571. $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dz}{z-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$

2572. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{x-y}{z-t},\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{x-y}{z-t},\ \dfrac{dz}{dt}=x-y+1.$

2573. $\dfrac{dx}{y(x+y)}=\dfrac{-dy}{x(x+y)}=\dfrac{dz}{(x-y)(2x+2y+z)}.$

2574. $\dfrac{dx}{x^2-yz}=\dfrac{dy}{y^2-yz}=\dfrac{dz}{z(x+y)};\ z=-1,\ y=1$ za $x=0.$

2575. Proveriti da li su nezavisni prvi integrali

$$\frac{x+y}{z+x}=c_1,\quad \frac{z-y}{x+y}=c_2$$

sistema

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$$

2576. Materija A ra·'aže se na dve materije P i Q. Brzina nastajanja svake od njih propc.cionalna je količini neraspadnute marerije A. Naći zakon promene količine x i y materije P i Q u zavisnosti od vremena t, ako su jedan sat nakon početka procesa razlaganja x i y jednaka respektivno $\dfrac{a}{8}$ i $\dfrac{3a}{8}$, gde je a početna količina materije.

2577. Neke bakterije razmnožavaju se proporcionalno njihovoj početnoj količini, no u isto vreme proizvode otrov, koji ih uništava proporcionalno količini otrova i količini bakterija. Brzina proizvođenja otrova proporcionalna je prisutnoj količini bakterija. Pokazati da broj bakterija N u početku raste do neke najveće vrednosti M, a zatim opada do nule; u momentu t taj broj je određen formulom $N=\dfrac{M}{\mathrm{ch}^2\dfrac{kt}{2}}$, gde se vreme t meri od trenutka kada je $N=M$.

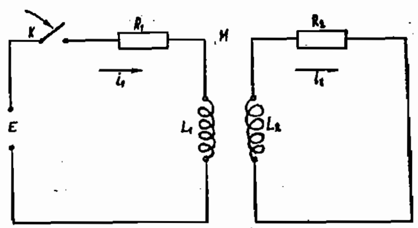
2578. Naći trajektoriju pokretne tačke, ako sila, koja izaziva kretanje, ima pravac normale na Oz osu i proporcionalna je rastojanju tačke od iste ose.

2579. Na izvor sa konstantnom elektromotornom silom E uključuje se strujno kolo, koje se sastoji iz dve induktivno spregnute konture sl. 10. Naći struje i_1 i i_2 u obema konturama u zavisnosti od vremena t, ako se uključivanje izvodi pri nultim početnim uslovima.

2580. Ako je V potencijal električnog polja, onda je jednačina kretanja naelektrisane čestice u vektorskom obliku

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=e\,\mathrm{grad}\ V+e\vec{H}\times\frac{d\vec{r}}{dt}$$

Naći kretanje čestice, smatrajući da su grad V i $\vec{H}$ konstantni.



Sl. 10

§ 7. Integracija sistema običnih linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima pomoću matrica

1° Normalni sistem jednačina

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k+f_i(t)\quad (i=1,2,\ldots n)$$

možemo kraće napisati u obliku matrične diferencijalne jednačine

$$\frac{dX}{dt}=AX+F$$

pri čemu je:

$A=[a_{ik}]_1^n$; a_{ik} — realne ili kompleksne konstante;

$$X=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\ \vdots\\x_n(t)\end{bmatrix};\quad \frac{dX}{dt}=\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}\quad\left(\frac{dx_i}{dt}=\dot{x}_i\right)$$

$$F=\begin{bmatrix}f_1(t)\\f_2(t)\\ \vdots\\f_n(t)\end{bmatrix};\ \underset{\alpha\le t\le\beta}{f_i(t)}\ \text{— date neprekidne funkcije.}$$

2° Jedan postupak rešavanja homogenog i nehomogenog sistema diferencijalnih jednačina.

a) $$\frac{dX}{dt}=AX\Leftrightarrow\frac{dx_i}{dt}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k\quad (i=1,2,\ldots,n)$$

Neka je $X=A_a e^{\lambda t}$; $A_a=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}$, pri čemu su λ i α_i $(i=1,2,\ldots n)$ neodređeni parametri. Iz zahteva da matrična funkcija X skalarnog argumenta t bude rešenje jednačine a), dobijamo

$$(A-\lambda E)A_a e^{\lambda t}\equiv 0$$

odnosno $(A-\lambda E)A_a=0$, E — jedinična matrica reda n. Toj matričnoj jednačini ekvivalentan je sistem homogenih linearnih jednačina

$$(*)\qquad\begin{aligned}&(a_{11}-\lambda)\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\cdots+a_{1n}\alpha_n=0,\\&a_{21}\alpha_1+(a_{22}-\lambda)\alpha_2+\cdots+a_{2n}\alpha_n=0\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&a_{n1}\alpha_1+a_{n2}\alpha_2+\cdots+(a_{nn}-\lambda)\alpha_n=0.\end{aligned}$$

Da bi taj sistem imao netrivijalna rešenja $(A_a\neq 0)$ potrebno je i dovoljno da karakteristična matrica $A-\lambda E$ bude singularna, odnosno da je $\det(A-\lambda E)=0$. Neka su $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ koreni te jednačine (sopstvene vrednosti matrice A).

1. Pretpostavimo da su svi koreni λ_i $(i=1,2,\ldots n)$ međusobno različiti. Pošto je rang $(A-\lambda_i E)=n-1$ to se sistem (*) svodi na sistem od $n-1$ jednačine sa n nepoznatih. Stavljajući, na primer, da je $\alpha_n=1$ i uzimajući u obzir pri tome da su sva ostala rešenja α_{ji} $(j=1,2,\ldots n-1)$ jednoznačno određena, dobijamo

$$A_a^{(i)}=\begin{bmatrix}\alpha_{1i}\\ \alpha_{2i}\\ \vdots\\ \alpha_{ni}\end{bmatrix};\quad (i=1,2,\ldots n;\ \alpha_{ni}=1)$$

odnosno

$$X_i=A_a^{(i)}e^{\lambda_i t}.$$

Prema tome opšte rešenje homogenog sistema glasi

$$X=\sum_{k=1}^{n}c_kX_k=\sum_{k=1}^{n}c_kA_a^{(k)}e^{\lambda_k t}\ (c_k\ \text{— neodređene konstante) ili, u skalarnom obliku}$$

$$x_i(t)=\sum_{k=1}^{n}c_k\alpha_{ik}e^{\lambda_k t}=\sum_{k=1}^{n}c_kx_{ik};\quad (i=1,2,\ldots n)$$

2. Neka je λ_i koren karakteristične jednačine reda m $(2<m<n)$. Struktura korespondentnog rešenja X_i zavisiće neposredno od ranga karakteristične matrice $A-\lambda_i E$. Moguća su dva slučaja:

1) ako je rang $(A-\lambda_i E)=n-m$ tada je $X_i=A_a^{(i)}e^{\lambda_i t}$.

2) ukoliko je rang $(A-\lambda_i E)>n-m$ odgovarajuće rešenje treba tražiti u obliku

$$X_i=(A_a^{(1)}+A_a^{(2)}t+A_a^{(3)}t+\cdots+A_a^{(m)}t^{m-1})e^{\lambda_i t}$$

pri čemu su

$$A_a^{(p)}=\begin{bmatrix}\alpha_{1p}\\ \alpha_{2p}\\ \vdots\\ \alpha_{np}\end{bmatrix};\quad (p=1,2,\ldots m)$$

jednokolone matrice sa neodređenim elementima.

b) $$\frac{dX}{dt}=AX+F\Leftrightarrow x_i(t)=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k+f_i(t);\quad (i=1,2,\ldots n).$$

Neka je $X_h = \sum_{k=1}^{n} c_k X_k$ opšte rešenje homogenog dela jednačine. Pri tome je

$$\frac{dX_k}{dt} - AX_k = 0; \quad (k=1, 2, \dots n)$$

Mesto neodređenih konstanata c_k, uvodimo nepoznate funkcije $c_k(t)$, koje ćemo odrediti iz uslova da matrična funkcija

$$X = \sum_{k=1}^{n} c_k(t) X_k$$

bude opšte rešenje posmatrane matrične diferencijalne jednačine b).

Iz jednačine

$$\frac{dX}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{dc_k}{dt} X_k + \sum_{k=1}^{n} c_k(t) \frac{dX_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n} c_k(t) AX_k + F$$

odnosno

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{dc_k}{dt} X_k + \sum_{k=1}^{n} c_k(t)\left(\frac{dX_k}{dt} - AX_k\right) = F$$

sledi

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{dc_k}{dt} X_k = F$$

ili, u skalarnom obliku

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{dc_k}{dt} x_{ik} = f_i(t) \quad (i=1, 2, \dots n)$$

Pošto je determinata tog sistema različita od nule za svako t segmenta $[\alpha, \beta]$ (determinanta Vronskog), to će njegova rešenja $\frac{dc_k}{dt}$ biti jednoznačno određene neprekidne funkcije, oblika

$$\frac{dc_k}{dt} = \varphi_k(t), \quad (k=1, 2, \dots n)$$

Integracijom dobijamo

$$c_k(t) = \int \varphi_k(t)\, dt + D_k$$

$$c_k(t) = \psi_k(t) + D_k$$

D_k — neodređene integracione konstante, $\psi_k(t) = \int \varphi_k(t)\, dt$; $(k=1, 2, \dots n)$

Stoga će opšte rešenje nehomogenog sistema linearnih diferencijalnih jednačina biti

$$X = \sum_{k=1}^{n} D_k X_k + \sum_{k=1}^{n} \psi_k(t) X_k$$

odnosno, u skalarnoj formi

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^{n} D_k x_{ik}(t) + \sum_{k=1}^{n} \psi_k(t) x_{ik}(t); \quad (i=1, 2, \dots n)$$

Ako karakteristična jednačina $[\det(A-\lambda E)=0]$ ima kompleksne korene, na primer $\lambda_1 = a + bi$ $(i=\sqrt{-1})$ tada se odgovarajuće rešenje $A_a^{(1)} e^{\lambda_1 t}$ matrične diferencijalne jednačine $\frac{dX}{dt} = AX$ može napisati u obliku

$$A_a^{(1)} e^{\lambda_1 t} = X_1 + iX_2$$

pri čemu je

$$X_i = \begin{bmatrix} (x_{1i}(t)) \\ (x_{2i}(t)) \\ \vdots \\ (x_{ni}(t)) \end{bmatrix}; \quad (i=1,2).$$

Pod pretpostavkom da su koeficijenti sistema diferencijalnih jednačina realni, lako se može pokazati da su vektorske funkcije X_i $(i=1, 2)$ linearno nezavisna rešenja, korespondentna sopstvenim vrednostima $\lambda_1 = a+bi$, $\lambda_2 = a-bi$.

Rešiti sledeće sisteme diferencijalnih jednačina:

2581. $\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 - x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + 2x_2 - 5e^t \sin t.$

2582. $\frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_2.$

2583. $\frac{dx_1}{dt} = x_1 - 5x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 - x_2.$

2584. $\frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 + x_3, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2 - x_3, \quad \frac{dx_3}{dt} = 2x_1 - x_2.$

2585. $\frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 - x_3 \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2, \quad \frac{dx_3}{dt} = 3x_1 + x_3.$

2586. $\frac{dx_1}{dt} = 4x_1 - x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = 3x_1 + x_2 - x_3, \quad \frac{dx_3}{dt} = x_1 + x_3$

2587. $\frac{dx_1}{dt} = x_2 + x_3, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_3, \quad \frac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2.$

2588. $\frac{dx}{dt} = z + y - x, \quad \frac{dy}{dt} = x + z - y, \quad \frac{dz}{dt} = x + y + z; \quad x\big|_{t=0} = 1, \; y\big|_{t=0} = z\big|_{t=0} = 0$

2589. $\dfrac{dx}{dt}=2x+y-2z-t+2,\quad \dfrac{dy}{dt}=1-x,\quad \dfrac{dz}{dt}=x+y-z-t+1.$

2590. $\dot{x}=3x-4y+e^{-2t},\quad y=x-2y-3e^{-2t}.$

2591. $\dot{x}=x+2y,\quad \dot{y}=x-5\sin t.$

2592. $\dot{x}=x+y+1+e^{t},\quad \dot{y}=3x-y.$

2593. $\dot{x}=4x-3y+\sin t,\quad \dot{y}=2x-y-2\cos t.$

2594. $\dot{x}=2x+y+2e^{t},\quad \dot{y}=x+2y-3e^{4t}.$

2595. $\dot{x}=x-y+8t,\quad \dot{y}=5x-y.$

2596. $\dot{x}=3x-\dfrac{1}{2}y-3t^2-\dfrac{1}{2}t+\dfrac{3}{2},\quad \dot{y}=2y-2t-1.$

2597. $\dot{x}=2y-x,\quad \dot{y}=4y-3x+\dfrac{e^{3t}}{e^{2t}+1}.$

2598. $\dot{x}=-4x-2y+\dfrac{2}{e^{t}-1},\quad \dot{y}=6x+3y-\dfrac{3}{e^{t}-1}.$

2599. $\dot{x}=x-y+\dfrac{1}{\cos t},\quad \dot{y}=2x-y.$

2600. $\dot{x}=3x-2y,\quad \dot{y}=2x-y+15e^{t}\sqrt{t}.$

2601. $\dot{x}=3x+8y,\quad \dot{y}=-3y-x;\quad x(0)=6,\quad y(0)=-2.$

2602. $\dot{x}=-4(x+y),\quad \dot{y}=-y-\dfrac{1}{4}\dot{x};\quad x(0)=1,\ y(0)=0.$

2603. $\dot{x}=x+y+t,\quad \dot{y}=x-2y+2t;\ x(0)=-\dfrac{7}{9},\ y(0)=-\dfrac{5}{9}.$

2604. $\dot{x}+2\dot{y}=17x+8y,\quad 13\dot{x}=53x+2y;\quad x(0)=2,\ y(0)=-1.$

2605. $\dot{x}=y,\quad \dot{x}-\dot{y}=x+y;\quad x(\pi)=-1,\ y(\pi)=0.$

2606. $t\dot{x}-x-3y=t,\quad t\dot{y}-x+y=0.$

Uputstvo. Smenom $t=e^{\xi}$ transformisati dati sistem u sistem sa konstantnim koeficijentima.

2607. $t\dot{x}+6x-y=0,\quad t\dot{y}+20x-6y=0.$

2608. $\dot{x}=y,\quad \dot{y}=z,\quad \dot{z}=x.$

2609. $\dot{x}=-x+y,\quad \dot{y}=-y+4z,\quad \dot{z}=x-4z.$

2610. $\dot{x}=x-2y-z,\quad \dot{y}=y-x+z,\quad \dot{z}=x-z.$

2611. $\dot{x}=2x-y+z,\quad \dot{y}=2y+x-z,\quad \dot{z}=x-y+2z.$

2612. $\dot{x}=3x-y+z,\quad \dot{y}=x+y+z,\quad \dot{z}=4x-y+4z.$

2613. $\dot{x}=4y-2z-3x,\quad \dot{y}=z+x,\quad \dot{z}=6x-6y+5z.$

2614. $\dot{x}=2x+2z-y,\quad \dot{y}=x+2z,\quad \dot{z}=y-2x-z.$

2615. $\dot{x}=4x-y-z,\quad \dot{y}=x+2y-z,\quad \dot{z}=x-y+2z.$

2616. $\dot{x}=2x-y-z,\quad \dot{y}=3x-2y-3z,\quad \dot{z}=2z-x+y.$

2617. $\dot{x}=y-2x-2z,\quad \dot{y}=x-2y+2z,\quad \dot{z}=3x-3y+5z.$

2618. $\dot{x}=3x-2y-z,\quad \dot{y}=3x-4y-3z,\quad \dot{z}=2x-4y.$

2619. $\dot{x}=x-y+z,\quad \dot{y}=x+y-z,\quad \dot{z}=2z-y.$

2620. $\dot{x}=y-2z-x,\quad \dot{y}=4x+y,\quad \dot{z}=2x+y-z.$

2621. $\dot{x}=6x-72y+44z,\quad \dot{y}=4x-43y+26z,\quad \dot{z}=6x-63y+38z.$

2622. $\dot{x}=4y+z,\quad \dot{y}=z,\quad \dot{z}=4y.$

2623. $\dot{x}=y+z,\quad \dot{y}=3x+z,\quad \dot{z}=3x+y.$

2624. $\dot{x}=8y,\quad \dot{y}=-2z,\quad \dot{z}=2x+8y-2z$

2625. $\dot{x}=-2x-2y-4z,\quad \dot{y}=-2x+y-2z,\quad \dot{z}=5x+2y+7z.$

2626. $\dot{x}=x+y+z,\quad \dot{y}=y+z,\quad \dot{z}=x.$

2627. $\dot{x}=2x-y+z,\quad \dot{y}=x+z,\quad \dot{z}=-3x+y-2z.$

2628. $\dot{x}=y-z-t+3,\quad \dot{y}=7-2z,\quad \dot{z}=2y-2t.$

2629. $3t\dot{x}=2x+y-z,\quad 2t\dot{y}=x+3y+z,\quad 6t\dot{z}=-x+7y+5z.$

2630. $t\dot{x}=4x+y+2z-\sin t-2\cos t,$

$t\dot{y}=-2x+y-2z-\sin t+2\cos t+t\cos t,$

$t\dot{z}=-x-y+z+\sin t-\cos t-t\sin t.$

§ 8. Problem stabilnosti rešenja sistema diferencijalnih jednačina

1° Ako je dat sistem jednačina

(1) $$\frac{dy_i}{dt}=f_i(t, y_1, y_2, \ldots y_n) \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

uz početne uslove $y_i(t_0)=y_{i0}$ $(i=1, 2, \ldots n)$ pri čemu izvodi $\dfrac{\partial f}{\partial y_k}$ $(i, k=1, 2, \ldots n)$ postoje i neprekidni su, onda se rešenje sistema (1) naziva ***stabilno po Ljapunovu***, ako se za svako $\varepsilon>0$ može naći tako $\delta(\varepsilon)>0$ da za svako rešenje $y_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots n)$ čije početne vrednosti zadovoljavaju uslov

$$|y_i(t_0)-\varphi_i(t_0)|<\delta(\varepsilon) \quad (i=1, 2, \ldots n)$$

za svako $t>t_0$, važi nejednakost

(2) $$|y_i(t)-\varphi_i(t)|<\varepsilon \quad (i=1, 2, \ldots n)$$

tj. rešenja bliska za početne vrednosti ostaju bliska za svako $t>t_0$.
Ako za proizvoljno malo $\delta>0$, makar za jedno rešenje $y_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots n)$ nejednakost (2) nije ispunjena, onda se rešenje $\varphi_i(t)$ naziva ***nestabilno***.

Ako je rešenje $\varphi_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots n)$ ne samo stabilno, već sem toga zadovoljava i uslov

(3) $$\lim_{t\to\infty}|y_i(t)-\varphi_i(t)|=0,$$

onda se rešenje $\varphi_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots n)$ naziva ***asimptotski stabilno***. Treba napomenuti da samo iz uslova (3) ne sledi stabilnost rešenja $\varphi_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Problem stabilnosti rešenja $\varphi_i(t)$ sistema (1) može biti sveden na problem stabilnosti trivijalnog rešenja $x_i(t)\equiv 0$ nekog novog sistema jednačina, dobijenog iz sistema (1) linearnom zamenom tražene funkcije

(4) $$x_i(t)=y_i(t)-\varphi_i(t) \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

gde su $x_i(t)$ nove nepoznate funkcije, jednake odstupanju prvobitnih nepoznatih funkcija $y_i(t)$ od funkcija $\varphi_i(t)$, koje definišu traženo rešenje. Otuda ćemo smatrati, da se zapravo ispituje trivijalno rešenje $x_i(t)\equiv 0$ ili što je isto, tačka mirovanja smeštena u koordinatnom početku sistema jednačina

(5) $$\frac{dx_i}{dt}=\psi_i(t, x_1, x_2, \ldots x_n) \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Primenjeni na tačku mirovanja $x_i(t)\equiv 0$ $(i=1, 2, \ldots n)$ uslovi stabilnosti su:

Tačka mirovanja $x_i(t)\equiv 0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ sistema (5) ***stabilna je po Ljapunovu***, ako za svako $\varepsilon>0$ možemo izabrati $\delta(\varepsilon)>0$ tako da iz nejednakosti $|x_i(t_0)|<\delta(\varepsilon)$ $(i=1, 2, \ldots n)$ sledi $|x_i(t)|<\varepsilon$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ sa $t>T>t_0$

2° **Prostiji tipovi tačaka mirovanja.** Tačke mirovanja ili ***singularne tačke*** sistema

(6) $$\frac{dx}{dt}=P(x, y), \quad \frac{dy}{dt}=Q(x, y)$$

ili jednačine

(7) $$\frac{dy}{dx}=\frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

gde su P i Q neprekidno diferencijabilne funkcije, naziva se takva tačka, u kojoj je $P(x, y)=0$ i $Q(x, y)=0$.
Radi ispitivanja singularnih tačaka sistema

(8) $$\frac{dy}{dt}=ax+by, \quad \frac{dy}{dt}=cx+dy,$$

ili jednačine

(9) $$\frac{dy}{dx}=\frac{cx+dy}{ax+by}$$

treba naći korene karakteristične jednačine

(10) $$\begin{vmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{vmatrix}=0$$

U zavisnosti od priroode korena ove jednačine treba da razlikujemo moguće slučajeve.

I. *Koreni karakteristične jednačine su realni i različiti.* Mogućnosti: 1) $k_1<0, k_2<0$. Tačka mirovanja je simptotski stabilna i naziva se *stabilni uzao.* 2) $k_1>0, k_2>0$. Tačka mirovanja je nestabilna (*nestabilni uzao*) 3) $k_1>0, k_2<0$. Tačka mirovanja je nestabilna i naziva se *sedlo.*

II. *Koreni karakteristične jednačine su kompleksni* $k_1=\alpha+\beta_i, k_2=\alpha-\beta_i$. Mogućnosti: 1) $\alpha<0$, $\beta\neq 0$. Tačka mirovanja je simptotski stabilna (*stabilni fokus*). 2) $\alpha>0$, $\beta\neq 0$. Tačka mirovanja je nestabilna (*nestabilni fokus*). 3) $\alpha=0$, $\beta\neq 0$. Tačka mirovanja je stabilna (*centar*). Nije asimptotski stabilna.

III. *Koreni su višestruki*: $k_1=k_2$. Mogućnosti: 1) $k_1=k_2<0$. Tačka mirovanja je asimptotski stabilna i naziva se *stabilni uzao.* 2) $k_1=k_2>0$. Tačka mirovanja je nestabilna (*nestabilni uzao*).

Treba primetiti ako oba korena karakteristične jednačine (10) imaju negativan realni deo, onda je tačka mirovanja asimptotski stabilna. Ako pak bilo koji koren karakteristične jednačine (10) ima pozitivan realni deo onda je tačka mirovanja nestabilna.

Analogna tvrđenja su tačna i za sisteme linearnih homogenih jednačina sa konstantnim koeficijentima

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad (i=1,\,2,\ldots,\,n). \tag{11}$$

3° Ispitivanje stabilnosti postupkom prve aproksimacije. Pretpostavimo da su na desnoj strani jednakosti (1) diferencijabilne funkcije u okolini koordinatnog početka i $f_i(t,\,0,\,0,\ldots,\,0)\equiv 0$. Da bismo ispitali stabilnost tačke mirovanja $x_i\equiv 0$ $(i=1,\,2,\ldots,n)$ sistema (1) pretpostavimo taj sistem u okolini koordinatnog početka u obliku

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\,x_j+R_i(t,\,x_1,\,x_2,\ldots,\,x_n) \quad (i=1,2,\ldots,\,n) \tag{12}$$

gde je R_i reda višeg od jedan u odnosu na $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ (tj. faktički razvijamo desnu stranu sistema (1) po Taylorovoj formuli po stepenima od x u okolini koordinatnog početka). Umesto tačke mirovanja sistema (1) ispitujemo tu istu tačku mirovanja linearnog sistema

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\,x_j \quad (i=1,\,2,\ldots,\,n) \tag{13}$$

koji nazivamo sistem jednačina prve aproksimacije sistema (1). Radi uprošćavanja, ograničavamo se na slučaj, kada su koeficijenti $a_{ij}(t)$ u (13) konstantni. U tom slučaju se kaže da je sistem (12) *stacionaran u prvoj aproksimaciji.*

Teorema 1. *Ako je sistem jednačina* (12) *stacionaran u prvoj aproksimaciji, svi članovi R_i ograničeni po t, razlažu se u red po stepenima $x_1,\ldots,\,x_n$ u nekoj oblasti $\sum_{i=1}^{n} x_i^2<H$, pri čemu razvoj počinje članom koji nije nižeg reda od dva, a svi koreni karakteristične jednačine*

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn}-k \end{vmatrix}=0 \tag{14}$$

imaju negativne realne delove, onda su trivijalna rešenja $x_i\equiv 0$ $(i=1,\,2,\ldots,\,n)$ asistem (12) i (13) asimptotski stabilna tj. u tom slučaju moguće je ispitivati stabilnost po prvoj aproksimaciji.

Teorema 2. *Ako je sistem jednačina* (12) *stacionaran u prvoj aproksimaciji, sve funkcije R_i zadovoljavaju uslove teoreme 1 i bar jedan koren karakteristične jednačine* (14) *ima pozitivan realni deo, onda je tačka mirovanja $x_i\equiv 0$ $(i=1,\,2,\ldots,\,n)$ sistema* (12) *i* (13) *nestabilna, tj. u tom slučaju je moguće ispitivati stabilnost po prvoj aproksimaciji.*

Treba primetiti, ako realni delovi svih korena karakteristične jednačine (14) nisu pozitivni, pri čemu je realni deo bar jednog korena jednak nuli, onda je ispitivanje stabilnosti po prvoj aproksimaciji, u opštem slučaju, nemoguće, pošto u tom slučaju počinju da utiču članovi R_i.

4° Raus-Hurwitzov kriterijum. Poznato je da je trivijalno rešenje linearne jednačine sa konstantnim realnim koeficijentima

$$a_0\,y^{(n)}+a_1\,y^{(n-1)}+\cdots+a_n\,y=0 \quad (\text{gde su } a_0,\,a_1,\ldots,\,a_n \text{ konstante}) \tag{15}$$

asimptotski stabilno, ako svi koreni karakteristične jednačine imaju negativan realni deo. Otuda veliki praktičan značaj dobijaju potrebni i dovoljni uslovi da bi svi koreni algebarske jednačine sa realnim koeficijentima

$$f(r)\equiv a_0\,r^n+a_1\,r^{n-1}+\cdots+a_{n-1}r+a_n=0 \tag{16}$$

imali negativan realni deo. Ne narušavajući opštost, možemo pretpostaviti da je $a_0>0$, nije se teško ubediti da je pozitivnost svih koeficijenata potreban ali ne i dovoljan uslov, da bi svi koreni jednačine (16) bili levo od ordinatne ose (u slučaju jednačina prvog i drugog stepena ti uslovi su i dovoljni). Potrebne i dovoljne uslove daje Raus-Gurvicova teorema.

Teorema 3. *Da bi svi koreni jednačine* (16) *imali negativan realni deo, potrebno je i dovoljno da budu pozitivni svi glavni dijagonalni minori Hurwitzove matrice.*

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \tag{17}$$

Glavni dijagonalni elementi Hurwitzove matrice su

$$\Delta_1=a_1,\ \Delta_2=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix},\ldots,$$

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots\cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & a_n \end{vmatrix}$$

Na taj način Gurvicovi uslovi su:

$$\Delta_1>0,\ \Delta_2>0,\ldots,\ \Delta_n>0. \tag{18}$$

Pošto je $\Delta_n=\Delta_{n-1}$, to zadnji uslov $\Delta_n>0$ može biti zamenjen zahtevom da je $a_n>0$.

Polazeći od definicije stabilnosti ispitati stabilnost rešenja sledećih diferencijalnih jednačina:

2631. $\dfrac{dy}{dx}=-a^2y,\ a\neq 0,\ y(t_0)=y_0$

2632. $\frac{dy}{dt}=a^2y,\ a\neq 0,\ y(t_0)=y_0.$

2633. $\frac{dx}{dt}=t-x;\ x(0)=1.$

2634. $\frac{dx}{dt}=4y,\quad \frac{dy}{dt}=-x;\ x(0)=y(0)=0$

Ispitati singularne tačke sledećih jednačina i sistema:

2635. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{2x}.$ 2636. $\frac{dy}{dx}=\frac{4x-3y}{x-2y}.$

2637. $y'=\frac{2x+y}{3x+4y}.$ 2638. $y'=\frac{y-2x}{y}.$

2639. $y'=\frac{4y-2x}{x+y}.$ 2640. $y'=\frac{y}{x}.$

2641. $\dot{x}=x+3y,\quad \dot{y}=-6x-5y.$ 2642. $\dot{x}=x,\quad \dot{y}=2x-y.$

2643. $\dot{x}=3x-2y\quad \dot{y}=4y-6x.$

2644. $y'=\frac{2y-x}{3x+6}.$ 2645. $y''=\frac{2x+y}{x-2y-5}.$

2646. $y'=\frac{2x}{1-x^2-y^2}.$ 2647. $y'=\frac{y^2-x^2}{2(x-1)(y-2)}.$

2648. $y'=\frac{x(2y-x+5)}{x^2+y^2-6x-8y}.$

Ispitati karakter tačke mirovanja (0, 0) u sledećim sistemima:

2649. $\frac{dx}{dt}=x-y,\ \frac{dy}{dt}=2x+3y.$

2650. $\frac{dx}{dt}=2y-z,\ \frac{dy}{dt}=3x-2z,\ \frac{dz}{dt}=5x-4y.$

2651. $\dot{x}=-2x-3y,\ \dot{y}=x+y.$

2652. $\dot{x}=-3x+\frac{7}{2}y,\ \dot{y}=-x+y.$

2653. $\dot{x}=-x+2y,\quad \dot{y}=-2x+3y.$

2654. $\dot{x}=3x+2y,\ \dot{y}=x+y.$

2655. $\dot{x}=x-y-z,\ \dot{y}=x+y-3z,\ \dot{z}=x-5y-3z.$

2656. $\dot{x}=2x+3y,\ \dot{y}=x-y.$

2657. $\dot{x}=3x-5y,\ \dot{y}=2x-3y.$

2658. $\dot{x}=x-\frac{1}{2}y,\ \dot{y}=\frac{53}{2}x-y.$

2659. $\dot{x}=x+y,\ \dot{y}=-x+y.$

2660. $\dot{x}=2x-y+2z,\ \dot{y}=5x-3y+3z,\ \dot{z}=-x-2z.$

2661. $\dot{x}=x-3y+4z,\ \dot{y}=4x-7y+8z,\ \dot{z}=6x-7y-7z.$

2662. Za koju vrednost parametra α sistem

$$\dot{x}=y+\alpha x,\ \dot{y}=-\dot{x}$$

ima stabilnu tačku mirovanja?

2663. Za koju je vrednost parametra α tačka mirovanja (0, 0, 0) sistema

$\dot{x}=\alpha x-y,\ \dot{y}=\alpha y-z,\ \dot{z}=\alpha z-x$ stabilna?

2664. Dokazati, ako je singularna tačka jednačine

$$(ax+by)\,dx+(mx+ny)\,dy=0$$

centar, da je onda to jednačina totalnog diferencijala. Obrnuto tvrđenje nije tačno.

2665. Data je jednačina

$$y'=\frac{ax+by+f(x,y)}{cx+dy+\varphi(x,y)},$$

gde su funkcije f i φ definisane i neprekidne u nekoj okolini tačke (0, 0), a u samoj tački (0, 0) je

$$f=f_x'=f_y'=\varphi=\varphi_x'=\varphi_y'=0.$$

Dokazati, ako se data jednačina ne menja zamenjujući y sa $-y$, a koreni karakteristične jednačine

$$\begin{vmatrix} c-\lambda & d \\ a & b-\lambda \end{vmatrix}=0$$

su čisto imaginarni, da je singularna tačka centar.

Ispitati stabilnost po prvoj aproksimaciji tačke mirovanja (0, 0) sledećih sistema;

2666. $\dot{x}=-x+y+2x^4-y^6,\quad \dot{y}=x-3y+11y^4.$

2667. $\dot{x}=-x+2y-3x^2,\quad \dot{y}=3x-2y+2x^2+y^4.$

2668. $\dot{x}=-\sin x+3y+x^5,\quad \dot{y}=\frac{1}{4}x-2y-\frac{1}{6}y^3$

2669. $\dot{x}=-3x+4y+\sin^3 x-y^2,\quad \dot{y}=-2x+\sin y+e^y x^2.$

2670. $\dot{x}=e^{x+2y}-\cos 3x,\quad \dot{y}=\sqrt{4+8x}-2e^y.$

2671. $\dot{x}=\ln(4y+e^{-3x})\quad \dot{y}=2y-1+\sqrt[3]{1-6x}$

2672. $\dot{x}=2x+8\sin y,\quad \dot{y}=2-e^x-3y-\cos y.$

2673. $\dot{x}=-4x+\frac{7}{2}\sin y-3x^2,\quad \dot{y}=-2x+x^2+y+y^3$

2674. $\dot{x}=-4y-x^3,\quad \dot{y}=3x-y^3.$

2675. $\dot{x}=10\sin x-29y+3y^3,\quad \dot{y}=5x-14\sin y+y^2.$

2676. Proveriti da li je trivijalno rešenje nekog sistema jednačina stabilno po Ljapunovu, ako je poznato da opšte rešenje tog sistema ima oblik

$$x=\frac{c_1-c_2 t}{1+t^2},\quad y=(c_1 t^3+c_2)e^{-t}.$$

2677. Dokazati da je potrebno i dovoljno da

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^t a(s)\,ds<+\infty$$

pa da trivijalno rešenje jednačine

$$\frac{dx}{dt}=a(t)x,$$

gde je $a(t)$ neprekidna funkcija, bude stabilno po Ljapunovu.

2678. Dokazati, ako je jedno koje bilo rešenje sistema diferencijalnih jednačina stabilno po Ljapunovu, da su onda stabilna sva rešenja toga sistema.

Ispitati stabilnost trivijalnog rešenja sledećih jednačina:

2679. $y^{V}+y^{IV}+7y'''+4y''+10y'+3y=0.$

2680. $y^{IV}+7y'''+12y''+23y'+10y=0.$

2681. $y^{IV}+y'''+3y''+2y'+y=0.$

2682. $y^{V}+2y^{IV}+3y'''+2y''+y'+y=0.$

Za koje će vrednosti parametra α biti stabilna trivijalna rešenja sledećih jednačina:

2683. $y'''+\alpha y''+2y'+y=0.$

2684. $y^{IV}+2y'''+y''+\alpha y'+3y=0.$

2685. $y^{IV}+3y'''+\alpha y''+2y'+y=0.$

2686. Za koju će vrednost parametra α trivijalno rešenje $x=0;\ y=0;\ z=0$ sistema diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx}{dt}=z,\quad \frac{dy}{dt}=-3x,\quad \frac{dz}{dt}=\alpha x+2y-3$$

biti asimptotski stabilno?

Za koje su vrednosti parametra α i β stabilna trivijalna rešenja sledećih jednačina:

2687. $y'''+\alpha y''+2y'+\beta y=0$

2688. $y'''+\alpha y''+\beta y'+3y=0$

2689. $y^{IV}+\alpha y'''+2y''+\beta y'+y=0$

§ 9. Numeričke metode integracije običnih diferencijalnih jednačina

1° **Metod uzastopnih aproksimacija ili Picardov metod.** Neka je data diferencijalna jednačina prvog reda

(1) $$y'=f(x, y)$$

sa početnim uslovima $y(x_0)=y_0$.

Rešenje $y(x)$ jednačine (1), koje zadovoljava date početne uslove, u opštem slučaju, može biti predstavljeno u obliku

(2) $$y(x)=\lim_{i\to\infty} y_i(x)$$

gde su *uzastopne aproksimacije* $y_i(x)$ definisane formulama

$$y_0(x)=y_0$$

$$y_i(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x, y_{i-1}(x))\,dx\quad (i=1, 2, \dots)$$

Ako je desna strana $f(x, y)$ definisana i neprekidna u okolini

$$R\{|x-x_0|\le a,\ |y-y_0|\le b\}$$

i u okolini zadovoljava *Lipschitzov uslov*

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|<L\,|y_1-y_2|$$

gde je L konstanta, onda niz uzastopnih aproksimacija (2) obavezno konvergira u intervalu

$$|x-x_0|<h$$

gde je $h=\min\limits_R\left(a,\ \dfrac{b}{M}\right)$ i $M=\max\limits_R|f(x,y)|$. Pri tome je greška

$$R_n=|y(x)-y_n(x)|<ML^n\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!},$$

samo ako je $|x-x_0|<h$.

1. Metod uzastopnih aproksimacija može se primeniti na sistem diferencijalnih jednačina

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{2'}$$

gde je

$$y(x_0)=y_0.$$

Zapisujući vektorsku jednačinu (2') u integralnom obliku, imamo

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y)\,dx$$

gde se pod integralom vektor-funkcije

$$f=\begin{bmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_n\end{bmatrix}$$

podrazumeva vektor

$$\int_{x_0}^{x}f\,dx=\begin{bmatrix}\int_{x_0}^{x}f_1\,dx\\ \vdots\\ \int_{x_0}^{x}f_n\,dx\end{bmatrix}$$

Uzastopne aproksimacije $y^{(p)}$ $(p=1,2,\ldots)$ određuju se po formuli

$$y^{(p)}=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y^{(p-1)})\,dx,$$

pri čemu se obično stavlja $y^{(0)}\equiv y_0$.

Ovaj metod je pogodan takođe i za diferencijalnu jednačinu n-og reda, ako se ona zapiše u obliku sistema.

2° Metod Runge-Kutta. Neka je potrebno u datom intervalu $x_0<x<X$ naći rešenje $y(x)$ jednačine (1) sa zadatim stepenom tačnosti ε.

Radi toga izaberimo u početku *korak* računanja $h=\dfrac{X-x_0}{n}$, deleći interval $[x_0, X]$ na n jednakih delova tako da bude $h^4<\varepsilon$. Tačke podele x_i određuju se po formuli

$$x_i=x_0+ih \quad (i=1,2,\ldots,n).$$

Odgovarajuće vrednosti $y_i=y(x_i)$ tražene funkcije po Runge-Kuttovoj metodi izračunavaju se uzastopno po formulama

$$y_{i+1}=y_i+\Delta y_i,$$

$$\Delta y_i=\frac{1}{6}\left(k_1^{(i)}+2k_2^{(i)}+2k_3^{(i)}+k_4^{(i)}\right),$$

gde je

$$\begin{aligned}
&k_1^{(i)}=f(x_i,\ y_i)\,h,\\
&k_2^{(i)}=f\left(x_i+\frac{h}{2},\ y_i+\frac{k_1^{(i)}}{2}\right)h,\\
&k_3^{(i)}=f\left(x_i+\frac{h}{2},\ y_i+\frac{k_2^{(i)}}{2}\right)h,\\
&k_4^{(i)}=f\left(x_i+h,\ y_i+k_3^{(i)}\right)h
\end{aligned} \tag{3}$$

Radi kontrole pravilnog izbora koraka h preporučljivo je izvršiti proveru veličine

$$\theta=\left|\frac{k_2^{(i)}-k_3^{(i)}}{k_1^{(i)}-k_2^{(i)}}\right|$$

Razlomak mora činiti nekoliko stotih, u protivnom slučaju korak h treba smanjiti.

Runge-Kuttov metod ima red tačnosti h^4. Grubu ocenu greške Runge-Kuttove metode na datom intervalu $[x_0, X]$ možemo dobiti polazeći od Rungeovog principa:

$$R=\frac{|y_{2m}-\tilde{y}_m|}{15}$$

gde je $n=2m$, a y_{2m} i $\tilde{y}_m$ rezultati dobijeni po šemi (3) respektivno sa korakom h i $2h$.

Metod Runge-Kutta primenjuje se takođe za približno rešavanje sistema običnih diferencijalnih jednačina. Neka je dat sistem diferencijalnih jednačina (2').

Usvajajući neki korak h i uvodeći standardne oznake $x_i=x_0+ih$ i $y_i=y_i(x_i)$, $\Delta y_i=y_{i+1}-y_i$ za $i=0, 1, 2\ldots$, stavljamo

$$k_1^{(0)}=hf(x_0,\ y_0),$$

$$k_2^{(0)}=hf\left(x_0+\frac{h}{2},\ y_0+\frac{k_1^{(0)}}{2}\right),$$

$$k_3^{(0)}=hf\left(x_0+\frac{h}{2},\ y_0+\frac{k_2^{(0)}}{2}\right),$$

$$k_4^{(0)}=hf\left(x_0+h,\ y_0+k_3^{(0)}\right),$$

Saglasno metodi Runge-Kutta Δy_0 se približno određuje po formuli

$$\Delta y_0=\frac{1}{6}\left(k_1^{(0)}+2k_2^{(0)}+2k_3^{(0)}+k_4^{(0)}\right)$$

odakle je

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0$$

Dalje, uzimajući (x_1, y_1) kao polazne date vrednosti i ponavljajući taj proces, nalazimo y_2. Analogno se izračunavaju y_i $(i=3, 4, 5, \ldots)$

3° M i l n e o v m e t o d. Da bismo rešili postavljeni problem po Milneovoj metodi polazeći od datih početnih vrednosti $y=y_0$ za $x=x_0$ nalazimo na koji bilo način uzastopne vrednosti

$$y_1 = y(x_1),\ y_2 = y(x_2),\ y_3 = y(x_3)$$

tražene funkcije $y(x)$. U tu svrhu možemo, na primer, razložiti rešenje $y(x)$ u red ili naći te vrednosti metodom uzastopnih aproksimacija, ili primenom Runge-Kuttove metode, itd. Približne vrednosti $\overline{y}_i$ i $\overline{\overline{y}}_i$ sledećih vrednosti y_i $(i=4, 5, \ldots, n)$ nalazimo uzastopno po formulama

$$y_i^{(1)} = y_{i-4} + \frac{4h}{3}(2f_{i-3} - f_{i-2} + 2f_{i-1}), \tag{4}$$

$$y_i^{(2)} = y_{i-2} + \frac{h}{3}\left(f_i^{(1)} + 4f_{i-1} + f_{i-2}\right),$$

gde je $f_i = f(x_i, y_i)$ i $f_i^{(1)} = f\left(x_i, y_i^{(1)}\right)$. Kontrole radi izračunavamo veličinu

$$\varepsilon_i = \frac{1}{29}\left|y_i^{(1)} - y_i^{(2)}\right|. \tag{5}$$

Ako ε_i ne prevazilazi jedinicu poslednjeg zadržanog mesta u rezultatu desetičnog razreda 10^{-m} za $y(x)$, onda za y_i uzimamo $\overline{\overline{y}}_i$ i prelazimo na izračunavanje sledeće vrednosti y_{i+1}, ponavljajući proces. Ako je pak $\varepsilon_i > 10^{-m}$, onda treba početi ispočetka, smanjujući korak računanja. Veličina početnog koraka približno se određuje iz nejednačine $h^4 < 10^{-m}$.

Milneov metod može biti primenjen takođe i na integraciju sistema diferencijalnih jednačina (2').

Izaberimo korak h i stavimo

$$x_i = x_0 + ih, \quad y_i = y(x_i) \qquad (i=0, 1, 2, \ldots),$$

gde je $y=y(x)$ tražena funkcija. Kakvim bilo metodom odredimo dopunske početne vrednosti y_1, y_2, y_3.

Iz jednačine (1') nalazimo odgovarajuće vrednosti izvoda

$$y' = f(x_i, y_i) \qquad (i=0, 1, 2, 3).$$

Tada dalje vrednosti y_i $(i=4, 5, 6, \ldots)$ tražene vektorske funkcije mogu biti korak po korak izračunate po sledećim formulama:

I. $$y_i^{(1)} = y_{i-4} + \frac{4h}{3}\left(2y'_{i-3} - y'_{i-2} + 2y'_{i-1}\right);$$

II. $$y_i^{(2)} = y_{i-2} + \frac{h}{3}\left(y'_{i-2} + 4y'_{i-1} + y_i'^{(1)}\right)$$

gde je $y_i'^{(1)} = f\left(x_i, y_i^{(1)}\right)$;

III Ako je

$$\varepsilon_i = \frac{\left\|y_i^{(1)} - y_i^{(2)}\right\|}{29} < \varepsilon,$$

gde je ε zadata granična greška, onda stavljamo $y_i \approx y_i^{(2)}$.

4° A d a m s o v a m e t o d a. Neka je data jednačina (1) i početni uslovi $y(x_0) = y_0$. Neka je x_i $(i=0, 1, 2, \ldots)$ sistem vrednosti sa istim međusobnim razmakom h i $y_i = y(x_i)$. Tada je očigledno

$$\Delta y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'\,dx \tag{6}$$

Na osnovu druge Newtonove interpolacione formule, dobija se sa tačnošću do razlike četvrtog reda

$$y' = y'_i + q\,\Delta y'_{i-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y'_{i-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y'_{i-3} \tag{7}$$

gde je $q = \dfrac{x-x_i}{h}$.

Zamenjujući ovaj izraz u (6) i vodeći računa da je $dx = h\,dq$ biće

$$\Delta y_i = h\int_0^1 \left(y'_i + q\,\Delta y'_{i-1} + \frac{q^2+q}{2}\Delta^2 y'_{i-2} + \frac{q^3+3q^2+2q}{6}\Delta^3 y'_{i-3}\right)dq.$$

Tako se dobija *Adamsova ekstrapolaciona formula*

$$\Delta y_i = hy'_i + \frac{1}{2}\Delta\left(hy'_{i-1}\right) + \frac{5}{12}\Delta^2(hy'_{i-2}) + \frac{3}{8}\Delta^3\left(hy'_{i-3}\right). \tag{8}$$

Radi početka procesa izračunavanja potrebne su četiri početne vrednosti

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,$$

takozvani *početni odsečak* koji se određuje, uz postavljene početne uslove, kakvim bilo gornjim metodom. Može se, na primer, koristiti Runge-Kuttov metod ili razvoj u Taylorov red

$$y_i = y(x_0 + ih) = y_0 + y'_0(ih) + \frac{y''_0}{2} + (2h)^2 + \cdots,$$

gde je $(i=1, 2, 3, \ldots)$. Znajući ove vrednosti, možemo iz jednačine (1) naći vrednosti izvoda

$$y_0,\ y'_1,\ y'_2,\ y'_3$$

i sastaviti tablicu razlika

$$\Delta\left(hy'_0\right),\ \Delta\left(hy'_1\right),\ \Delta\left(hy'_2\right),\ \Delta^2\left(hy'_0\right),\ \Delta^2\left(hy'_1\right),\ \Delta^3\left(hy'_2\right) \tag{9}$$

Sledeće vrednosti y_i $(i=4, 5, \ldots,)$ traženog rešenja možemo korak po korak izračunati koristeći Adamsovu formulu, popunjavajući do granice neophodnosti tablicu razlike (9).

Kontrole radi preporučljivo je, nakon izračunavanja prve približne vrednosti za Δy_i po formuli

$$\Delta y_i^I = hy'_i + \frac{1}{2}\left(h\Delta y'_{i-1}\right) + \frac{5}{12}\Delta^2\left(hy'_{i-2}\right) + \frac{3}{8}\Delta^3\left(hy'_{i-3}\right)$$

odrediti $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i^I$, izračunati konačne razlike

(10) $$\Delta(hy_i'),\ \Delta^2(hy_{i-1}'),\ \Delta^3(hy_{i-2}')$$

a zatim naći drugu približnu vrednost po tačnijoj formuli

(11) $$\Delta y_i^{II} = hy_i + \frac{1}{2}\Delta(hy_i') - \frac{1}{12}\Delta^2(hy_{i-1}') - \frac{1}{24}\Delta^3(hy_{i-2}').$$

Ako se Δy_i^I i Δy_2^{II} razlikuju za nekoliko jedinica poslednjeg zadržanog desetičnog razreda, onda možemo staviti

$$\Delta y_i = \Delta y_i^{II}$$

a zatim nalazeći

$$\Delta y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$$

ponovo izračunati konačne razlike (10). Nakon toga, strogo govoreći, treba ponovo naći Δy_i^{II} po formuli (11). Radi toga korak po korak mora biti takav da ponovno izračunavanje bude suvišno. U praksi korak h se uzima toliko mali, da bi se mogao zanemariti član $\frac{1}{24}\Delta^3(hy_{i-2}')$ u formuli (11). Ako je pak razlika velika Δy_i^I i Δy_i^{II} znatna, onda treba smanjiti korak. Obično se korak h smanjuje za dva puta.

Adamsova metoda lako se proširuje na sistem diferencijalnih jednačina (2').
Naime, imajući početni *vektorski odsečak*

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,$$

dalje vrednosti koordinata tražene vektor-funkcije $y = y(x)$ određujemo, koristeći formulu

$$\Delta y_i = hy_i + \frac{1}{2}\Delta(hy_{i-1}) + \frac{5}{12}\Delta^2(hy_{i-2}) + \frac{3}{8}\Delta^3(hy_{i-3})\ (i=4,\ 5,\ \ldots)$$

2690. Metodom uzastopnih aproksimacija naći približno rešenje diferencijalne jednačine

$$y' = x - y$$

koja zadovoljava početni uslov $y(0) = 1$

2691. Naći nekoliko uzastopnih aproksimacija za rešenje sistema

$$\frac{dy_1}{dx} = x + y_1 y_2,$$

$$\frac{dy_2}{dx} = x^2 - y_1^2$$

koje zadovoljava početne uslove

$$y_1(0) = 1;\quad y_2(0) = 0;$$

2692. Runge-Kuttovom metodom izračunati na intervalu [0; 0,5] integral diferencijalne jednačine

$$y' = x + y,\quad y(0) = 1,$$

uzimajući korak $h = 0,1$.

2693. Metodom Runge-Kutta integraliti jednačinu oscilovanja klatna u sredini sa otporom

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 0,2\frac{d\theta}{dt} + 10\sin\theta = 0,$$

uz početne uslove

$$\theta(0) = 0,3;\quad \dot\theta(0) = 0;\quad \left(\dot\theta = \frac{d\theta}{dt}\right).$$

2694. Izračunati Milneovom metodom $y(0,5)$ sa tačnošću do 0,001, ako je

$$y' = x + y$$

uz početni uslov $y(0) = 1$.

2695. Milneovom metodom naći na odsečku [0; 1] integral sistema diferencijalnih jednačina

$$\frac{dy}{dx} = \frac{z}{x},\quad \frac{dz}{dx} = -xy,$$

koji zadovoljava početni uslov

$$y(0) = 1;\quad z(0) = 0.$$

2696. Adamsovom metodom naći na intervalu [0; 1] integral jednačine

$$y = x + y,\quad y(0) = 1.$$

2697. Jednačina oscilovanja klatna ima oblik

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 0,2\frac{d\theta}{dt} + 10\sin\theta = 0,$$

pri čemu je

$$\theta(0) = 0,3;\quad \dot\theta(0) = 0.$$

Koristeći Adamsovu metodu odrediti uglovnu brzinu klatna pri prvom prolazu kroz ravnotežni položaj $\theta = 0$.

Naći tri uzastopne aproksimacije rešenja diferencijalnih jednačina i sistema:

2698. $y' = 3x + y^2;\ \ y(0) = 1.$ **2699.** $y' = x^2 + y^2;\ \ y(0) = 0.$

2700. $y' = x - y^2;\ y(0) = 1$, i naći y za $x = 0,1$.

2701. $y' = x + y^2;\ \ y(0) = 0$, i naći y kada je $x = 0,2$.

2702. $y' = x + y + z;\ \ z' = y - z;\ \ y(0) = 1;\ \ z(0) = -2.$

2703. $y'' = -y;\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

2704. $\frac{dy}{dx} = x + z;\ \frac{dz}{dx} = x - y^2;\ y(0) = 2,\ z(0) = 1.$

Izračunati y i z za $x = 0,1$.

Runge-Kuttovom metodom rešiti sledeće jednačine:

2705. $y' = x - y;\ y(0) = 0{,}4;\ (0 < x < 0{,}6),\quad h = 0{,}6.$

2706. $y' = 3x + y^2;\ y(0) = 1;\ (0 < x < 0{,}1),\quad h = 0{,}1.$

2707. $y' = \dfrac{y}{x} - y^2;\ y(1) = 1,\ (1 < x < 2),\quad h = 0{,}2.$

2708. $y' = \sqrt{x+y};\ y(0{,}4) = 0{,}41,\ (0 < x < 0{,}8),\quad h = 0{,}4.$

2709. $y' = z + 1;\ z' = y - x;\ y(0) = 1;\ z(0) = 1;\ (0 < x < 1),\quad h = 0{,}2.$

2710. $\dfrac{dy}{dx} = x + \sqrt{z};\ \dfrac{dz}{dx} = y - \sqrt{z};\ y(0{,}2) = 0{,}5;\ z(0{,}2) = 0;\ (0 < x < 0{,}3),\ h = 0{,}1.$

2711. $\dfrac{dy}{dx} = y + z;\ \dfrac{dz}{dx} = x^2 + y;\ y(0{,}1) = 0{,}4;\ z(0{,}1) = 0{,}1,\ (0 < x < 0{,}2).$

2712. $\dfrac{d^2 y}{dx^2} + 3x\dfrac{dy}{dx} + y = 0;\ y(0{,}1) = 0{,}1;\ y'(0{,}1) = 0{,}2,\ (0 < x < 0{,}2).$

Primenjujući kombinovanu Runge-Kuttovu i Milneovu ili Runge-Kuttovu i Adamsovu metodu naći sa tačnošću do 0,01 rešenja sledećih jednačina:

2713. $y' = x + y;\ y(0) = 1.$ Izračunati $y(0{,}5)$.

2714. $y' = x^2 + y;\ y(0) = 1.$ Izračunati $y(1)$.

2715. $y' = 2y - 3;\ y(0) = 1.$ Izračunati $y(0{,}5)$.

2716. $y' = -x + 2y + z$

$z' = x + 2y + 3z;\ y = 2;\ z = -2;$ za $x = 0$.

Izračunati y i z za $x = 0{,}5$.

2717. $\dot{x} = -2x + 5z,$

$\dot{y} = -(1 - \sin t)x - y + 3z,$

$\dot{z} = -x + 2z;$

$x(0) = 2;\ y(0) = 1;\ z(0) = 1.$

2718. $y^3 y''' + 1 = 0;\ y(1) = 1,\ y'(1) = 0.$ Izračunati $y(1{,}5)$.

2719. $\dfrac{d^2 x}{dt^2} + \dfrac{x}{2}\cos 2t = 0;\ x = 0,\ x' = 1$ za $t = 0$. Naći $x(\pi)$ i $x'(\pi)$.

§ 10. Parcijalne diferencijalne jednačine

1° Jednačina oblika

$$F\left(x_1, x_2, \ldots x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^p z}{\partial x_1^p}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}, \ldots, \frac{\partial^p z}{\partial x_n}\right) = 0, \tag{1}$$

gde su $x_1, \ldots, x_n$ promenljive a z nepoznata funkcija naziva se *parcijalna diferencijalna jednačina p-og reda.*

Ako se jednačina (1) reši po jednom od izvoda maksimalnog reda:

$$\frac{\partial^p z}{\partial x_1^p} = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^{p-1} z}{\partial x^{p-1}}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}, \ldots, \frac{\partial^p z}{\partial x_n^p}\right)$$

onda se može pokazati da postoji jedinstveno analitičko rešenje u okolini tačke $x_{10}, x_{20}, \ldots x_{no}$ jednačine (2), koje zadovoljava uslove

$$z = \varphi_0(x_2, x_3, \ldots x_n),\ \frac{\partial z}{\partial x_1} = \varphi_1(x_2, x_3, \ldots, x_n), \ldots,$$

$$\frac{\partial^{p-1} z}{\partial x_1^{p-1}} = \varphi_{p-1}(x_2, x_3, \ldots, x_n) \text{ za } x = x_{10},$$

ako su funkcije $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{p-1}$ analitičke funkcije u okolini početne tačke $x_{20}, x_{30}, \ldots, x_{no}$, a f je analitička funkcija u okolini početnih vrednosti svojih argumenata

$$x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{no},\ z_0 = \varphi_0(x_{20}, x_{30}, \ldots x_{no}),$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)_0 = \varphi_1(x_{20}, \ldots, x_{no}), \ldots, \left(\frac{\partial^p z}{\partial x_n^p}\right)_0 = \left(\frac{\partial^p \varphi_v}{\partial x_n^p}\right)_{x_i = x_{10}}$$

Rešenje jednačine (2) definisano je zadavanjem početnih funkcija $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_{p-1}$ čijom se proizvoljnom varijacijom u klasi analitičkih funkcija dobijaju sva analitička rešenja te jednačine

2° Jednačina oblika

$$a_1 \frac{\partial z}{\partial x} + \cdots + a_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = b, \tag{3}$$

gde su $a_1, \ldots, a_n, b$ funkcije od $x_1, \ldots x_n, z$ naziva se *parcijalna linearna nehomogena jednačina prvog reda.* Da bismo rešili jednačinu (3) treba napisati sistem običnih diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx_1}{a_1} = \cdots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{dz}{b} \tag{4}$$

i naći n nezavisnih prvih integrala

$$\varphi_1(x_1, \ldots, x_n, z) = c_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_n(x_1, \ldots x_n, z) = c_n$$

Opšte rešenje sistema (1) dato implicitno može se pisati u obliku

$$F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)=0 \tag{6}$$

gde je F proizvoljna diferencijalna funkcija. Specijalno, ako z ulazi samo u jedan od prvih integrala (5), na primer u poslednji onda se opšte rešenje može pisati u obliku

$$\varphi_n(x_1, \ldots x_n, z)=f(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \tag{7}$$

gde je f proizvoljna diferencijalna funkcija.

3° Da bismo našli površinu $z=z(x, y)$ koja zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$a_1(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x}+a_2(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y}=b(x, y, z) \tag{8}$$

a prolazi kroz datu liniju

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t) \tag{9}$$

potrebno je naći dva nezavisna prva integrala sistema

$$\frac{dx}{a_1}=\frac{dy}{a_2}=\frac{dz}{b}. \tag{10}$$

U tako nađene prve integrale

$$\varphi_1(x, y, z)=c_1,\quad \varphi_2(x, y, z)=c_2 \tag{11}$$

treba zameniti njihove vrednostima iz (9). Tako se dobijaju dve jednačine oblika

$$\Phi_1(t)=c_1,\quad \Phi_2(t)=c_2. \tag{12}$$

Isključujući iz ovih jednačina t, dobija se relacija

$$F(c_1, c_2)=0.$$

Stavljajući umesto c_1 i c_2 leve strane prvih integrala (11), dobija se traženo rešenje. U slučaju kada obe jednačine (12) ne sadrže t tada je linija (9) integrala kriva sistema (10), tj. karakteristična jednačina (8), te Cauchyev problem ima beskonačno mnogo rešenja.

4° Jednačina oblika

$$P(x, y, z)\,dx+Q(x, y, z)\,dy+R(x, y, z)\,dz=0 \tag{13}$$

naziva se *Pfaffova diferencijalna jednačina.* Uslov integrabilnosti jednačine (13) može da se izrazi u obliku

$$\vec{A}\operatorname{rot}\vec{A}=0 \tag{14}$$

gde je $\vec{A}(P, Q, R)$. Ako je sem toga $\operatorname{rot}\vec{A}=0$ onda je polje $\vec{A}$ potencijalno pa je leva strana jednačine (13) totalni diferencijal neke funkcije $U(x, y, z)$. U tom slučaju integral Pfaffove jednačine može se dobiti po obrascu

$$U=\int_{x_0}^{x} P(x, y, z)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)\,dy+\int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)\,dz=c. \tag{15}$$

U slučaju kada je $\operatorname{rot}\vec{A}\neq 0$ a uslov integrabilnosti ispunjen onda se za dobijanje integrala jednačine (13) sem *metoda karakteristika,* koji ćemo ilustrovati na primeru, koristi i sledeći postupak:

Pretpostavi se ~~da je u jednačini (13) jedna promenljiva, na primer~~ z, konstantna pa se integrali obična jednačina

$$P(x, y, z)\,dx+Q(x, y, z)\,dy=0 \tag{16}$$

u kojoj z igra ulogu parametra. Nakon nalaženja integrala jednačine (16)

$$U(x, y, z)=c(z) \tag{17}$$

u kome proizvoljna konstanta može biti funkcija parametra z izabiramo tu funkciju $c(z)$ tako da zadovoljava jednačinu (13). Diferenciranjem jednačine (17) dobija se

$$\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\left[\frac{\partial U}{\partial z}-c'(z)\right]dz=0. \tag{18}$$

Koeficijenti uz diferencijale promenljivih u jednačinama (16) i (17) moraju biti proporcionalni

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{P}=\frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{Q}=\frac{\frac{\partial U}{\partial z}-c'(z)}{R}.$$

Iz jednačine $\dfrac{\frac{\partial U}{\partial x}}{P}=\dfrac{\frac{\partial U}{\partial z}-c'(z)}{R}$ možemo odrediti $c'(z)$ pošto se može dokazati da pri uslovu $\vec{A}\operatorname{rot}\vec{A}=0$, ta jednačina sadrži samo z, $c'(z)$ i $U(x, y, z)=c(z)$.

5° Opšti oblik parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda sa tri promenljive je

$$F(x, y, z, p, q)=0 \tag{19}$$

gde je $p=\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q=\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Polazeći od geometrijske interpretacije jednačine (19) može se dati postupak nalaženja njenog integrala, koji zavisi od proizvoljne funkcije, ako je poznat njen integral $\Phi(x, y, z, a, b)=0$ koji zavisi od dva parametra a i b. Integral $\Phi(x, y, z, a, b)=0$ jednačine (19), koji zavisi od dva suštinski proizvoljna parametra a i b, naziva se ***potpuni integral.*** Ako se potpuni integral shvati kao familija površi koje zavise od dva parametra, onda je i obvojnica tih površi rešenje jednačine (19), koje se naziva ***singularni integral.***
Singularni integral je definisan jednačinama

$$\Phi(x, y, z, a, b)=0,\quad \frac{\partial \Phi}{\partial a}=0,\quad \frac{\partial \Phi}{\partial b}=0.$$

Ako između parametra a i b postoji veza $b=b(a)$, onda je obvojnica površi definisana jednačinama

$$\Phi(x, y, z, a, b)=0 \text{ i } \frac{\partial \Phi}{\partial a}+\frac{\partial \Phi}{\partial b}b'(a)=0,$$

i takvo rešenje jednačine (19) naziva se *opšti integral.* To znači, ako je poznat jedan potpuni integral jednačine (19), može se iz njega izvesti opšte i singularno rešenje samo diferenciranjem i eliminacijom, ako je ta eliminacija moguća.
Potpuni integral se u nekim slučajevima nalazi bez teškoća, na primer:
1) Ako jednačina (19) ima oblik $F(p, q)=0$ ili $p=\varphi(q)$ onda stavljanjem $q=a$, gde je a proizvoljna konstanta, dobijamo $p=\varphi(a)$, $dz=pdx+qdy=\varphi(a)\,dx+ady$, $\Rightarrow$ potpuni integral $z=\varphi(a)\,x+ay+b$.
2) Ako jednačina (19) može biti dovedena na oblik $\varphi_1(x, p)=\varphi_2(y, q)$ onda stavljanjem $\varphi_1(x, p)=\varphi_2(y, q)=a$ gde je a proizvoljna konstanta i rešavanjem,

ako je to moguće, po p i q, dobijamo $p=\psi_1(x, a)$, $q=\psi_2(y, a)$, $dz=pdx+q\,dy=$ $=\psi_1(x, a)\,dx+\psi_2(y, a)\,dy$ potpuni integral $z=\int \psi_1(x, a)\,dx+\int \psi_2(y, a)\,dy+b$.

3) Ako jednačina (19) ima oblik $F(z, p, q)=0$, onda se stavljanjem $z=z(u)$, gde je $u=ax+y$, dobija

$$F\left(z, a\frac{dz}{du}, \frac{dz}{du}\right)=0.$$

Integraleći ovu običnu diferencijalnu jednačinu, dobijamo $z=\Phi(u, a, b)$ gde je b proizvoljna konstanta, ili potpuni integral

$$z=\Phi(ax+y, a, b).$$

4) Ako jednačina (19) ima oblik $z=py+qy+\varphi(p, q)$ tada je, što je lako proveriti, potpuni integral $z=ax+by+\varphi(a, b)$.

6° Lagrange-Charpiteov metod nalaženja potpunog integrala. Ovaj metod je opšteg karaktera i koristi se u složenijim slučajevima. Po tom metodu se jednačini (19) pridružuje jednačina

$$U(x, y, z, p, q)=a \tag{20}$$

tako da funkcije $p=p(x, y, z, a)$ i $q=q(x, y, z, a)$ određene iz sistema jednačina (19) i (20) daju integrabilnu Pfaffovu jednačinu

$$dz=p(x, y, z, a)\,dx+q(x, y, z, a)\,dy. \tag{21}$$

Tada će integral $\Phi(x, y, z, a, b)=0$, gde je b integraciona konstanta, jednačine (21) biti potpuni integral jednačine (19). Funkcija U određuje se iz uslova integrabilnosti jednačine (21) jednom relacijom

$$(\vec{A}\operatorname{rot}\vec{A})=0 \text{ gde je } \vec{A}=p(x, y, z)\,\vec{i}+q(x, y, z)\,\vec{j}-\vec{k}$$

tj. u razvijenom obliku iz jednačine

$$p\frac{\partial q}{\partial z}-q\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial q}{\partial x}=0. \tag{22}$$

Izvodi $\frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}, \frac{\partial q}{\partial z}$ izračunavaju se diferenciranjem identiteta

$$\begin{cases} F(x, y, z, p, q)=0 \\ U(x, y, z, p, q)=a, \end{cases} \tag{23}$$

u kome se p i q smatraju funkcijama od x, y i z određenim sistemom (23). Diferenciranjem tog sistema po x i rešavanjem po $\frac{\partial q}{\partial x}$, po y i rešavanjem po $\frac{\partial p}{\partial y}$, na kraju po z i rešavanjem po $\frac{\partial p}{\partial z}$ i $\frac{\partial q}{\partial z}$, dobija se respektivno

$$\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\dfrac{D(F, U)}{D(p, x)}}{\dfrac{D(F, U)}{D(p, q)}}, \quad \frac{\partial p}{\partial y}=-\frac{\dfrac{D(F, U)}{D(y, q)}}{\dfrac{D(F, U)}{D(p, q)}},$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}=-\frac{\dfrac{D(F, U)}{D(z, p)}}{\dfrac{D(F U)}{D(p, q)}}, \quad \frac{\partial q}{\partial z}=-\frac{\dfrac{D(F, U)}{D(p, z)}}{\dfrac{D(F, U)}{D(p, q)}}$$

Zamenjujući tako izračunate izvode u uslov integrabilnosti (22) i množenjem determinantom $\frac{D(F, U)}{D(p, q)}$ koja se smatra različitom od nule dobija se

$$\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial U}{\partial y}+\left(p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{\partial U}{\partial z}-\left(\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial U}{\partial p}-\left(\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial U}{\partial q}=0 \tag{24}$$

Tako se za određivanje funkcije U dobija homogena linearna jednačina koja se integrali na već navedeni način: formira se jednačina karakteristika

$$\frac{dx}{\dfrac{\partial F}{\partial p}}=\frac{dy}{\dfrac{\partial F}{\partial q}}=\frac{dz}{p\dfrac{\partial F}{\partial p}+q\dfrac{\partial F}{\partial q}}=-\frac{\partial q}{\dfrac{\partial F}{\partial x}+p\dfrac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{dq}{\dfrac{\partial F}{\partial y}+q\dfrac{\partial F}{\partial z}} \tag{25}$$

Nalazi se bar jedan prvi integral sistema (25) $U_1(x, y, z, p, q)=a$, i ako su funkcije F i U_1 nezavisne u odnosu na p i q, tj. $\frac{D(F, U)}{D(p, q)}\neq 0$ to prvi integral $U_1(x, y, z, p, q)=0$ i jeste traženo rešenje jednačine (24).
Prema tome, određujući $p=p(x, y, z, a)$ i $q=(x, y, z, a)$ iz sistema jednačina

$$F(x, y, z, p, q)=0$$

$$U_1(x, y, z, p, q)=a.$$

i zamenjujući u $dz=p(x, y, z)\,dx+q(x, y, z, a)\,dy$ dobijamo jednom relacijom integrabilnu Pfaffovu jednačinu, čijim rešavanjem nalazimo potpuni integral polazne jednačine $\Phi(x, y, z, a, b)=0$. Za potpuni integral $\Phi(x, y, z, a, b)=0$ jednačine $F(x, y, z, p, q)=0$ može se, u opštem slučaju, rešiti početni problem ili šta više opštiji problem određivanja integralne površi, koja prolazi kroz datu krivu $x=$ $=x(t), y=y(t)$, $z=z(t)$. Ako se sistem (25) može lako integraliti, onda je za rešavanje tako generalisanog Cauchyevog problema zgodno koristiti *Cauchyev metod* ili *metod karakteristika*.

7° Osnovne jednačine matematičke fizike. U slučaju dve promenljive osnovni oblici su:

1) Talasna jednačina

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{26}$$

Ova jednačina je prostija jednačina *hiperboličkog tipa*.

2) *Jednačina provođenja toplote* ili *Fourierova jednačina*.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{27}$$

Ova jednačina je prostija jednačina *paraboličkog tipa*.

3) *Laplaceova jednačina*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{28}$$

Ova jednačina je prostija jednačina *eliptičkog tipa*.
Za slučaj funkcije tri promenljive prethodne jednačine imaju respektivno oblik

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{26'}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{27'}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \tag{28'}$$

U sledećim primerima naći parcijalne jednačine ako su poznata njihova opšta rešenja

2720. $\Phi\left(\frac{z}{x^3};\ \frac{y}{x}\right)=0.$ 2721. $z=(x^2+a)(y+b).$

2722. $\Phi\left(\frac{z}{x^2},\ x-y\right)=0.$ 2723. $z=(x+y)\,\Phi(x^2-y^2).$

2724. $x=f(z)+g(y).$ 2725. $z=f(x+z)+g(x+y).$

2726. $z=\frac{1}{2}(a^2+2)x^2+axy+bx+\Phi(y+ax).$

2727. $z=x^a f\left(\frac{y}{x}\right)+x^b\varphi\left(\frac{y}{x}\right),\ (a\neq b).$

2728. $z=x^a f\left(\frac{y}{x}\right)+x^b\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+x^c\psi\left(\frac{y}{x}\right)$, gde su a, b i c tri različite konstante.

Naći opšti integral sledećih jednačina:

2729. $\frac{\partial z}{\partial x}=x+y.$ 2730. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0.$

2731. $r=xy.$ 2732. $s=x^2+y^2.$

2733. $t=-x^2\sin xy.$ 2734. $s+yq+z=0.$

2735. $s+xyp+yz=0.$ 2736. $y^2s+2yp=1.$

2737. $yt-q=2x^2y.$ 2738. $2yt-xs+2q=x^2y.$

2739. $ps-qr=0.$ 2740. $pq=zs.$

2741. Naći opšte rešenje jednačine

$$xz\frac{\partial z}{\partial x}+yz\frac{\partial z}{\partial y}=-xy,$$

a zatim i integralnu površinu koja prolazi kroz krivu

$$y=x^2,\quad z=x^3.$$

Naći opšte rešenje sledećih jednačina:

2742. $px+qy=3z.$ 2743. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}+t\frac{\partial z}{\partial t}=xyt.$

2744. $(x^2-y^2-z^2)p+2xyq=2xz.$ 2745. $ap+bq+cz=0.$

2746. $x^2p+y^2q=z^2.$ 2747. $yp+xq=x-y.$

2748. $e^x p+y^2q=ye^x.$ 2749. $2px+(y-x)q-x^2=0.$

2750. $(x^2+y^2)p+2xyq+z^2=0.$ 2751. $2y^4p-xyq=x\sqrt{z^2+1}.$

2752. $x^2zp+y^2zq=x+y.$ 2753. $yzp-xzq=e^z.$

2754. $\cos y\frac{\partial z}{\partial x}+\cos x\frac{\partial z}{\partial y}=\cos x\cos y.$ 2755. $\sin^2 x\frac{\partial z}{\partial x}+\operatorname{tg} z\frac{\partial z}{\partial y}=\cos^2 z.$

2756. $x\frac{\partial z}{\partial y}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z+a\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$

2757. $xy^3-2x^4)\frac{\partial z}{\partial x}+(2y^4-x^3y)\frac{\partial z}{\partial y}=9z(y^3-x^3).$

2758. $x\frac{\partial u}{\partial x}+(z+u)\frac{\partial u}{\partial y}+(y+u)\frac{\partial u}{\partial z}=y+z.$

2759. $(y+z)\frac{\partial u}{\partial x}+(z+x)\frac{\partial u}{\partial y}+(x+y)\frac{\partial u}{\partial z}=u.$

2760. $xy\frac{\partial u}{\partial x}-\sqrt{1-y^2}\left(y\frac{\partial u}{\partial y}-z\frac{\partial u}{\partial z}\right)=axy\frac{\partial u}{\partial z}.$

2761. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+(z+u)\frac{\partial u}{\partial z}=xy.$

2762. $(s-x)\frac{\partial u}{\partial x}+(s-y)\frac{\partial u}{\partial z}+(s-z)\frac{\partial u}{\partial z}=s-u;\ s=x+y+z+u.$

2763. $(u-x)\frac{\partial u}{\partial x}+(u-y)\frac{\partial u}{\partial y}-z\frac{\partial u}{\partial z}=x+y.$ 2764. $\frac{\partial z}{\partial x}-a\frac{\partial z}{\partial y}=e^{mx}\cos py.$

2765. $\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+c\frac{\partial u}{\partial z}=xyz.$ 2766. $(y-bz)\frac{\partial z}{\partial x}-(x-az)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay.$

U sledećim zadacima naći površ koja zadovoljava datu jednačinu i prolazi kroz datu liniju:

2767. $y^2 p+xyq=x;\ x=0,\ z=y^2.$ **2768.** $xp-2yq=x^2+y^2;\ y=1;\ z=x^2.$

2769. $\operatorname{tg} x\cdot p+yq=z;\ y=x,\ z=x^3.$

2770. $xp+yq=z-x^2-y^2;\ y=-2,\ z=x-x^2.$

2771. $xyp-y^2q=x,\ x=a,\ 2ayz=a^2+2.$

2772. $yzp+xzq=xy,\ x=a,\ y^2+z^2=a^2.$

2773. $xzp+yzq+xy=0;\ xy=a^2,\ z=h.$

2774. $(y-z)p+(z-x)q=x-y;\ z=y=-x.$

2775. $xp+(xz+y)q=z;\ x+y=2x,\ x-y=1.$

2776. $xp+zq=y;\ y=2z,\ x+2y=z.$

2777. $2xzp+2yzq=z^2-x^2-y^2;\ x+y+z=0,\ x^2+y^2+z^2=a^2.$

2778. $(y+2z^2)p-2x^2zq=x^2;\ x=z,\ y=x^2.$

2779. $(x-z)p+(y-z)q=2z;\ x-y=2,\ z+2x=1.$

2780. $xy^3p+x^2z^2q=y^3z;\ x=-z^3,\ y=z^2.$

2781. $x(x^2+y^2)p+2y^2(xp+yq-z)=0;\ z=h,\ x^2+y^2=a^2.$

2782. $xp+yq=2yx;\ y=x,\ z=x^2.$

U sledećim zadacima naći površ ortogonalnu familijama površi

2783. $z=axy.$ **2784.** $xyz=a.$ **2785.** $z^2=axy.$ **2786.** $xy=az^2.$

2787. Naći površ koja prolazi kroz pravu $y=x,\ z=h$ i ortogonalna je na površ $x^2+y^2+z^2=ax.$

2788. Naći površ koja prolazi kroz krug $z=h,\ x^2+y^2=a^2$ i ortogonalna je na površ $xy=az.$

2789. Naći površ koja je normalna na površ $x^2+y^2+z^2=cx$ a prolazi kroz pravu $y=x,\ z=1.$

2790. Napisati parcijalnu jednačinu cilindričnih površi čije su izvodnice paralelne vektoru (l, m, n).

2791. Napisati parcijalnu jednačinu, koju zadovoljavaju cilindrične površi čije su izvodnice paralelne vektoru (1, 1, 2). Naći opšte rešenje te jednačine.

2792. Koristeći rezultat prethodnog zadatka, naći jednačinu cilindrične površi čije zu izvodnice paralelne vektoru (1, 1, 2) a generatrisa $x+y+z=0,$ $5x^2+6xy+5y^2=4.$

2793. Napisati parcijalnu jednačinu koju zadovoljavaju sve kanonične površi sa temenom u tački (a, b, c) i rešiti je.

2794. Naći jednačinu površi čija proizvoljna tangentna ravan seče osu Ox u tački čija je apscisa dva puta manja od apscise dodirne tačke.

Rešiti sledeće sisteme jednačina:

2795. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{z}{x},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2z}{y}.$ **2796.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y-z,\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=xz.$

2797. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2yz-z^2,\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=xz.$

2798. $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=0,\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=0,\quad u=z^2$ za $x=y=0.$

2799. Data je parcijalna jednačina $xp+yq=0.$

1° Naći njen opšti integral.

2° Između funkcija koje zadovoljavaju datu jednačinu naći one koje zadovoljavaju i jednačinu

$$p^2+q^2=\frac{a^2}{x^2+y^2}.$$

2800. Neka je M tačka na površi, P njena ortogonalna projekcija na ravan $z=0$, N prodor kroz ravan $z=0$ normale u tački M, O koordinatni početak.

1° Naći opšti oblik jednačina površi takvih da je $\measuredangle NOP=\dfrac{\pi}{4}$ u

Dekartovim i cilindričnim koordinatama.

2° Naći onu od tih površi koja sem toga prolazi i kroz Ox osu.

3° Koje površi drugog reda imaju gornju osobinu?

2801. Data je familija površi drugog reda $ax^2+by^2-\lambda z^2=c$ gde je λ realan parametar, a, b i c proizvoljni realni brojevi.
Naći ortogonalne trajektorije date familije površi, a između njih onu koja prolazi kroz krivu $x=1,\ z^2=y^a.$
Kada i kakve površi drugog reda mogu da predstavljaju ove trajektorije?

2802. Data je jednačina

$$xy^2p+x^2yq=z(x^2+y^2).$$

1° Naći njen opšti integral i onaj partikularni integral koji ispunjava uslove

$$x=1,\quad z=ay(1-y^2)$$

gde je a data konstanta.

2° Odrediti opšti oblik jednačine površi koja zadovoljava datu jednačinu i za koju je poznato da se jedna familija njenih asimptotskih linija sastoji iz karakteristika.

2803. Data je parcijalna jednačina

$$(z-y)\,p-(z+x)\,q=x+y.$$

1° Naći njen opšti integral.

2° Naći opšti oblik površi drugog reda koja zadovoljava gornju parcijalnu jednačinu.

3° Naći Cauchyev integral koji zadovoljava uslove $y=x+1,\ z=0$.

4° Ispitati površ dobijenu pod 3° i svesti njenu jednačinu na kanonični oblik.

2804. Neka je f data dvaput neprekidno diferencijalna funkcija.

1° Formirati i integraliti parcijalnu jednačinu koju treba da zadovolji funkcija $u=u(x, y)$ da bi izraz

$$(1)\qquad \left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\right)dx+\left[x\frac{\partial u}{\partial y}+x-2\,xy+2\,yf'(u-x)\right]dy$$

bio totalni diferencijal.

2° Odrediti integral te jednačine koji se za $x=0$ svodi na $u=y^2$. Za tako nađeno $u(x, y)$ naći funkciju čiji je totalni diferencijal izraz (1).

2805. Pokazati da je $z=x^n f\left(\frac{y}{x}\right)$ rešenje parcijalne diferencijalne jednačine

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x}+2\,xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=n^2 z.$$

2806. Dokazati da svaka funkcija oblika $z=x^m f\left(\frac{y}{x}\right)$ zadovoljava parcijalnu jednačinu

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=mz;\quad x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\,xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=m(m-1)\,z.$$

Na osnovu toga izvesti zaključak da svaka funkcija oblika $z=r\alpha(\varphi)+\beta(\varphi)$ gde su r i φ moduo i argumenat broja $x+iy$, zadovoljava jednačinu

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\,xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

2807. Naći rešenje $z=z(x, y)$ parcijalne jednačine $\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+2\,y$ koje zadovoljava uslov $z(x, x^2)=1$.

2808. Odrediti rešenje $z=z(x, y)$ jednačine $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=x+y$ koje zadovoljava uslove $z(x, 0)=x;\ z(0, y)=y^2$.

Rešiti sledeće jednačine:

2809. $(2x^3y+1)\,dx+x^4\,dy+x^2\operatorname{tg} z\,dz=0.$

2810. $(2x^3-z)\,dz+2x^2yz\,dy+x(z+x)\,dx=0.$

2811. $2(y+z)\,dx-(x+z)\,dy+(2y-x+z)\,dz=0.$

2812. $yz\,dx-z^2\,dy-xy\,dz=0.$

2813. $(2y-z)\,dx+2(x-z)\,dy-(x+2y)\,dz=0.$

2814. $(y^2+z^2+2xy+2xz)\,dx+(x^2+z^2+2xy+2yz)\,dy+(x^2+y^2+2xz+2yz)\,dz=0.$

2815. $z\,dx+(x-y)\,dy+zy\,dz=0.$

2816. $(6x+yz)\,dx+(xz-2y)\,dy+(xy+2z)\,dz=0.$

2817. $yz\,dx+2xz\,dy+xy\,dz=0.$ **2818.** $yz\,dx+(z-yz^3)\,dy-2xy\,dz=0.$

2819. $2(y+z)\,dx-(x+z)\,dy+(2y-x+z)\,dz=0.$

2820. $(e^x y+e^z)\,dx+(e^y z+e^x)\,dy+(e^y-e^x y-e^y z)\,dz=0.$

2821. $(y+3z)\,dx+(x+2z)\,dy+(3x+2y)\,dz=0.$

2822. $(\cos x+e^x y)\,dy+(e^x+e^y z)\,dy+e^y\,dy=0.$

2823. $3x^2(y+z)dx+$ [illegible] $-x^2)\,dy+(y^2-x^3)\,dz=0.$

2824. $x^2\,dx-z^2\,dy-xy\,dz=0.$

2825. $2x(y+z)\,dx+(2yz-x^2+y^2-z^2)\,dy+(2yz-x^2-y^2+z^2)dz=0.$

2826. $z(x^2-yz-z^2)\,dx+xy(x+z)\,dy+x(z^2-x^2-xy)\,dz=0.$

Rešiti sledeće sisteme jednačina:

2827. $(y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz=0,\quad (x+z)\,dx+y\,dy+x\,dz=0.$

2828. $yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz=0.\quad z^2(dx+dy)+(xz+yz-xy)\,dz=0.$

2829. $dx+2\,dy-(x+2y)\,dz=0,\quad 2\,dx+dy+(x-y)\,dz=0.$

2830. $dx+dy+(x+y)\,dz=0,\quad z(dx+dy)+(x+y)\,dz=0.$

2831. $2yz\,dx+x(z\,dy+y\,dz)=0,\quad y\,dx-x^2z\,dy+y\,dz=0.$

Naći familije površi normalne na vektorske linije sledećih vektorskih polja:

2832. $\vec{A}+(2xy-3yz)\vec{i}+(x^2-3xz)\vec{j}-3xy\vec{k}.$

2833. $\vec{A}=(2x-y)\vec{i}+(3y-z)\vec{j}+(x-2y)\vec{k}.$

2834. $\vec{A} = x\vec{i} + z\vec{j} + (y+2z)\vec{k}$.

2835. Naći vektorske linije, vektorske površi normalne na vektorske linije polja $\vec{A} = x\vec{i} + y\vec{i} - z\vec{k}$.

Naći potpune integrale sledećih jednačina:

2836. $pq = 2xy$. **2837.** $p = 3q^3$. **2838.** $z^3 = pq^2$.

2839. $z = px + qy + p^2 + q^2$. **2840.** $yzp^2 - q = 0$. **2841.** $z = px + qy + p^3q^3$.

2842. $pq = 9z^2$. **2843.** $p = \sin q$. **2844.** $p^2 - q^2 = 1$.

2845. $pq + qx = y$. **2846.** $p^2 + q^2 = 9$. **2847.** $pq + p + q = 0$.

2848. $p^2 + q^2 = z^2(x+y)$.

Naći potpuni i singularni integral sledećih jednačina:

2849. $z = px + qy + pq$. **2850.** $p^2 + q^2 = 4z$. **2851.** $p^2x^2 = z(z - qy)$.

2852. $z^2(p^2 + q^2 + 1) = 1$. **2853.** $4xyz = pq + 2px^2y + 2qxy^2$.

2854. $16p^2z^2 + 9q^2z^2 + 4z^2 - 4 = 0$.

2855. $pq + 2x(y+1)p + y(y+2)q - 2(y+1)z = 0$.

Rešiti sledeće jednačine:

2856. $z = pq + 1$; $z = 2x + 1$ za $y = 2$.

2857. $2z = pq - 3xy$; $z = 15y$ za $x = 5$.

2858. $z = px + qy + 2pq$; $z = 4y + 12$ za $x = -4$. **2859.** $pq = x^m y^n z^l$.

2860. Data je parcijalna jednačina

$$\left(\frac{p}{x}\right)^2 + \left(\frac{q}{y}\right)^2 = \frac{2}{z^2}.$$

1° Naći njen potpun i opšti integral.

2° Odrediti njen Cauchyev integral koji se za $y = 0$ svodi na $z = x - 1$.

2861. Data je parcijalna jednačina

$$pq = z^m xy$$

gde je m ceo broj.

1° Naći njen potpuni i opšti integral.

2° Ispitati za koje vrednosti od m dobijeni potpuni integral predstavlja površinu drugog reda.

3° Za slučaj $m = 0$ naći Cauchyev integral koji prolazi kroz krivu $x = 1$, $z = \sqrt{1 + y^2}$.

2862. Data je jednačina

$$2xp + 2yq + 4zp^2 - z = 0.$$

1° Odrediti potpuni, opšti i singularni integral date jednačine.

2° Naći ono rešenje koje zadovoljava uslov $z^2 = x$, $y = x$.

2863. 1° Odrediti sve površi $z = \varphi(x, y)$ kod kojih je u svakoj tački $M(x, y, z)$ skalarni proizvod orta normale na površ koji je usmeren tako da zaklapa oštar ugao sa pozitivnim smerom Oz ose i vektora položaja $\overrightarrow{OM}$ jednak

$$\frac{z - f(p, q)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

gde je $p = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$ a $f(p, q)$ homogena funkcija stepena $n \neq 1$.

2° Ako je f cela homogena funkcija drugog stepena, naći onu od površi koja prolazi kroz parabolu $x = 0$, $2z = y^2$.

2864. Rešiti jednačinu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

i naći ono rešenje koje zadovoljava granične uslove

(1) $u(0, t) = 0$,

(2) $u(l, t) = 0$,

(3) $u(x, 0) = f(x)$,

(4) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi(x)$.

2865. Isvesti jednačinu krutog oscilovanja homogene cilindrične osovine.

2866. Naći rešenje jednačine

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2},$$

koje zadovoljava uslove

$$\theta(0, t) = 0, \quad \theta(l, t) = 0, \quad \theta(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial \theta(x, 0)}{\partial t} = 0,$$

gde je $\varphi(x) = \dfrac{2\theta_0 x}{l}$ za $0 < x < \dfrac{l}{2}$,

$$\varphi(x) = -\frac{2\theta_0 x}{l} + 2\theta_0 \quad \text{za} \quad \frac{l}{2} < x < l.$$

Dati mehaničku interpretaciju zadatka.

2867. Izvesti jednačinu uzdužnih kolebanja homogene cilindrične osovine.

2868. Homogena osovina dužine $2l$ pod uticajem sila koje dejstvuju na njene krajeve skratila se na veličinu 2λ. U momentu $t=0$ na osovinu ne deluju sile. Odrediti pomeranje $u(x, t)$ preseka osovine čija je apscisa x u momentu t (srednja tačka ose osovine ima apscisu $x=0$).

2869. Jedan kraj grede (osovine) dužine l je pričvršćen a na drugi dejstvuje sila P na rastezanje. Naći uzdužno oscilovanje osovine, ako za $t=0$ sila P ne dejstvuje.

2870. Naći rešenje jednačine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

koje zadovoljava početne uslove

$$u(0, t)=0, \quad u(l,t)=A\sin\omega t,$$

$$u(x, 0)=0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}=0.$$

Dati mehaničko tumačenje zadatka.

2871. Naći rešenje jednačine

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

za $x\in(-\infty; \infty)$ i $t>0$, koje zadovoljava početni uslov

$$u(x, 0)=\varphi(x)$$

2872. Naći rešenje jednačine

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

koje zadovoljava uslove

$$u(0, t), \quad u(l, t)=0, \quad t>0,$$

$$u(x, 0)=\begin{cases} x \text{ za } 0<x<\dfrac{l}{2}, \\ l-x \text{ za } \dfrac{l}{2}<x<l. \end{cases}$$

2873. Naći rešenje jednačine

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

koje zadovoljava uslove

$$u(0, t)=u(0, l), \quad u(x, 0)=\frac{x(l-x)}{l^2}.$$

2874. Naći rešenje jednačine

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

koje zadovoljava uslove

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0, \quad u(l, t)=u_0, \quad u(x, 0)=\varphi(x),$$

i dati fizičko tumačenje zadatka.

2875. Naći rešenje jednačine

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

koje zadovoljava uslove

$$u(0, t)=0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=-Hu\Big|_{x=l}, \quad u(x, 0)=\varphi(x)$$

i dati fizički smisao zadatka.

Rešiti sledeće Laplaceove jednačine:

2876. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, ako je granični uslov $u|_{r=R}=f(\varphi)$, gde je φ polarni ugao (Dirichletov problem za krug).

2877. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. Za $0<x<a$, $0<y<\infty$ koje zadovoljava uslove

$$u(0, y)=0, \ u(a, y)=0, \ u(x, 0)=A\left(1-\frac{x}{a}\right), \ u(x, \infty)=0.$$

2878. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, za $0<x<a$, $0<y<b$ koje zadovoljava uslove

$$u(x, 0)=0, \ u(x, b)=0, \ u(0, y)=Ay(b-y), \ u(a, y)=0.$$

2879. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, unutar prstena, ograničenog krugovima $x^2+y^2=R_1^2$, $x^2+y^2=R_2^2$ koje zadovoljava uslove

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R_1}=+\frac{Q}{\lambda 2\pi R_1}, \quad u\Big|_{r=R_2}=u_2.$$

Dati hidrodinamičko tumačenje zadatka.

2880. Pokazati da je funkcija $u(x, y)=e^{-y}\sin x$ rešenje jednačine $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ za $0<x<1$. $0<y<1$, koje zadovoljava uslove: $u(0, y)=0$, $u(1, y)=e^{-y}\sin 1$, $u(x, 0)=\sin x$, $u(x, 1)=e^{-1}\sin x$.

2881. Ako je $u=f(x, y)$ jedno rešenje Laplaceove jednačine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

pokazati da su parcijalni izvodi

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

takođe rešenja date jednačine. Dokazati da to važi za svaku drugu linearnu parcijalnu diferencijalnu jednačinu sa konstantim koeficijentima.

2882. Pokazati da jednačina

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}=a^2\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

gde je a pozitivna konstanta, ima rešenje oblika

$$\Phi=\varphi\left(\frac{a\,x}{2\sqrt{t}}\right)$$

Odrediti to rešenje.

2883. Dokazati da je funkcija

$$u=\int_0^{2\pi} f(x\cos t+y\sin t+iz,\, t)\,dt,$$

jedno rešenje Laplaceove jednačine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

2884. Data je parcijalna jednačina

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial y}$$

1° Dokazati da je izraz $u(x, y)\,dx+\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial x}dy$ gde je $u(x, y)$ ma koje rešenje date jednačine, totalni diferencijal jedne funkcije $v(x, y)$ i da je funkcija $v(x, y)$ takođe rešenje date jednačine.

2° Rezultat iz 1° proveriti na primeru.

3° Pokazati da jednačina ima rešenje oblika $u=Y(y)\,e^{\frac{2ax^2}{y}}$

2885. Data je parcijalna jednačina

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

Pokazati da ova jednačina ima rešenje oblika

$$u=F\left(z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$

i odrediti ga.

2886. Data je parcijalna jednačina

$$\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

gde je $a=\text{const.}$

Pokazati da jednačina ima rešenje oblika $v=f\left(\dfrac{x}{\sqrt{t}}\right)$ i odrediti ga.

Pokazati da je $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ takođe rešenje date parcijalne jednačine.

2887. Pokazati da je rešenje $u=u(x, t)$ jednačine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{t}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (a=\text{const})$$

koje zadovoljava uslove $u(x, t)\Big|_{t=0}=f(x)$, $\dfrac{\partial u(x, t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=F(x)$

dato relacijom

$$u(x, t)=\frac{1}{2}\Big[f(x-at)+f(x+at)\Big]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(s)\,ds.$$

2888. Odrediti funkciju $u(x, t)$ koja zadovoljava parcijalnu jednačinu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}=e^{-t}\cos x$$

i uslove

$$u(x, t)\Big|_{t=0}=0,\quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\Big|_{x=0}=0$$

Pokazati da tražena funkcija $u(x, t)$ ima osobinu $u(x, t)\to\sin t$ kada $t\to\infty$.

2889. Pokazati da parcijalna jednačina

$$r-2s+t=0$$

ima rešenje oblika $z=xf(x+y)+g(x+y)$ gde su f i g diferencijabilne funkcije po $x+y$. Odrediti ono od rešenja koje zadovoljava uslove

$$z\big|_{x=0}=ay^2,\ z\big|_{y=0}=bx^2 \ (a \text{ i } b \text{ su konstante, } ab\neq 0).$$

2890. Ako je $u(x, y, z)$ rešenje Laplaceove jednačine

$$u_{xy}+u_{yy}+u_{zz}=0$$

pokazati da su tada rešenja i funkcije.

$u_x,\ xu_x+yu_y+zu_z,\ yu_x-xu_y,\ y^2u_{xx}-2xyu_{xy}+x^2u_{yy}+zu_z.$

2891. Ako je $\dfrac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}}{\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}}$, $z=z(x,y)$,

funkcija samo od z, pokazati da je funkcija $u=\dfrac{\dfrac{\partial z}{\partial x}}{\dfrac{\partial z}{\partial y}}$ rešenje parcijalne

diferencijalne jednačine $u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

2892. Data je parcijalna diferencijalna jednačina $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

1° Pokazati da su

$$z=ce^{ax+a^2y},\quad z=ce^{-a^2y}\cos(ax+b)$$

gde su c, a i b proizvoljne konstante, sva rešenja oblika $z=f(x)g(y)$.

2° Pokazati da su funkcije

$$H(a,x,y)=e^{ax+a^2y},\ \frac{\partial}{\partial a}H(a,x,y),\ \frac{\partial}{\partial a}H(a,x,y),\ \frac{\partial^2}{\partial a^2}H(a,x,y),$$

$\dfrac{\partial^3}{\partial a^3}H(a,x,y)\ldots$, takođe rešenja date jednačine.

2893. Data je biharmonijska parcijalna jednačina

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=0$$

1° Pokazati da ona ima sledeća rešenja:

$x,\ x^2,\ x^3,\ xy,\ x^2y,\ x^3y,\ x\cos\lambda x\operatorname{ch}\lambda x,\ y\cos\lambda\ x\operatorname{ch}\lambda y,\ y^4-x^4.$

2° Ako su $\varphi(x,y)$ i $\psi(x,y)$ dve harmonijske funkcije, pokazati da su funkcije $\varphi+x\psi$, $\varphi+y\psi$, $(x^2+y^2)\varphi$ biharmonijske.

§ 11. Varijacioni račun

Neka je Y skup funkcija $y=y(x)$ sa datim uslovima. Funkcija $J(y)$, definisana na Y sa vrednostima u skupu realnih brojeva R zove se funkcional nad Y.
Ispitivanje ekstremuma funkcionala $J(y)$, koji je zadat preko integrala, je problem varijacionog računa. Zavisno od toga kakvi su uslovi funkcija y i od kolikog su broja promenljivih imamo razne probleme varijacionog računa. Navodimo neke:

1° Neka data funkcija $f(x,y,y')$ ima neprekidne parcijalne izvode po x, y i y' u oblasti $a<x<b$, $y_1<y<y_2$. Kazaćemo da funkcional

$$(1)\qquad J(y)=\int_a^b f(x,y,y')\,dx$$

ima *slabi minimum (maksimum)* na funkciji $\bar y(x)$ ako iz

$$|y(x)-\bar y(x)|+|y'(x)-\bar y'(x)|<\varepsilon\qquad(a<x<b,\ \varepsilon>0)$$

sledi

$$J(y)-J(\bar y)>0\quad(J(y)-J(\bar y)<0).$$

Funkcional (1) ima *jaki minimum (maksimum)* na funkciji $\bar y(x)$ ako iz

$$|y(x)-\bar y(x)|<\varepsilon\qquad(a<x<b,\ \varepsilon>0)$$

sledi

$$J(y)-J(\bar y)>0\qquad(J(y)-J(\bar y)<0).$$

Svaki jaki ekstremum je i slabi ekstremum.

Potreban uslov da funkcional $J(y)$, definisan sa (1) pod uslovima $y(a)=A$, $y(b)=B$, ima ekstremum na y jeste da $y=y(x)$ zadovoljava sledeću *Euler-Lagrangeovu jednačinu*

$$(2)\qquad \frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}=0.$$

Kriva koja zadovoljava jednačinu (2) zove se *ekstremala* integrala $J(y)$. *Dovoljan uslov* da $J(y)$ ima ekstremum na y jeste:

a) za slabi minimum: 1) $\dfrac{\partial f}{\partial y}-\dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial f}{\partial y'}=0$; 2) Jacobijev uslov

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{d}{dx}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'}\right)u-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}u'\right)=0$$

gde je $u=\dfrac{\partial y}{\partial c}$ a $y=\bar y(x,c)$ ekstremala koja zadovoljava uslov $y(a)=A$; 3) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y'^2}>0$ za y i y' na ekstremali.

b) za jaki minimum uslovi 1) i 2) iz a) i $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y'^2}>0$ za tačke (x,y) koje su bliske ekstremali. Pri tome treba da postoji $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y'^3}$. Za slabi i jaki maksimum u uslovu 3) zameniti umesto znaka $<$ znak $>$.

2° Potreban uslov da funkcional

$$(3)\qquad J(y)=\int_a^b f(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})\,dx$$

ima ekstremum za $y=y(x)$, pod uslovima

$$y(a)=A_0,\ y'(a)=A_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(a)=A_{n-1};$$

$$y(b)=B_0,\ y'(b)=B_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(b)=B_{n-1},$$

jeste da $y=y(x)$ zadovoljava jednačinu

$$(4)\qquad \frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}+\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y''}-\cdots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}=0.$$

3° Potreban uslov da integral

$$(5)\qquad J[z(x,y)]=\iint_D f\left[x,y,z(x,y),\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right]dx\,dy$$

ima ekstremum za $z=z(x,y)$ (funkcija $z=z(x,y)$ ima određene vrednosti na konturi oblasti D), jeste da funkcija z zadovoljava jednačinu

$$(6)\qquad \frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial q}=0$$

gde je $p=\frac{\partial z}{\partial x}$ i $q=\frac{\partial z}{\partial y}$.

4° Potreban uslov da funkcional

$$J(y)=\int_a^b f(x,y,y')\,dx,$$

gde su $(a,\varphi(a))$ i $(b,\psi(b))$ pokretne tačke na krivama $y=\varphi(x)$ i $y=\psi(x)$, ima ekstremum za $y=y(x)$, jeste da funkcija y zadovoljava uslove:

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}=0 \qquad \text{(Euler-Lagrangeova jednačina)}$$

$$\left.\begin{aligned} &f+(\psi'-y')\frac{\partial f}{\partial y'}\bigg|_{x=b}=0\\ &f+(\varphi'-y')\frac{\partial f}{\partial y'}\bigg|_{x=a}=0\end{aligned}\right\}\qquad \text{uslovi transverzalnosti).}$$

Ako je donja granica a konstantna onda otpada druga jednačina u uslovu transverzalnosti, a ako je gornja granica b konstantna, otpada prva jednačina.

5° Uslovni ekstremumi. Dat je funkcional

$$(7)\qquad J(y_1,y_2,\ldots,y_n)=\int_a^b f(x,y_1,y_2,\ldots,y_n,y_1',y_2',\ldots,y_n')\,dx$$

gde su $y_i=y_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ nepoznate funkcije koje ispunjavaju granične uslove $y_i(a)=A_i$, $y_i(b)=B_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ i uslov

$$(8)\qquad \varphi_k(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)=0\quad (k=1,2,\ldots,m;\ m<n).$$

Potreban uslov da ovaj integral postiže ekstremum jeste

$$(9)\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial y_i}-\dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial y_i'}=0 & (i=1,2,\ldots,n)\ \text{i}\\ \varphi_k=0 & (k=1,2,\ldots,m)\end{cases}$$

gde je $F=f+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k(x)\varphi_k$ a λ_k funkcije koje treba odrediti iz uslova (9).

U slučaju da su uslovi (8) dati u obliku

$$(8')\qquad \int_a^b \varphi_k(x,y_1,y_2,\ldots,y_n,y_1',y_2',\ldots,y_n')\,dx=l_k \qquad (k=1,2,\ldots,m)$$

gde su l_k konstante, dobijamo takozvani izoperimetrijski problem. Uslovi (8') se zovu izoperimetrijski uslovi.

Potreban uslov da integral (7) pod uslovima (8') ima ekstremum jeste da funkcije y_i zadovoljavaju odgovarajuće jednačine

$$(10)\qquad \frac{\partial f}{\partial y_i}+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'}+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i'}\right)=0 \qquad (i=1,2,\ldots,n).$$

gde su λ_k konstante koje se određuju zajedno sa $2n$ integracionih konstanti iz $2n$ graničnih uslova i m izoperimetrijskih uslova.

2894. Analizirati specijalne slučajeve Euler-Lagrangeove jednačine (2): 1° $f=f(x,y)$; 2° $f=\varphi(x,y)+y'\psi(x,y)$. Da li u tim slučajevima uvek postoji ekstremum integrala $I(y)=\int_a^b f\,dx$?

2895. Napisati Euler-Lagrangeovu jednačinu u slučajevima: 1° $f=f(x,y')$; 2° $f=f(y')$; 3° $f=f(y,y')$. U slučaju 2° naći familiju ekstremala.

2896. Od svih krivih koje prolaze kroz tačke (a,A) i (b,B) naći onu koja ima najmanju dužinu luka između ovih tačaka)*.

2897. Od svih krivih koje prolaze kroz tačke (a,A), (b,B) naći onu čiji luk rotacijom oko Ox-ose opisuje najmanju površinu.

Naći ekstremale sledećih integrala:

2898. $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\,dx$; $y(x_1)=y_1$, $y(x_2)=y_2$.

2899. $\displaystyle\int_{-1}^{1}x^2y'^2\,dx$; $y(-1)=-1$, $y(1)=1$.

2900. $\displaystyle\int_0^1(xy+y^2-2y^2y')\,dx$; $y(0)=1$, $y(1)=2$.

2901. $\displaystyle\int_0^1(y^2+2xy')\,dx$; $y(0)=0$; $y(1)=1$.

2902. $\displaystyle\int_0^4\sqrt{y(1+y'^2)}\,dx$; $y(0)=\frac{5}{4}$, $y(4)=\frac{13}{4}$.

* U narednim zadacima pod „krivom" se podrazumeva Jordanova kriva.

2903. $\int_1^2 y'(1+x^2y')\,dx;\quad y(1)=1,\ y(2)=\frac{1}{2}.$

2904. $\int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx.$

2905. $\int_{x_1}^{x_2} (y'^2+2yy'-16y^2)\,dx;$

2906. $\int_{x_1}^{x_2} (xy'+y'^2)\,dx.$

2907. $\int_0^1 \frac{1+y^2}{y'^2}\,dx;\quad y(0)=0,\ y(1)=1.$

2908. $\int_{x_1}^{x_2} (y^2+y'^2-2y\sin x)\,dx.$

2909. $\int_{x_1}^{x_2} (y^2-y'^2-2y\,\mathrm{ch}\,x)\,dx.$

2910. $\int_{x_1}^{x_2} (y^2-y'^2-2y\sin x)\,dx.$

2911. $\int_{x_1}^{x_2} (y^2+y'^2+2ye^x)\,dx.$

2912. $\int_{x_0}^{x_1} (x^2-y^2)^{\frac{n}{2}}\sqrt{1+y'^2}\,dx.$

2913. $\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y^a}\,dx.$

Ispitati ekstremum funkcionala:

2914. $\int_0^a (y'^2-y^2)\,dx;\quad y(0)=0;\ y(a)=0.$

2915. $\int_{-1}^1 (x^2y'^2+12y^2)\,dx;\quad y(-1)=-1,\ y(1)=1.$

2916. $\int_1^2 y'(1+x^2y')\,dx;\quad y(1)=1,\ y(2)=4.$

2917. $\int_0^{\pi/4} (4y^2-y'^2+8y)\,dx;\quad y(0)=-1,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0.$

2918. $\int_0^1 (y^2+y'x^2)\,dx;\quad y(0)=0,\ y(1)=A.$

2919. $\int_1^2 (x^2y'^2+12y^2)\,dx;\quad y(1)=1,\ y(2)=8.$

2920. $\int_0^1 (y'^2+y^2+2ye^{2x})\,dx;\quad y(0)=\frac{1}{3},\ y(1)=\frac{1}{3}e^2.$

2921. $\int_0^{\pi/4} (y^2-y'^2+6y\sin 2x)\,dx;\quad y(0)=0,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1.$

2922. $\int_0^1 \frac{1+y^2}{y'^2}\,dx;\quad y(0)=0,\ y(1)=1.$

2923. $\int_0^b y'^3\,dx;\quad y(0)=0,\ y(b)=g>0.$

2924. $\int_0^1 (y'^2-yy'^3)\,dx;\quad y(0)=0,\ y(1)=0.$

2925. $\int_1^2 (xy'^4-2yy'^3)\,dx;\quad y(1)=0,\ y(2)=1.$

2926. $\int_0^a (6y'^2-y'^4+yy')\,dx;\quad y(0)=0,\ y(a)=b\quad (a>0,\ b>0).$

2927. $\int_1^3 (12xy+y'^2)\,dx;\quad y(1)=0,\ y(3)=26.$

2928. $\int_0^a (y'^2+2yy'-16y^2)\,dx;\quad y(0)=0,\ y(a)=0,\quad (a>0).$

2929. $\int_0^a \frac{dy}{y'};\ y(0)=0,\ y(a)=b\quad (a>0,\ b>0).$

2930. $\int_0^a \frac{dx}{y'^2};\quad y(0)=0,\ y(a)=b.$

2931. $\int_0^2 \frac{x^3}{y'^2}\,dx;\quad y(0)=0,\ y(2)=4.$

Naći dovoljan uslov za postojanje ekstremale funkcionala:

2932. $\int_a^b f(x,y)\,dx.$

2933. $\int_{-a}^a \left(x^2y+\frac{y^3}{3}-a^2y\right)dx;\quad y(-a)=y(a)=0\quad (a>0).$

2934. Date su dve tačke A i B. Odrediti putanju materijalne tačke M koja usled svoje sopstvene težine, za najkraće vreme stiže iz tačke A u tačku B (problem brahistohrone).

Ispitati ekstrem[illegible] integrala:

2935. $\int\limits_0^{x_1} e^x \sqrt{1+y'^2}\,dx$, $y(0)=0$, $-\pi < y(x_1) = y_1 < \pi$.

2936. $\int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{y(1+y'^2)}\,dx$; $y(x_0)=y_0>0$, $y(x_1)=y_1>0$.

2937. $\int\limits_0^{\pi} y'^2 \cos^2 x\,dx$; [illegible] $y(\pi)=0$.

2938. Naći najkraće [illegible] tačke $A(a, a_1)$ do krive $y=\varphi(x)$.

2939. Između svih [illegible] olaze kroz tačku $A(0, 0)$ i tačke krive $y^3=2-x$, od[illegible] za koju je integral $I(y)=\frac{1}{2}\int\limits_{(0,0)}^{(x_1,y_1)} (y'^2-y^2)\,dx$ minimalan.

2940. Neka je $I(y)=\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y)\sqrt{1+y'^2}\,dx$ gde su granične tačke sa apscisama x_0 i x_1 redom na krivim Γ_1 i Γ_2. Pokazati da ekstremala datog integrala ortogonalno seče krive Γ_1 i Γ_2. U slučaju da je $F(x, y)\equiv 1$, pokazati da je ekstremala prava linija ortogonala na Γ_1 i Γ_2.

2941. Naći ekstre[illegible]lu funkcionala $\int\limits_0^{a} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\,dx$; $y(0)=0$, pri čemu se tačka (a, y) nala[illegible] na krugu $(x-9)^2+y^2=9$.

2942. Naći ekstre[illegible]lu funkcionala $\int\limits_0^{\pi/4} (y^2-y'^2)\,dx$; $y(0)=0$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=t$ (t proizvoljno).

2943. Naći najk[illegible] ras[illegible]

2944. Kako glase [illegible] transverzalnosti za funkcional $\int\limits_a^x f(x, y, y')\,dx$, $y(a)=A$, gde je druga gra[illegible]čna tačka na pravoj $y=\text{const}$.

2945. Za kakve integrale oblika $\int F(x, y, y')\,dx$ transverzalnost prelazi u ortogonalnost?

2946. Naći sve integrale $\int F(x, y, y')\,dx$ kod kojih transverzale seku ekstremale pod uglom 45°.

2947. Naći ekstremalu integrala $\int\limits_0^1 (y'^2+x^2)\,dx$ pri uslovima $y(0)=0$, $y(1)=0$, $\int\limits_0^1 y^2\,dx=2$.

2948. Između svih krivih, čija je dužina luka između tačke $A(0, 0)$ i tačke $B(x_1, 0)$ jednaka l, naći onu čiji luk $\widehat{AB}$ sa tetivom $\overline{AB}$ ograničava najveću površinu.

2949. Između svih krivih koje prolaze kroz tačke $A(x_0, y_0)$ i $B(x_1, y_1)$ i čija je dužina luka $\widehat{AB}$ konstantna, naći onu koja opisuje najmanju površinu rotacijom oko Ox ose.

2950. Od svih krivih date dužine luka, između tačaka $A(x_0, y_0)$ i $B(x_1, y_1)$ naći onu koja prolazi kroz ove tačke i koja rotacijom oko Ox ose opisuje omotač rotacionog tela najveće ili najmanje zapremine.

2951. Od svih krivih koje prolaze kroz koordinatni početak i tačke prave $x=a$, naći onu koja ima najmanju dužinu za $x\in[0, a]$ i koja sa osom Ox i pravom $x=a$ ograničava datu površinu P.

2952. Naći ekstremum funkcionala $\int\limits_0^{\pi} y'^2\,dx$ pri uslovima

$$\int\limits_0^{\pi} y^2\,dx=1,\ y(0)=y(\pi)=0.$$

2953. Prava OM zaklapa sa Oy osom ugao α. Neka je l dužina krive c koja prolazi kroz tačku $A(0, b)$ i tačku $B(x_1, y_1)$ na pravoj OM. Odrediti krivu c tako da površina ograničena ovom krivom i kracima ugla α bude maksimalna.

2954. Naći krivu $y=y(x)$, $y(0)=y(1)=0$ za koju funkcional $\int\limits_0^1 y''^2\,dx$ ima ekstremum.

2955. Naći funkciju $y=y(x)$ za koju funkcional $\int\limits_0^1 (2xy+y'''^2)\,dx$

$$y(0)=y'(0)=y''(0)=0,\ y(1)=\frac{1}{7!},\ y'(1)=\frac{1}{6!},\ y''(1)=\frac{1}{5!}$$ ima ekstremum.

2956. Date su prave AC i BD i tačke $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$ na ovim pravama. Naći krivu koja dodiruje date prave u datim tačkama i da površina između tražene krive, njene evolute i poluprečnika krivina u tačkama A i B bude najmanja.

2957. Naći zatvorenu krivu date dužine koja ograničava najveću površinu.

2958. Pokazati da integral $\int\limits_{x_0}^{x_1} (y'')^n dx$ ima ekstremale date jednačinom $(n-2)\,y'''^3 + y''\,y^{\mathrm{IV}} = 0$ čiji je opšti integral

$$y = (c_1 x + c_2)^{\frac{2n-1}{n-1}} + c_3 x + c_4 .$$

2959. Pokazati da ekstremala funkcionala $\int\limits_{z_0}^{z_1} F(z)\sqrt{1+x'^2+y'^2}\,dz$ zadovoljava jednačine

$$F(z)\,x' = c_1\sqrt{1+x'^2+y'^2}\,, \quad F(z)\,y' = c_2\sqrt{1+x'^2+y'^2}\,.$$

2960. Koristeći ekstremum funkcionala $\int\limits_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$ pokazati da je najkraće rastojanje između dve tačke u prostoru prava linija.

2961. Pokazati da integral $\int\limits_0^1 (y'^2+z'^2-4\,xz-4\,z)\,dx$ uz uslove $y(0)=0,\ y(1)=1,\ z(0)=0,\ z(1)=1,\ \int\limits_0^1 (y'^2-xy'-z'^2)\,dx=2$ ima ekstremum na krivoj

$$y = -\frac{5}{2}x^2 + \frac{7}{2}x, \quad z = x .$$

2962. Naći ekstremale funkcionala $\int\limits_0^{\pi/2} (y'^2+z'^2+2\,yz)\,dx;\ y(0)=0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,$ $z(0)=0,\ z\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1.$

2963. Naći krivu koja spaja tačku $O(0,0,0)$ sa tačkom $M(a,0,0)$, ima stalnu krivinu $1/\varrho$ i najveću dužinu luka $\widehat{OM}$.

2964. Naći površ $z=z(x,y)$ za koju integral $I(z)=\iint\limits_D (p^2-q^2)\,dx\,dy$ postiže ekstremum.

2965. Ako integral $I(z)=\iint\limits_D (p^2+q^2)\,dx\,dy$ ima ekstremum tada se funkcija $z=z(x,y)$ dobija iz jednačine $\nabla^2 z=0$. Dokazati.

2966. Naći jednačinu iz koje se dobija funkcija $z=z(x,y)$ ako integral $I(z)= \iint\limits_D [p^2+q^2+2\,z f(x,y)]\,dx\,dy$ postiže ekstremum za tu funkciju.

2967. Naći diferencijalnu jednačinu minimalnih površi, tj. od svih površi $z=z(x,y)$ koje prolaze kroz datu konturu c, naći onu koja ima mini-

malnu površinu u toj konturi. Specijalno naći minimalne površi oblika $z=\varphi(x)+\psi(y)$.

2968. Pokazati da je jaki minimum integrala $\iint\limits_S \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$ postignut na minimalnoj površi $z=z(x,y)$ koja prolazi kroz zatvorenu krivu c, gde je S oblast ravni xOy na koju se projektuje int c.

2969. Naći potreban uslov za minimum integrala

$$\iiint\limits_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz.$$

2970. Kriva najmanje dužine koja spaja dve tačke na datoj površi zove se geodezijska linija. Pokazati da su na obrtnoj površi $\varrho^2=2f(z)$ između tačaka $A(\varrho_0,\varphi_0,z_0)$ i $B(\varrho_1,\varphi_1,z_1)$ geodezijske linije

$$\varphi = c_2 + \frac{c_1}{2} + \int \sqrt{\frac{f'^2+2f}{2f-c_1^2}}\,\frac{dz}{f}.$$

2971. Naći geodezijske linije na sferi $x^2+y^2+z^2=a^2$.

2972. Naći geodezijske linije na površi $x^2+y^2=a^2$.

2973. Pokazati da se geodezijske linije na obrtnoj površi $x=\varrho\cos\varphi,\ y=\varrho\sin\varphi,$ $z=f(\varrho)$ dobijaju iz jednačine $\dfrac{d\varphi}{d\varrho}=\dfrac{c_1\sqrt{1+f'^2(\varrho)}}{\varrho\sqrt{\varrho^2-c_1^2}}.$

2974. Naći najkraće rastojanje između kruga $x^2+y^2=a^2,\ z=0$ i hiperbole $z^2-y^2=b^2,\ x=0.$

2975. Između površi $z=z(x,y)$, koje prolaze kroz zatvorenu konturu c i koje sa vertikalnim cilindrom koji prolazi kroz c i ravni xOy zaklapa datu zapreminu V, napisati diferencijalnu jednačinu one koja u konturi c ima minimalnu površinu.

2976. Između površi $z=z(x,y)$ sa datom površinom S koju odseca ravan xOy, naći onu kod koje je težište tela T, isečenog ravni xOy i ovom površi, najniže. Kako ova površ seče ravan xOy?

2977. Od svih zatvorenih površi date površine S, naći parcijalnu jednačinu one koja ograničava najveću zapreminu. Pokazati da sferna površ zadovoljava dobijenu jednačinu.

Glava IX

KOMPLEKSNE FUNKCIJE

§ 1. Uvodni zadaci

2978. Ako su a i b kompleksni brojevi, dokazati da je:

1° $$|ab|=|a||b|, \quad |a/b|=|a|/|b| \quad (b\neq 0);$$

2° $$R_e(a)=\frac{1}{2}(a+\bar{a}), \quad I_m(a)=\frac{1}{2i}(a-\bar{a});$$

3° $$\overline{a\pm b}=\bar{a}\pm\bar{b}, \quad \overline{ab}=\bar{a}\bar{b}, \quad \overline{(a/b)}=\bar{a}/\bar{b};$$

4° $$\operatorname{Arg}(ab)=\operatorname{Arg}a+\operatorname{Arg}b, \quad \operatorname{Arg}(a/b)=\operatorname{Arg}a-\operatorname{Arg}b;$$

5° $$\big||a|-|b|\big|\leq|a+b|\leq|a|+|b|.$$

2979. Primerom pokazati da nije uvek $\arg(ab)=\arg a+\arg b$ pri determinaciji

$$-\pi<\arg z<\pi \quad (z\in(K))^*$$

2980. Kompleksan broj a je unimodularan ako je $|a|=1$. Pokazati da je kompleksan broj a unimodularan tada i samo tada ako se može napisati kao količnik dva konjugovano-kompleksna broja.

2981. Ako su a i b kompleksni brojevi, pokazati da su tačke $a-b$ i b simetrične u odnosu na tačku $\frac{a}{2}$.

2982. Ako su dva od kompleksnih brojeva $\frac{a-b}{c-d}$, $\frac{b-c}{a-d}$, $\frac{c-a}{b-d}$ čisto imaginarni, pokazati da je takav i treći.

---

* K u ovoj glavi označava skup kompleksnih brojeva.

2983. Pokazati da jednačina prave koja prolazi kroz tačke z_1 i z_2 ima oblik

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

2984. Ako je $(x+iy)=(u+iv)^n$, gde je n ceo broj a $x, y, u, v\in R$, tada je $x^2+y^2=(u^2+v^2)^n$. Dokazati.

Dokazati sledeće jednakosti:

2985. 1° $$\sin^5 x=\frac{1}{16}(\sin 5x-5\sin 3x+10\sin x);$$

2° $$\cos^4 x\sin^3 x=-\frac{1}{64}(\sin 7x+\sin 5x-3\sin 3x-3\sin x).$$

2986. 1° $$\sin^{2n} x=\frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\left[\cos 2nx-2n\cos(2n-2)x+\frac{2n(2n-1)}{1\cdot 2}\cos(2n-4)x+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\frac{(-1)^n}{2}\cdot\frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{1\cdot 2\cdots n}\right];$$

2° $$\sin^{2n+1} x=\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\left[\sin(2n+1)x-(2n+1)\sin(2n-1)x+\right.$$
$$\left.+\frac{(2n+1)2n}{1\cdot 2}\sin(2n-3)x+\cdots+(-1)^n\frac{(2n+1)2n\cdots(n+2)}{n!}\sin x\right].$$

2987. $$\cos^n x=2^{1-n}\left[\cos nx+n\cos(n-2)x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos(n-4)x+\cdots+A\right],$$

gde je $A=\frac{1}{2}\,\frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{n!}$ ako je $n=2K$ i

$$A=\frac{(2n+1)2n\cdots(n+2)}{n!} \quad \text{ako je} \quad n=2K+1.$$

Dokazati sledeće jednakosti:

2988. $$\sum_{k=1}^{n}\cos^2 kx=\frac{2^n-1}{4}+\frac{\sin(2n+1)x}{4\sin x}.$$

2989. $$(z+a)^{2m}-(z-a)^{2m}=4maz\prod_{k=1}^{m-1}[z^2+a^2\operatorname{ctg}^2(k\pi/2m)].$$

2990. $$\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}[\cos\theta-\cos(k\pi/n)].$$

2991. $\dfrac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta}=(2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left[1-\dfrac{\sin^2\theta}{\sin^2 k\pi/(2n+1)}\right].$

2992. $\cos 2n\theta=(-1)^n\prod_{k=1}^{n}\left[1-\dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2(2k-1)\pi/4n}\right].$

2993. Naći zbir $\cos nx+2\cos(n-1)x+\cdots+(n-1)\cos 2x+n\cos x.$

2994. Pokazati da je $x^{2n}-1\equiv(x^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\dfrac{k\pi}{n}+1\right)$ i da je

$$x^{2n+1}-1\equiv(x-1)\prod_{k=1}^{n}\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1\right)$$ pa na osnovu toga proveriti jednakosti:

1° $\sin\dfrac{\pi}{2n}\sin\dfrac{2\pi}{2n}\cdots\sin\dfrac{(n-1)\pi}{2n}=\dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$

2° $\cos\dfrac{\pi}{2n+1}\cos\dfrac{2\pi}{2n+1}\cdots\cos\dfrac{n\pi}{2n+1}=(-1)^{\frac{n}{2}}\Big/2^n$ (n parno).

2995. Ako se zna da jednačina $x^5-2x^4+2x^2-4=0$ ima kompleksan koren čiji je argument $\pi/4$, odrediti taj koren.

Rešiti jednačine:

2996. $\prod_{k=1}^{n}(\cos kx+i\sin kx)=1.$ **2997.** $z^{n-1}=\bar{z}$ $(n\in N).$

2998. Učenik je računao ovako: $-1=\sqrt{-1}\,\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{1}=1.$ Gde je napravio grešku?

2999. Pokazati da su sve nule polinoma $R_e\{(1+ix)^n\}-I_m\{(1+ix)^n\}$ $(x\in R)$ realne.

3000. Koju krivu predstavlja skup tačaka

$$\left\{z:\quad z=ae^{it}+\frac{1}{ae^{it}},\quad a\neq 0,\quad a\in R,\quad -\infty<t<\infty\right\}.$$

Šta je skup tačaka z određen uslovima:

3001. $|z-2|<|z|.$ **3002.** $|z-1|>2|z-i|.$

3003. $|z-2|-|z+2|>2.$ **3004.** $|z|=R_e(z)+1.$

3005. $R_e\left(\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right)=0.$ **3006.** $I_m\left(\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right)=0.$

3007. $0<\arg\dfrac{z-i}{z+i}<\pi/4.$

3008. Pokazati da jednačina $\delta z\bar{z}+a\bar{z}+\bar{a}z+\gamma=0$ $(\delta,\ \gamma\in R)$ predstavlja:
1° kružnicu koja ne prolazi kroz koordinatni početak ako je $\delta\neq 0$, $\gamma\neq 0$, $\gamma\delta-|a|^2<0$;
2° kružnicu koja prolazi kroz koordinatni početak ako je $\delta\neq 0$, $\gamma=0$;
3° pravu koja prolazi kroz koordinatni početak ako je $\delta=\gamma=0$. I obrnuto, svaka jednačina kružnice ili prave može se napisati u obliku $\delta z\bar{z}+a\bar{z}+\bar{a}z+\gamma$ $(\delta,\ \gamma\in R)$.

3009. Ako je $|z_1|=|z_2|=|z_3|$, dokazati da je $\arg\dfrac{z_3-z_2}{z_3-z_1}=\dfrac{1}{2}\arg\dfrac{z_2}{z_1}.$

3010. Ako je $\left|\sum_{k=1}^{n}z_k\right|=\sum_{k=1}^{n}|z_k|$, tada je $\arg z_k=\arg z_1$ $(k=2,\ 3,\ \cdots,\ n)$ i obrnuto. Dokazati.

Dokazati da je:

3011. $\left|\dfrac{|a|-|b|}{|c|+|d|}\right|<\left|\dfrac{a+b}{c+d}\right|<\left|\dfrac{|a|+|b|}{|c|-|d|}\right|.$ **3012.** $|R_e(a)|+|I_m(a)|<|a|\sqrt{2}.$

gde su a, b, c i d kompleksni brojevi.

3013. Dokazati da je $\left|\dfrac{a_2z^2+a_1z+a_0}{\bar{a}_0z^2+\bar{a}_1z+\bar{a}_2}\right|=1$

ako je $|z|=1$. Da li se ovo tvrđenje može generalisati na polinom n-og stepena?

3014. Dokazati da iz $|z_k|<1$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ sledi

$$\left|\prod_{k=1}^{n}(1-z_k)\right|>1-\sum_{k=1}^{n}|z_k|.$$

Dokazati da je:

3015. $|(1+z)^n-1|<(1+|z|)^n-1.$

3016. $|z-1|<\big||z|-1\big|+|z||\arg z|.$

3017. $\left|\sum_{k=1}^{n}a_k b_k\right|^2<\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2\right)$ $(a_k,\ b_k\in K).$

3018. Data je sfera $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$ i ravan $\zeta=-1$ u prostornom koordinatnom sistemu $0\xi\eta\zeta$. Centralnim projektovanjem tačaka sfere iz centra $(0,\ 0,\ 1)$ na ravan $\zeta=-1$, obostrano jednoznačno se preslikavaju tačke sfere, izuzev tačke $(0,\ 0,\ 1)$, u ravan $\zeta=-1$ koju ćemo označiti sa z-ravan. Tački $(0,\ 0,\ 1)$ se dodeljuje (po konvenciji) tačka u beskonačnosti z-ravni. Ovo preslikavanje se zove *stereografsko* projektovanje. Naći funkciju ovog preslikavanja.

3019. Dokazati da je stereografska projekcija kružnice koja prolazi kroz tačku $(0,\ 0,\ 1)$ kružnica ili prava i da svakoj pravoj ili kružnici u z-ravni odgovara na sferi kružnica.

3020. Naći na sferi $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$ tačke čije su stereografske projekcije

1° $z=0$; 2° $z=i$; 3° $z=-1$; 4° $z=e^{-\frac{\pi}{4}i}$.

3021. Šta je stereografska projekcija meridijana geografske dužine α?

3022. Naći skup tačaka sfere $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$ čija je stereografska projekcija

1° $\arg z=\alpha$; 2° $|z|=r$.

3023. Neka je $m\in R$ i $w\in K$. Kakav mora biti w da bi jednačina $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^m=w$ imala samo realne korene?

3024. Ako je $z_1+z_2+z_3=0$ i $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, pokazati da su tačke z_1, z_2 i z_3 temena ravnostranog trougla upisanog u jediničnu kružnicu.

3025. Ako je $z_1+z_2+z_3+z_4=0$ i $|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|$, pokazati da su tačke z_1, z_2, z_3 i z_4 temena pravougaonika ili se dve i dve poklapaju.

3026. Ako su tačke z_1, z_2 i z_3 temena ravnostranog trougla, proveriti jednakost $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$.

3027. Tačke $z_1, z_2, \cdots, z_n$ su sa jedne strane neke prave koja prolazi kroz koordinatni početak. Pokazati da to isto važi za tačke $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \cdots, \frac{1}{z_n}$ i da je $z_1+z_2+\cdots+z_n\neq 0$ i $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\cdots+\frac{1}{z_n}\neq 0$.

3028. Ako je $z_1+z_2+\cdots+z_n=0$, dokazati da proizvoljna prava koja prolazi kroz koordinatni početak razdvaja te tačke ukoliko nisu sve na toj pravoj.

3029. U kružnici poluprečnika R sa centrom u tački $c=a+bi$ upisan je pravilni n-tougaonik čije je jedno teme u tački $z_0=a+(b+R)i$. Odrediti ostala temena.

3030. Tačke z_1 i z_2 su dva susedna temena pravilnog n-tougla. Naći teme z_3 susedno temenu z_2 $(z_3\neq z_1)$.

3031. Sastaviti jednačinu čiji bi koreni bili brojevi:

1° $\sin^2\frac{\pi}{2n+1}$, $\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}$, $\cdots$, $\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}$;

2° $\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2n+1}$, $\operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{2n+1}$, $\cdots$, $\operatorname{ctg}^2\frac{n\pi}{2n+1}$.

3032. 1° Na krugu opisanom oko pravilnog n-tougla $A_1A_2\cdots A_n$ uzeta je tačka M. Dokazati da zbir kvadrata rastojanja te tačke do svih temena toga n-tougla ne zavisi od položaja te tačke i da iznosi $2\pi R$, gde je R poluprečnik kruga.

2° Dokazati da zbir kvadrata rastojanja od proizvoljne tačke M uzete u ravni pravilnog n-tougaonika, do svih njegovih temena zavisi samo od rastojanja l tačke M od centra O n-tougaonika i da je jednak $n(R^2+l^2)$, gde je R poluprečnik kruga opisanog oko n-tougaonika.

3° Dokazati da tvrđenje 2° ostaje u važnosti i u slučaju kad tačka M leži izvan ravni n-tougaonika.

3033. Na luku $\widehat{A_1A_n}$ kružnice opisane oko pravilnog n-tougaonika $A_1A_2\cdots A_n$ nalazi se tačka M. Dokazati:

1° Ako je n parno, onda je zbir kvadrata rastojanja od tačke M do temena n-tougaonika sa parnim indeksima jednak zbiru kvadrata rastojanja te tačke do temena sa neparnim indeksima.

2° Ako je n neparno, onda je zbir rastojanja od tačke M do temena n-tougaonika sa parnim indeksima jednak zbiru rastojanja te tačke do temena sa neparnim indeksima.

3034. Ako je R poluprečnik kružnice, opisane oko pravilnog n-tougaonika $A_1A_2\cdots A_n$, dokazati da je:

1° Zbir kvadrata svih i svih strana n-tougaonika jednak n^2R^2.

2° Zbir svih strana i dijagonala iznosi $nR\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}$.

3° Proizvod svih strana i svih dijagonala iznosi $n^{\frac{n}{2}}R^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

3035. Naći zbir 50-ih stepena svih strana i svih dijagonala pravilnog 100-ugaonika, upisanog u krug poluprečnika R.

§ 2. Kompleksna funkcija. Granična vrednost i neprekidnost

1° Neki topološki pojmovi.

1) *Okolina tačke* z_0 je svaki skup koji sadrži skup

$$Vz_0(\varepsilon)=\{z:\ |z-z_0|<\varepsilon,\ \varepsilon>0\}.$$

Skup $Vz_0(\varepsilon)$ se naziva *disk* tačke z_0. Okolina tačke $z=\infty$ je svaki skup koji sadrži skup

$$\{z:\ |z|>R,\ R>0\}.$$

2) Tačka z_0 je *tačka nagomilavanja* skupa $E\subset K\cup\{\infty\}$ ako i samo ako u svakoj njenoj okolini postoji bar jedna tačka $z_1\neq z_0$ koja pripada E.

3) Skup E je *zatvoren* ako mu pripada svaka njegova tačka nagomilavanja.

4) Tačka z_0 je *unutrašnja tačka* skupa E ako i samo ako skupu E pripada bar jedan disk tačke z_0.

5) Tačka nagomilavanja skupa E, koja nije unutrašnja tačka skupa E je *tačka ruba* skupa E.

6) Skup E koji se sastoji samo od unutrašnjih tačaka je *otvoren skup*.

7) Neprekidna kriva $z=z(t)=x(t)+iy(t)$, $t\in[a,b]$ ($x(t)$ i $y(t)$ su neprekidne funkcije) je *Jordanova kriva* ako iz $t_1\neq t_2$ $(t_1, t_2\in[a,b])$ sledi $z(t_1)\neq z(t_2)$. Ako je $z(a)=z(b)$ i $t_1\neq t_2$ $(t_1, t_2\in(a,b))$ povlači $z(t_1)\neq z(t_2)$ kriva je *zatvorena Jordanova kriva*.

8) Jordanova kriva $z=z(t)$, $t\in[a,b]$ je *glatka kriva* ako su $\dot{x}(t)$ i $\dot{y}(t)$ neprekidne funkcije i ako je $\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)>0$ na $[a,b]$.

9) Kriva Γ sastavljena od konačnog broja glatkih krivih zove se *kontura* ili *putanja*.

10) Skup E je *ograničen* ako postoji konstanta $M>0$ takva da je $|z|<M$ za svako $z\in E$. U suprotnom je skup E *neograničen*.

11) Otvoren skup G je *oblast (domen)* ako se svake dve tačke iz G mogu spojiti poligonalnom linijom koja cela pripada G.

Skup $\bar{G}=G\cup\{$granične tačke od $G\}$ je *zatvorena oblast*.

12) G je *jednostruko povezana oblast* u konačnoj z-ravni, ako i samo ako iz $\Gamma\subset G$ sledi $\operatorname{int}\Gamma\subset G$, gde je Γ zatvorena Jordanova kriva, a $\operatorname{int}\Gamma$ skup tačaka unutar krive Γ.

G je jednostruko povezana oblast u proširenoj z-ravni ako i samo ako iz $\Gamma\subset G$ sledi $\operatorname{int}\Gamma\subset G$ ili $\operatorname{ext}\Gamma\subset G$ $(\operatorname{ext}\Gamma=\{z: z$ izvan krive $\Gamma\})$.

Ostale oblasti su višestruko povezane.

2° Preslikavanje. Neka je E_z skup tačaka z-ravni i E_w skup tačaka w-ravni. Funkcija $f:E_z\to E_w$ se naziva *kompleksna funkcija* w kompleksne promenljive z ili *preslikavanje* skupa E_z u skup E_w. Može se pisati i ovako $w=f(z)=u+iv$, gde su $u=u(x,y)$ i $v=v(x,y)$ realne funkcije a $z=x+iy$.

Ako pri preslikavanju $f:E_z\to E_w$ jednoj vrednosti $z\in E_z$ odgovara više vrednosti iz $w\in E_w$, kazaćemo da je $w=f(z)$ *multiformna* funkcija.

3° Elementarne funkcije.

Sledeće funkcije se obično nazivaju osnovnim elementarnim:

1) *Stepena funkcija* $w=z^n$ $(z\in K,\ n\in N)$.

2) *Polinom n-og stepena* $w=P_n(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0$ $(z\in K)$, a_i $(i=0, 1, \ldots, n)$ fiksirani kompleksni brojevi.

3) *Racionalna funkcija* $w=\dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ gde su $P_n(z)$ i $Q_m(z)$ polinomi i $z\neq z_i$, a z_i $(i=1, 2, \ldots, m)$ nule polinoma $Q_m(z)$.

4) *Eksponencijalna funkcija* $w=e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$ $(z=x+iy,\ z\in K)$.

5) *Trigonometrijske funkcije*:

$$w=\sin z=(e^{iz}-e^{-iz})/2i\quad (z\in K);\quad w=\cos z=(e^{iz}+e^{-iz})/2\quad (z\in K);$$

$$w=\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z}\quad \left(z\neq\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi,\ k\in C\right);\quad w=\operatorname{ctg} z=\frac{\cos z}{\sin z}\quad (z\neq k\pi,\ k\in C).$$

6) *Hiperbolične funkcije*:

$$w=\operatorname{sh} z=(e^z-e^{-z})/2\quad (z\in K);\quad w=\operatorname{ch} z=(e^z+e^{-z})/2\quad (z\in K).$$

$$w=\operatorname{tgh} z=\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}\ (\operatorname{ch} z\neq 0);\quad w=\operatorname{ctgh} z=\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}\ (\operatorname{sh} z\neq 0).$$

Multiformne elementarne funkcije:

1) Inverzna funkcija funkcije $w=z^n$ $(n\in N)$ je funkcija

$$w=\sqrt[n]{z}\,.$$

2) Inverzna funkcija funkcije $w=e^z$ je funkcija

$$w=\operatorname{Ln} z=\ln z+2k\pi i\quad (k\in C,\ z\neq 0)$$

gde je $\ln z=\ln|z|+i\arg z$ jednoznačna funkcija koja se zove glavna vrednost od $\operatorname{Ln} z$.

3) *Opšta eksponencijalna funkcija*

$$w=a^z=e^{z\operatorname{Ln} a}\quad (a\neq 0,\ a\in K).$$

4) *Opšta stepena funkcija*

$$w=z^\lambda=e^{\lambda\operatorname{Ln} z}$$

5) *Opšta logaritamska funkcija*

$$w=\operatorname{Log}_a z=\frac{\operatorname{Ln} z}{\operatorname{Ln} a}\quad (a\neq 0,\ a\in K).$$

Ovde $\operatorname{Ln} a$ označava jednu granu multiformne funkcije $\operatorname{Ln} a$.

6) *Inverzne trigonometrijske funkcije*:

$$w=\operatorname{Arc\,sin} z=\frac{1}{i}\operatorname{Ln}\left(zi\pm\sqrt{1-z^2}\right)\quad (z\in K);$$

$$w=\operatorname{Arc\,tg} z=\frac{1}{2i}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}\quad (z\neq\pm i);\quad \text{itd.}$$

4° Algebarska funkcija je rešenje jednačine

$$P_0(z)w^n+P_1(z)w^{n-1}+\cdots+P_{n-1}(z)w+P_n(z)=0$$

po w, gde su $P_0(z)\neq 0$, $P_1(z), \ldots, P_n(z)$ polinomi od z a n prir. broj.

5° Tačka grananja multiformne funkcije. Tačka z_0 je *tačka grananja* multiformne funkcije (kritična tačka), ako se, kad u ravni z oko nje opišemo zatvorenu Jordanovu krivu, slika ove ne zatvara u w-ravni. Ako se slika u ravni w zatvara tek ako opišemo zatvorenu krivu koja n-puta obilazi tačku z_0 z-ravni, tačka z_0 je *algebarska tačka grananja n-og reda*. Ako se u ravni w slika ne zatvara ma koliko obilazili z_0, z_0 je *transcendentna tačka grananja*.

6° Granična vrednost. 1) Kaže se da funkcija $w=f(z)$, koja je definisana u okolini tačke z_0, sem možda u z_0, ima graničnu vrednost A kad z teži ka z_0 ako za svako $\varepsilon>0$ postoji $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ takvo da je

$$|f(z)-A|<\varepsilon$$

za svako $z\neq z_0$ koje je u disku $Vz_0(\delta)$. To se označava

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A\quad \text{ili}\quad f(z)\to A\quad (z\to z_0).$$

Gornja definicija ostaje u važnosti ako je $z_0=\infty$ sa razlikom što se umesto diska $Vz_0(\delta)$ uzima skup $\{z: |z|>\delta\}$.

2) Ako za $f(z)$ i $g(z)$ koje su definisane u okolini tačke z_0 važi

$$f(z)\to A_1,\quad g(z)\to A_2\quad (z\to z_0),\quad \text{tada je:}$$

$$f(z)\pm g(z)\to A_1\pm A_2\quad (z\to z_0);$$

$$f(z)\,g(z)\to A_1 A_2\quad (z\to z_0);$$

$$\frac{f(z)}{g(z)}\to\frac{A_1}{A_2}\quad (z\to z_0)\quad (A_2\neq 0).$$

7° Neprekidnost. 1) Funkcija $f(z)$ je neprekidna u tački z_0 ako važi jednakost

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0);$$

2) Funkcija $f(z)$ je neprekidna u oblasti G ako je neprekidna u svakoj tački te oblasti.

3) Funkcija $f(z)$ je neprekidna u G tada i samo tada ako su neprekidne u toj oblasti $u(x, y)$ i $v(x, y)$.

4) Neprekidna funkcija u zatvorenoj oblasti je tu i ograničena.

8° Uniformna neprekidnost. Funkcija $f(z)$ je uniformno neprekidna u oblasti G ako za svako $\varepsilon>0$ postoji $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ takvo da je

$$|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$$

čim je $|z_1-z_2|<\delta(\varepsilon)\quad (z_1, z_2\in G)$.

3036. Dokazati da je presek dve okoline neke tačke okolina te tačke.

3037. Neka je $E=\left\{z: 1<|z|<2\wedge\frac{\pi}{6}<\arg z<\frac{\pi}{3}\right\}$. Da li je E zatvoren ili otvoren skup?

3038. Neka su $E\subset S$ i E i S otvoreni skupovi. Da li je $S\setminus E$ otvoren skup?

3039. Može li konačan skup E biti otvoren?

3040. Pokazati da je $K\cup\{\infty\}$ i otvoren i zatvoren skup.

3041. Da li je skup K zatvoren skup?

3042. Naći sliku krive $x^2-y^2=-2$ preslikavanjem $w=z^2$.

3043. Ako je $f(z)=\dfrac{3z+1}{3z-2}\quad\left(z\neq\dfrac{2}{3}\right)$, dokazati da je $f[f(z)]\equiv z$.

3044. Naći $u(x, y)$ i $v(x, y)$ za funkciju $w=\dfrac{1-z}{1+z}$.

3045. Uzimajući za definiciju da je

$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y)\quad (z=x+iy)$$

dokazati sledeće osobine funkcije e^z:

1° $e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$; 2° $e^{z+2k\pi i}=e^z\quad (k\in C)$;

3° Ako je $e^{z+w}=e^z$ za svako z tada je $w=2k\pi i\quad (k\in C)$.

3046. Naći modul i glavnu vrednost argumenta sledećih kompleksnih brojeva:

1° $e^{\frac{\pi}{2}i}$; 2° e^{2-3i}; 3° e^{-3-4i}; 4° $e^{-i\varphi}\quad (|\varphi|<\pi)$.

Napisati u obliku realnog i imaginarnog dela sledeće kompleksne brojeve:

3047. $e^{\ln 7+\pi i}$. 3048. $\sin(-1+2i)$. 3049. $\operatorname{tg}(2-i)$.

3050. $\cos(2+i)$. 3051. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-i\ln 2\right)$. 3052. $\operatorname{Ln}(2-3i)$.

3053. 2^{2i}. 3054. $1^{\sqrt{2}}$. 3055. 1^{-i}. 3056. i^i.

3057. $(-3+4i)^{1+i}$.

Izračunati:

3058. $R_e\{(1-i)^{1+i}\}$. 3059. $|(-i)^{-i}|$.

Koristeći definicije odgovarajućih funkcija, dokazati sledeće jednakosti:

3060. $\sin^2 z+\cos^2 z=1$. 3061. $\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2$.

3062. $\cos(z_1-z_2)=\cos z_1\cos z_2+\sin z_1\sin z_2$. 3063. $\operatorname{tg}2z=\dfrac{2\operatorname{tg}z}{1-\operatorname{tg}^2 z}$.

3064. $\operatorname{ch}^2 z-\operatorname{sh}^2 z=1$. 3065. $\operatorname{ch}^2\left(\dfrac{z}{2}\right)=\dfrac{1}{2}(\operatorname{ch}z+1)$.

3066. $\cos(x+iy)=\cos x\operatorname{ch}y-i\sin x\operatorname{sh}y$.

3067. $\sin(x+iy)=\sin x\operatorname{ch}y+i\cos x\operatorname{sh}y$.

3068. $\operatorname{Ln}(z_1 z_2)=\operatorname{Ln}z_1+\operatorname{Ln}z_2$. 3069. $\operatorname{Ln}\dfrac{z_1}{z_2}=\ln z_1-\ln z_2$.

3070. Dokazati jednakosti:

1° $|\sin z|=\sqrt{\sin^2 x+\operatorname{sh}^2 y}$; 2° $|\cos z|=\sqrt{\cos^2 x+\operatorname{sh}^2 y}\quad (z=x+iz)$.

3071. Dokazati nejednakosti:

1° $|\operatorname{sh}y|<|\sin z|<\operatorname{ch}y$; 2° $|\operatorname{sh}y|<|\cos z|<\operatorname{ch}y$;

3° $|\operatorname{sh}y|<|\operatorname{sh}z|<|\operatorname{ch}x|$; 4° $|\operatorname{sh}x|<|\operatorname{ch}z|<\operatorname{ch}x$.

Pokazati da je

3072. 1° $|\sin(x+iy)|=|\sin x+\sin iy|$; 2° $|\operatorname{sh}(x+iy)|=|\operatorname{sh}x+\operatorname{sh}iy|$.

3073. 2° $\overline{\sin z}=\sin \bar{z}$; 2° $\overline{\cos z}=\cos \bar{z}$; 3° $\overline{\operatorname{tg} z}=\operatorname{tg} \bar{z}$.

3074. $\left|\operatorname{tg} h \dfrac{\pi(1+i)}{4}\right|=1$.

3075. Naći realni deo u i imaginarni deo v funkcije $w=z^2 e^{2z}$.

3076. Pokazati da su tačke $\pm i$ tačke grananja funkcije $w=(z^2+1)^{\frac{1}{3}}$.

3077. Ispitati promenu $\arg(\sqrt[n]{z-a})$ ako tačka z opiše u pozitivnom smeru Jordanovu zatvorenu krivu oko tačke a. Kakva je tačka $z=a$ za multiformnu funkciju $w=\sqrt[n]{z-a}$? Da li je tačka $z=\infty$ kritična tačka ove funkcije.

3078. Ispitati promenu funkcije $w=\sqrt{1-z^2}$ ako tačka z opiše zatvorenu Jordanovu krivu c u slučajevima:

1° c obuhvata jednu od tačaka ± 1; 2° c obuhvata obe tačke ± 1;

3° tačke ± 1 su izvan konture c.

3079. Kakve su tačke $z=0$ i $z=\infty$ za funkciju $\sqrt[n]{z^k}$ (k prost broj različit od nule).

3080. Naći algebarske tačke grananja funkcije $\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$ $(0<k<1)$ i „zasecima" izdvojiti njene jednoznačne grane.

3081. Naći vrednost one jednoznačne grane funkcije $\sqrt{z-e^{\varphi i}}$ za $z=e^{-\varphi i}$, koja za $z=0$ ima vrednost $i\,e^{\frac{\varphi i}{2}}$.

3082. Funkcija $f^*(z)$ je ona grana funkcije $f(z)=\sqrt[3]{z-1}$ za koju je $f^*(0)=-1$. Naći $f^*(-i)$.

3083. Funkcija $f^*(z)$ je ona jednoznačna grana funkcije $f(z)=z+\sqrt{z^2-1}$ koja je pozitivna za $z>0$. Naći $f^*(i)$.

3084. Funkcija $f^*(z)$ je ona jednoznačna grana funkcije $f(z)=\operatorname{Ln}\dfrac{z-1}{z+1}$ koja je realna na gornjoj ivici zaseka $[1, \infty]$. Koliko je $f^*(-i)$?

3085. Neka je $f(z)=z^2$. Naći $f^*(-e)$ gde je $f^*(z)$ jednoznačna grana funkcije $f(z)$ kod koje je $f^*(1)=1$ i ako se $f^*(z)$ neprekidno menja pri kretanju tačke z u: 1° gornjoj poluravni; 2° donjoj poluravni.

3086. Kompleksna funkcija definisana na skupu prirodnih brojeva je niz. Dokazati da ograničen niz ima bar jednu tačku nagomilavanja.

3087. Niz z_n konvergira ka a tada i samo tada ako $R_e\{z_n\}$ konvergira ka $R_e\{a\}$ i $I_m\{z_n\}$ konvergira ka $I_m\{a\}$. Dokazati.

3088. 1° Nacrtati u kompleksnoj ravni nekoliko članova niza $z_n=\dfrac{1+i^n}{2}$. 2° Koje su mu tačke nagomilavanja? 3° Da li je niz ograničen? 4° Koje su tačke nagomilavanja niza $|z_n|$? 5° Naći $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|z_n|$ i $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}|z_n|$.

3089. 1° Na kojoj se krivoj nalaze članovi niza $z_n=\dfrac{1+(-i)^n}{1+n}$? 2° Koje su mu tačke nagomilavanja? 3° Ako niz konvergira kolika mu je granična vrednost? 4° Naći $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|$.

3090. Niz $z_n=\dfrac{1}{n}+e^{\frac{n\pi i}{3}}$ ima šest tačaka nagomilavanja. Odrediti ih.

3091. Naći $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{[e^{n\pi i}-(-1)^n]n+\dfrac{i}{n}\right\}$.

3092. Naći tačke nagomilavanja u proširenoj kompleksnoj ravni za nizove:

1° $[(-1)^n+i^n]\sqrt{n}$; 2° $\dfrac{1}{n}+e^{n\alpha\pi i}$ $(\alpha\in R)$.

3093. Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$ tada je $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=|a|$. Primerom pokazati da obrnuto nije tačno.

Naći sledeće limese:

3094. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4+3i}{5}\right)^n$. 3095. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+i}$. 3096. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n$.

3097. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}[\sqrt{n+2i}-\sqrt{n+i}]$. 3098. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n^2+3i)(n-i)}{in^3-3n+4-i}\right|$.

3099. Da li postoji $\lim\limits_{n\to\infty} n\,i^n$?

3100. Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=l$, pokazati da je $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{z_1+z_2+\cdots+z_n}{n}=l$.

3101. Ako je $z_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(z_n+\dfrac{1}{z_n}\right)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ i $-\dfrac{\pi}{2}<\arg z_0<\dfrac{\pi}{2}$ tada je $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=1$. Dokazati.

Naći granične vrednosti funkcija:

3102. $\lim\limits_{z\to 1+i}\dfrac{z^2-z+1-i}{z^2-2z+2}$. 3103. $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z^2+1}{z^6+1}$.

3104. $\lim\limits_{z\to e^{\frac{\pi i}{3}}}\left(z-e^{\frac{\pi i}{3}}\right)\dfrac{z}{z^3+1}$.

3105. $\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{\sqrt{z^2+3}-2}{z-1}$ $\quad(\sqrt{z^2+3}=f(z),\quad f(0)=\sqrt{3})$.

3106. $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{1}{(z-i)^2}$. **3107.** $\lim\limits_{z\to\frac{\pi i}{2}} z^2 \operatorname{ch}\dfrac{4z}{3}$.

3108. Da bi postojao $\lim\limits_{n\to\infty} z_n\neq 0$ potrebno je i dovoljno da postoji $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|\neq 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty}\arg z_n$.

3109. Pokazati da je $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n=e^x(\cos y+i\sin y)$ $\quad(z=x+iy)$.

3110. Za svaki niz z_n je $\underline{\lim}_{n\to\infty}\left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right|<\underline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|}<\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|}<\overline{\lim}_{n\to\infty}\left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right|$.
Dokazati.

3111. Ako je ograničen niz z_n, dokazati da su ograničeni i sledeći nizovi:

1° $\left(1+\dfrac{z_n}{n}\right)^n$; 2° $\dfrac{z_1+z_2+\cdots+z_n}{n}$; 3° $\dfrac{z_1+2z_2+\cdots nz_n}{n^2}$;

4° $\dfrac{p_1z_1+p_2z_2+\cdots+p_nz_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$ $(p_i>0)$; 5° $\sqrt[n]{z_1z_2z_3\cdots z_n}$.

Odrediti prekidne tačke sledećih funkcija: **3112.** $e^{\frac{1}{z}}$.

3113. $\dfrac{3z^2+4}{z^4-16}$. **3114.** $\operatorname{ctg} z$. **3115.** $\dfrac{\operatorname{tg} hz}{z^2+1}$.

3116. Pokazati da je funkcija $\dfrac{z^2+1}{z^3+9}$ neprekidna i ograničena u oblasti $|z|<2$.

3117. Pokazati da je $\lim\limits_{z\to a} z^n=a^n$ $(n\in N)$, tj. da je funkcija $f(z)=z^n$ neprekidna.

3118. Da li funkcija $f(z)=\dfrac{1-|z|}{1-z}$ ima graničnu vrednost u tački $z=1$?

3119. Funkcije: 1° $\dfrac{R_e(z)}{z}$; 2° $\dfrac{z}{|z|}$; 3° $\dfrac{zR_e(z}{|z|}$ nisu definisane za $z=0$.
Mogu li se dodefinisati u tački $z=0$ da bi postale neprekidne?

3120. Da li je funkcija $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ uniformno neprekidna u disku $|z|<1$?

3121. Pokazati da je funkcija $\dfrac{1}{z}$ neprekidna u oblasti $|z|>0$, ali da tu nije ograničena.

3122. Ako je funkcija $f(z)$ neprekidna u zatvorenoj oblasti, ona je tu i uniformno neprekidna. Dokazati.

3123. Funkcija $f(z)=\begin{cases}1, & |z| \text{ racionalan broj}\\ 0, & |z| \text{ iracionalan broj}\end{cases}$ je prekidna u svakoj svojoj tački.

3124. Pokazati da jednačina $\operatorname{tg} z=z$ ima samo realna rešenja.

3125. Neka je $f(z)$ neprekidna funkcija na celoj kompleksnoj ravni koja zadovoljava uslove

$$f(z+z')=f(z)+f(z') \quad \text{i} \quad f(z\,z')=f(z f(z')$$

za svako z i z'. Dokazati da je $f(z)=0$ ili $f(z)=z$ ili $f(z)=\bar{z}$ za svako $z\in K$.

§ 3. Kompleksno diferenciranje i Cauchy-Riemannove jednačine

1° Izvod kompleksne funkcije. Ako postoji $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ kaže se da funkcija $f(z)$ ima izvod $f'(z_0)$ u tački z_0 i tada je

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

Funkcija $f(z)$ koja ima neprekidan izvod $f'(z)$ u svakoj tački oblasti G je *diferencijabilna* u oblasti G, ili *regularna* u oblasti G, ili *holomorfna* u oblasti G.

2° Analitičke funkcije. Funkcija $f(z)$ koja je diferencijabilna u oblasti G, sem u konačno tačaka te oblasti, je *analitička* u oblasti G. Tačke u kojima analitička funkcija nije diferencijabilna zovu se *singularne tačke* funkcije $f(z)$ ili *singulariteti funkcije* $f(z)$.

3° Cauchy-Riemannove jednačine. Potreban i dovoljan uslov da je funkcija $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ diferencijabilna u oblasti G, jeste da su funkcije $u(x,y)$ i $v(x,y)$ diferecijabilne u toj oblasti, kao funkcije dve nezavisno promenljive, i da pored toga važe sledeće *Cauchy-Riemanove* jednačine:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{i} \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Tada je $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial y}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Ako je funkcija $f(z)=u+iv$ regularna u oblasti G, tada su u i v *harmonijske funkcije* tj. zadovoljavaju parcijalnu jednačinu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

4° Diferencijal kompleksne funkcije. Glavni deo priraštaja $\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)=f'(z)\Delta z+\varepsilon\Delta z$ funkcije $w=f(z)$, kad $\Delta z\to 0$, izraz $f'(z)\Delta z$, naziva se *diferencijal* funkcije $w=f(z)$. Dakle je

$$dw=f'(z)\,dz$$

Sva pravila diferenciranja realnih funkcija važe i za kompleksne funkcije. Takođe važi L'Hospitalovo pravilo.

3126. Koristeći definiciju izvoda funkcije $f(z)$, dokazati da je

1° $(z^n)' = n z^{n-1}$; 2° $(e^z)' = e^z$;

3° $(\cos)' = -\sin z$; 4° $(L_n z)' = (\ln z)' = \frac{1}{2}$.

3127. Dokazati da funkcija $f(z) = \bar{z}$ nije nigde diferencijabilna.

3128. Dokazati da ne postoji $(z^2 \bar{z})'$.

3129. Funkcija $f(z) = z R_e(z)$ ima izvod u tački $z=0$ ali nije diferencijabilna u njenoj okolini.

3130. Dokazati da je funkcija $f(z) = \begin{cases} \dfrac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2+y^2}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$ neprekidna, da zadovoljava Cauchy-Riemannove jednačine, ali da nema izvod u tački $z=0$.

3131. Dokazati da su funkcije $u = x^2 - y^2$ i $v = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$ harmonijske, ali da funkcija $f(z) = u + iv$ nije regularna.

Naći analitičku funkciju $w(z) = u + iv$ ako je:

3132. $u = \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2)$, $w(1) = 0$. **3133.** $u = x^2 - y^2 + xy$, $w(0) = 0$.

3134. $u = x^2 - y^2 + 5x + y - \dfrac{y}{x^2+y^2}$. **3135.** $v = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$.

3136. $u = \ln(x^2+y^2) + x - 2y$. **3137.** $u = e^x (x \cos y - y \sin y)$, $w(0) = 0$.

3138. $u = \dfrac{x(1+x^2+y^2)}{1 + 2(x^2-y^2) + (x^2+y^2)^2}$, $w(0) = 0$. **3139.** $v = f(x^2+y^2)$, gde je f funkcija koju treba predhodno odrediti.

3140. $u = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, gde je φ funkcija koju treba odrediti.

3141. Ako je u harmonijska funkcija dokazati da je takva i $f(u) = au + b$.

3142. Ako je $f(z)$ regularna funkcija, dokazati da su $\arg f(z)$ i $\ln|f(z)|$ harmonijske funkcije.

3143. Da li postoji analitička funkcija $f(z) = u + iv$ ako je: 1° $u = e^{\frac{y}{x}}$; 2° $v = \sin(xy)$; 3° $u = x^2 y - 4x + 5 y^2 x$.

3144. Naći funkciju $\varphi(t)$ ako je $u = \varphi\left(\dfrac{x^2+y^2}{x}\right)$ realni deo analitičke funkcije $f(z)$.

3145. Odrediti realni deo $u = \varphi(x^2+y^2)$ analitičke funkcije $f(z)$.

3146. Naći analitičku funkciju $f(z) = u + iv$ za koju je na krivoj $y = cx$

1° $R_e\{f(z)\} = \text{const}$; 2° $J_m\{f(z)\} = \text{const}$; 3° $|f(z)| = \text{const}$;

4° $\arg\{f(z)\} = \text{const}$.

3147. Naći analitičku funkciju $f(z)$ za koju je na krugu $x^2+y^2 = a^2$ $\arg\{f(z)\} = \text{const}$.

3148. Naći analitičku funkciju $f(z) = u + iv$ za koju je $2xyu + (y^2 - x^2) v + 2xy(x^2+y^2)^2 = 0$.

3149. Za svaku analitičku funkciju $f(z) = f(x+iy)$ važi $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}|f(z)| + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}|f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2$. Dokazati.

3150. Ako je $f(z) = f(x+iy) = u + iv$ regularna funkcija, tada su $e^v(\cos u\, dx + \sin u\, dy)$, $e^v(\sin u\, dx - \cos u\, dy)$ dva totalna diferencijala. Dokazati.

3151. Ako je $f(z) = u + iv$ regularna funkcija u oblasti G, dokazati da je tu $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = |f'(z)|^2$.

3152. Ako je $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, dokazati da je:

1° $f(z) = 2u(z/_2, -i\, z/_2) + \text{const}$; 2° $f(z) = 2iv(z/_2, -i\, z/_2) + \text{const}$.

3153. Naći regularnu funkciju $f(z)$ za koju je $R_e\{f'(z)\} = 3x^2 - 4y - 3y^2$ i $f(1+i) = 0$.

3154. Ako su u i v harmonijske funkcije u oblasti G, dokazati da je $\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x} + i\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right)$ analitička funkcija u oblasti G.

3155. Neka je $f(z) = u + iv$ regularna funkcija, gde je $z = \varphi e^{\theta i}$. Ako je u funkcija samo od φ, dokazati da je v funkcija samo od θ.

Dokazati da je:

3156. $\dfrac{d}{dz} \sec z = \sec z \operatorname{tg} z$. **3157.** $\dfrac{d}{dz} \operatorname{ctg} z = -\sec^2 z$.

3158. $\dfrac{d}{dz} \ln(z^2+2z+2) = \dfrac{2z+2}{z^2+2z+2}$. **3159.** $\dfrac{d}{dz}(z^{\mathrm{Ln}z}) = 2 z^{\mathrm{Ln}z - 1} \mathrm{Ln} z$.

3160. $\dfrac{d}{dz} \sin(z+1)^2 = 2 \operatorname{ch}(z+1)^2 + 4(z+1)^2 \operatorname{sh}(z+1)^2$.

Naći sledeće granične vrednosti:

3161. $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{z - \sin z}{z^3}$. **3162.** $\lim\limits_{z \to m\pi i} (z - m\pi i) \dfrac{e^2}{\sin z}$. **3163.** $\lim\limits_{z \to 0} \left(\dfrac{\sin z}{z}\right)^{\frac{1}{z^2}}$.

U konačnoj z-ravni odrediti singularitete sledećih funkcija:

3164. $\frac{z^2-3z}{z^2+2z+2}$. **3165.** $\frac{\operatorname{Ln}(z+3i)}{z^2}$.

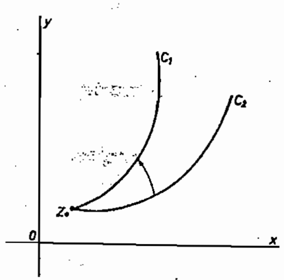
3166. $\operatorname{Arc}\sin\frac{1}{z}$. **3167.** $\sqrt{z(z^2+1)}$ **3168.** $\frac{\cos z}{(z+i)^3}$.

Odrediti singularitete sledećih funkcija u proširenoj kompleksnoj ravni:

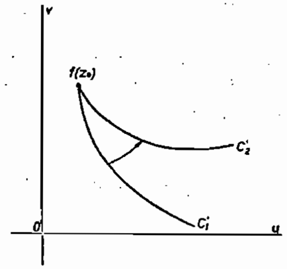
3169. $\frac{z+3}{z^2-1}$. **3170.** $\frac{1}{\sin\frac{1}{z^2}}$. **3171.** $\frac{z^2+1}{z^{3/2}}$.

§ 4. Konformno preslikavanje

1° K o n f o r m n o p r e s l i k a v a n j e. Neka se preslikavanjem $w=f(z)=f(x+iy)=u+iv$ tačka z_0 preslikava u tačku $f(z_0)$ i bilo koje dve krive c_1 i c_2 koje polaze iz tačke z_0 u krive c_1' i c_2' (sl. 11 i sl. 12).



sl. 11



s l. 12

Preslikavanje $w=f(z)$ je *konformno* u tački z_0 ako je ugao između krivih c_1 i c_2 jednak uglu između krivih c_1' i c_2' i jednako su usmereni (sl. 11 i sl. 12).

2° T e o r e m a o k o n f o r m n o m p r e s l i k a v a n j u. Ako je $f(z)$ regularna i $f'(z)\neq 0$ u oblasti G, tada je preslikavanje $w=f(z)$ konformno u oblasti G.

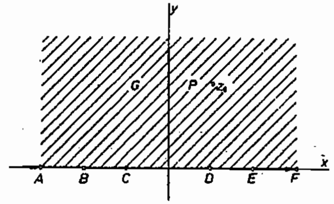
3° B i l i n e a r n o p r e s l i k a v a n j e. Preslikavanje

$$w=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\quad(\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0)$$

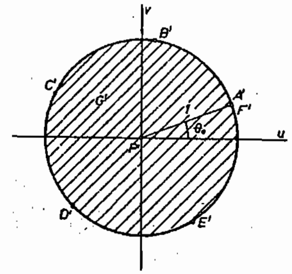
naziva se *bilinearno*.

U odnosu na bilinearno preslikavanje, dvorazmera tačaka z_1, z_2, z_3 i z_4 tj. izraz $\frac{(z_4-z_1)(z_2-z_3)}{(z_2-z_1)(z_4-z_3)}$ je invarijantna,

4° P r e s l i k a v a n j e g o r n j e p o l u r a v n i n a j e d i n i č n i k r u g. Bilinearnim preslikavanjem $w=e^{i\theta_0}\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$ gornja poluravan se preslikava na unutrašnjost jediničnog kruga kao na slikama 13 i 14.



sl. 13



sl. 14

3172. Pokazati da je preslikavanje: 1° $w=z+b$ $(b\in K)$-translacija; 2° $w=az$ $(|a|=1)$-rotacija, tačaka u z-ravni.

3173. Pokazati da je preslikavanje $w=az$ $(a>0)$-homotetija sa centrom homotetije u tački $z=0$.

3174. Preslikavanje linearnom funkcijom $w=az+b$ može se razložiti na niz uzastopnih preslikavanja: translaciju, rotaciju i homotetiju. Dokazati.

3175. Pokazati da je linearno preslikavanje konformno preslikavanje.

3176. Naći linearnu funkciju koja preslikava trougao sa temenima u tačkama: -1, 0, $-1+i$ u trougao sa temenima: -1, 1, i.

3177. Naći najopštiju linearnu funkciju koja preslikava: 1° gornju poluravan u gornju poluravan; 2° gornju poluravan u desnu poluravan.

3178. Naći najopštiju linearnu funkciju koja preslikava traku $0<R_e(z)<1$ na traku $0<R_e(z)<1$.

3179. Naći linearnu funkciju koja preslikava krug $|z|<1$ na krug $|w-1|<2$ tako da centri krugova odgovaraju jedan drugom i horizontalni prečnik prvog prelazi u prečnik drugog koji sa realnom osom zaklapa ugao α.

3180. Preslikavanje $w=\frac{1}{z}$ naziva se *inverzija*. Dokazati da se ovim preslikavanjem: 1° Tačke jediničnog kruga $|z|=1$ preslikavaju na tačke jediničnog kruga $|w|=1$. (Jedinični krug je invarijantan u odnosu na inverziju). 2° Tačke izvan jediničnog kruga preslikavaju se u tačke unutar jediničnog kruga i obrnuto.

3181. Inverznim preslikavanjem $w=\frac{1}{z}$: 1° Kružnica koja ne prolazi kroz početak prelazi u kružnicu koja ne prolazi kroz početak. 2° Kružnica koja prolazi kroz početak prelazi u pravu koja ne prolazi kroz početak i obrnuto. 3° Prava koja prolazi kroz početak prelazi u istu pravu.

3182. Odrediti skup tačaka na koji se preslikavanjem $w=\frac{1}{z}$ preslikavaju tačke: 1° $|z|=1$; 2° $|z|>1$.

3183. Preslikavanjem $w=\frac{1}{z}$ naći sliku skupa tačaka zadatih jednačinama:

1° $x^2+y^2=ax,\quad a\in R$; 2° $x^2+y^2=by,\quad b\in R$;

3° $y=x+b,\quad b\in R$; 4° $y=ax,\quad a\in R$;

5° $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2,\quad p,\ q\in R$; 6° $y=ax+b,\quad a,\ b\in R$.

3184. Naći sliku oblasti $|z|>1$ preslikavanjem $w=\frac{z-1}{z+1}+i$.

3185. Funkcija $w=\frac{1}{z-z_0}+h$ preslikava familiju pravih $x=c,\ y=c\ (c\in R)$ u familiju krugova:

$$(c-x_0)\ [(u-h_1)^2+(v-h_2)^2]-(u-h_1)=0;$$

$$(c-y_0)\ [(u-h_1)^2+(v-h_2)^2]+(v-h_2)=0$$

gde je $z_0=x_0+iy_0,\quad h=h_1+ih_2$.

3186. Preslikavanjem $w=\frac{z-i}{z+i}$ preslikati oblast $D_1=\left\{z:\ 0<\arg z<\frac{\pi}{2}\right\}$ pa koristeći dobijeni rezultat odrediti funkciju koja preslikava oblast $D=\{z:|z+1|>\sqrt{2}\wedge|z-1|<\sqrt{2}$ z-ravni na oblast $D'=\{w:\ |w|>|1\wedge I_m(w)>0\}$ w-ravni.

3187. Naći oblast na koju funkcija $w=\frac{1}{z+i}$ preslikava oblast $I_m(z)>0$.

3188. Dokazati da funkcija $w=\frac{i-z}{i+z}$ preslikava oblast $R_e(z)>0\wedge I_m(z)>0$ na oblast $|w|<1\wedge I_m(w)>0$.

3189. Naći skup tačaka z koji se preslikavanjem $w=\frac{z+2i}{2iz-1}$ preslikava u skup $\{w:\ |w|=1\}$.

3190. Naći skup tačaka w na koji se preslikava skup tačaka $R_e(z)=0$ preslikavanjem $w=\frac{a+z}{a-z}$.

3191. Da bi preslikavanjem $z=\frac{aw+b}{cw+d}$ krug $|z|=1$ prelazio u neku pravu w-ravni potrebno je da bude $|a|=|c|$. Dokazati.

3192. Dokazati da funkcija $w=(a-z)^n$ konformno preslikava oblast $\left\{z:\ 0<\arg(z-a)<\theta<\frac{2\pi}{n}\right\}$ na oblast ugla sa temenom u koordinatnom početku koji ima meru $n\theta$.

3193. Dokazati da se preslikavanjem $w=u+iv=z^2$, familija pravih $z=c+it$ $(c\neq 0,\quad -\infty<t<\infty)$, preslikava u familiju parabola $v^2=4c^2(c^2-u)$.

3194. Šta je slika prave $z=t+ic$ $(c\in R,\ -\infty<t<\infty)$ preslikavanjem $w=u+iv=z^2$?

3195. Naći površinu oblasti w - ravni na koju se preslikava oblast $D=\left\{z:\ 1<|z|<2\wedge-\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{\pi}{4}\right\}$ funkcijom $w=z^2$.

3196. Data je funkcija $w=\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2$. Naći oblast na koju se ovom funkcijom preslikava oblast $G=\{z:\ |z|<1\wedge R_e(z)>0\}$.

3197. Ako tačka z opiše jedinični krug $|z|=1$, dokazati da tačka $w=\frac{z^2-az}{az-1}$ $(a\in R)$ opiše jedinični krug $|w|=1$.

3198. Funkcija $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{2}\right)$ preslikava oblast tačaka $\{z:\ 1<|z|<R\}$ u unutrašnjost elipse $\left(\frac{u}{R+1/R}\right)^2+\left(\frac{v}{R-1/R}\right)^2=1$ bez intervala $(-1,\ 1)$.

3199. Funkcijom $w=\frac{z^2+a^2}{z}$ preslikati oblast $\left\{z:\ \frac{1}{a}<|z|<a\right\}$ $\left(\text{odnosno oblast } \left\{z:\ a<|z|<\frac{1}{a}\right\}\right)$ iz koje je isečen deo realne ose $\frac{1}{a}<x<a$ $\left(\text{odnosno } a<x<\frac{1}{a}\right)$ $(a>0)$.

3200. Dokazati da se preslikavanjem $3z^2-2wz+1=0$ oblast $\frac{1}{\sqrt{3}}<|z|<1$ konformno preslikava unutar elipse $u^2+4v^2=4$ sa zasekom duž realne ose između žiža.

3201. Ako je $w=z^3-3z$ i $z=a\cos t+ib\sin t$ $(0<t<2\pi)$, šta je skup tačaka w?

3202. Na šta se preslikava oblast $D=\{z:\ |z-\sqrt{3}|<2\wedge|z+\sqrt{3}|<2\wedge I_m(z)>0\}$ funkcijom $w=-i\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3$?

3203. U z-ravni data je oblast $D=\{z\colon |z|<1 \wedge I_m(z)>0\}$ a u w-ravni oblast $D'=\{w\colon |w|<1\}$. Naći funkciju $w=f(z)$ koja konformno preslikava oblast D na oblast D'.

3204. Naći funkciju koja konformno preslikava unutrašnjost hiperbole $x^2-y^2=a$ $(a>0)$ (oblast koja sadrži koordinatni početak) na unutrašnjost jediničnog kruga.

3205. Preslikati oblast $D=\left\{z\colon |z-i|<2 \wedge -\frac{5\pi}{6}<\arg(z-i)<-\frac{\pi}{2}\right\}$ funkcijom $w=\frac{iz^2+2z+3i}{z^2-2iz+1}$

3206. Preslikati oblast $D=\left\{z\colon \frac{\pi}{6}<\arg(z-3i)<\frac{3\pi}{4} \wedge |z-3i|<2\right\}$ funkcijom

$$w=\frac{z^2-6iz-8}{z^2-6iz-9}.$$

3207. Funkcijom $w=\frac{z^2-4iz-2}{z^2-4iz-3}$ preslikati oblast

$$D=\left\{z\colon |z-2i|<2 \wedge -\frac{\pi}{6}<\arg(z-2i)<0\right\}.$$

3208. Dokazati da je krug $|z|<1$ invarijantan u odnosu na preslikavanje

$w=e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ gde je $|a|<1$.

3209. Naći uslov pri kome funkcija $w=\frac{az+b}{cz+d}$ preslikava krug $|z|<1$ u gornju poluravan.

3210. Odrediti bilinearnu transformaciju koja preslikava tačke: $0, -i, -1$ u tačke: $i, 1, 0$.

3211. Odrediti bilinearnu transformaciju koja će gornju poluravan preslikavati u unutrašnjost jediničnog kruga tako da tačka i prelazi u tačku $w=0$ i da tačka ∞ prelazi u tačku $w=-1$.

3212. Odrediti funkciju $f(z)$ koja konformno preslikava oblast $D=\{z\colon |z|<1 \wedge 0<\arg z<\pi/3\}$ na jedinični krug $|w|<1$.

3213. Odrediti bilinearnu transformaciju koja tačke: $i, -i, 1$ preslikava redom u tačke: $0, 1, \infty$.

3214. Ako su z_1, z_2, z_3 i z_4 različite tačke jednog kruga, pokazati da je njihova dvorazmera realan broj.

3215. Dokazati da bilinearna transformacija $w=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ ima jednu fiksnu tačku ako i samo ako je $(\delta+\alpha)^2=4(\alpha\delta-\beta\gamma)\neq 0$.

3216. Dokazati da preslikavanje $w=\frac{\alpha z+\bar{\gamma}}{\gamma z+\bar{\alpha}}$ preslikava: 1° jedinični krug $|z|<1$ na $|w|<1$ ako je $|\alpha|^2-|\gamma|^2=1$; 2° unutrašnjost jediničnog kruga na spoljašnost jediničnog kruga ako je $|\gamma|^2-|\alpha|^2=1$.

3217. Granom funkcije $w=\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}$ za koju je $\sqrt{1-z^2}\,|_{z=0}=1$ preslikati oblast $\{z\colon R_e(z)>0 \wedge I_m(z)>0\}$.

3218. Na šta se preslikava duž $z=1+iy$ $(0<y<\pi)$ funkcijom $w=\frac{1}{1-e^z}$?

3219. Naći sliku oblasti $\{z\colon 0<I_m(z)<\ln a \wedge 0<R_e(z)<\pi\}$ $(a>1)$. preslikavanjem $w=\frac{1}{a-e^{-iz}}$.

3220. Naći sliku oblasti $\left\{z\colon \frac{\pi}{6}<R_e(z)<\frac{\pi}{4}\right\}$ preslikavanjem $w=\frac{\sin z}{e^{iz}}$.

3221. Dokazati da preslikavanje $\frac{z-c}{z+c}=ie^{iw}$ konformno preslikava oblast ograničenu pravama $u=0$, $u=\pi$ u krug $|z|<c$.

Pokazati da sledeće funkcije preslikavaju date oblasti z-ravni u naznačene oblasti w-ravni:

3222. $w=e^z$ traku $0<y<\frac{\pi}{2}$ u prvi kvadrant w-ravni.

3223. $w=\ln z$ oblast $x^2+y^2>1 \wedge y>0$ u oblast $u>0 \wedge 0<v<\pi$.

3224. $w=\sin z$ oblast $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2} \wedge y<0$ u poluravan $v>0$.

Za sledeće funkcije $w=f(z)$ naći oblast $\{w\}$ u koje se preslikavaju naznačene oblasti:

3225. $w=e^z$ - oblast: 1° $\alpha<x<\beta \wedge \gamma<y<\delta$ $(\beta-\gamma<2\pi)$;
2° $-\infty<x<\infty \wedge 0<y<2\pi$.

3226. $w=\ln z$-oblast $\{z\colon 0<\arg z<\alpha<2\pi\}$.

3227. $w=\cos z$-oblast $\left\{z\colon -\frac{\pi}{2}<R_e(z)<\frac{\pi}{2} \wedge I_m(z)>0\right\}$

3228. $w=\operatorname{tg} z$-oblast $\{z\colon 0<R_e(z)<\pi \wedge I_m(z)>0\}$.

3229. Data je funkcija $w=\ln\frac{z-1}{z+1}$.

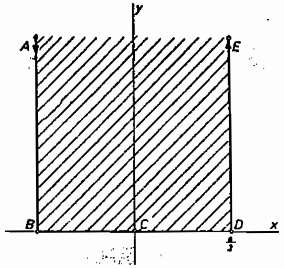
1° Koje se krive z-ravni ovom funkcijom preslikavaju u prave $I_m(w)=a$?

Specijalno, šta su inverzne slike pravih: $I_m(w)=0, \ \pm\frac{\pi}{4}, \ \pm\frac{\pi}{2}, \ \pm\pi$?

2° Koji deo w-ravni se ovom funkcijom biunivoko preslikava u čitavu z-ravan bez tačaka ± 1?

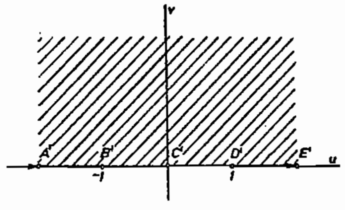
Proveriti da li su tačno preslikane date oblasti odgovarajućim funkcijama:

3230.



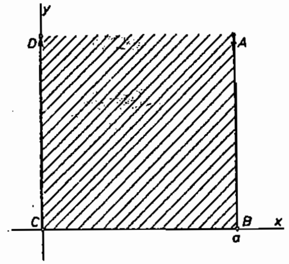
Sl. 15a

$$w=\sin\frac{\pi z}{a}$$



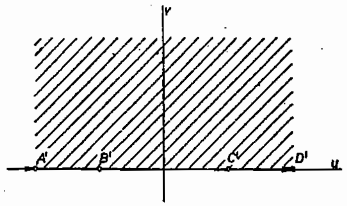
Sl. 15b

3231.



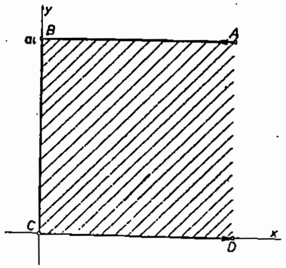
Sl. 16a

$$w=\cos\frac{\pi z}{a}$$



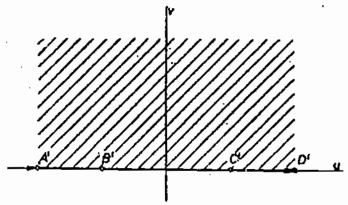
Sl. 16b

3232.



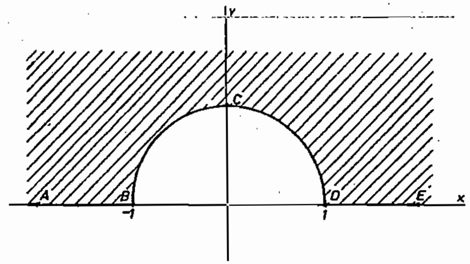
Sl. 17a

$$w=\operatorname{ch}\frac{\pi z}{a}$$



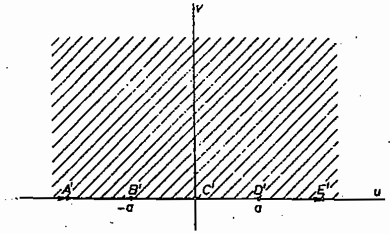
Sl. 17b

3233.



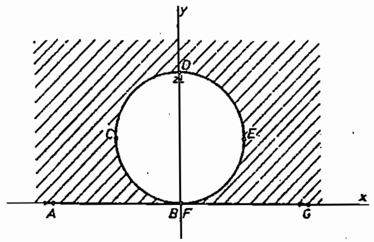
Sl. 18a $\widehat{BCD}$ je polukrug

$$w=\frac{a}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$



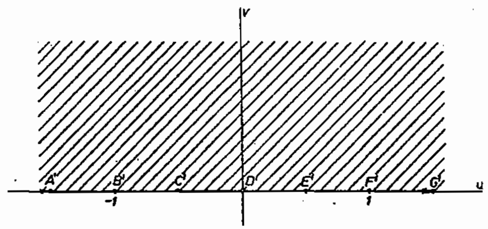
Sl. 18b

3234.



Sl. 19a $DCBE$ je krug

$$w=\operatorname{ctg}h\frac{\pi}{z}$$



Sl. 19b

3235. Ispitati preslikavanje skupa $\{z: |z|=1\}$ funkcijom $w=\dfrac{z\ln z}{z^2+1}$.

3236. Neka je $f(z)$ regularna funkcija koja unutrašnjost G kruga c zadatog jednačinom $|z|=1$ preslikava u oblast G' ograničenu krivom c'.

Dokazati da je: 1° dužina luka krive c' data sa $\oint\limits_c |f'(z)|\,|dz|$;

2° površina oblasti G' data sa $\iint\limits_G |f'(z)|^2\,dxdy$.

§ 5. Integracija funkcije kompleksne promenljive. Cauchyeva integralna teorema

1° Integral kompleksne funkcije. Neka je Γ kriva $z=x(t)+iy(t)$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ koja je orijentisana u smeru rašćenja parametra t tj. tačka $z_0=x(\alpha)+iy(\alpha)$ je početna tačka a $z'=x(\beta)+iy(\beta)$ krajnja tačka krive Γ. Svakoj podeli odsečka $[\alpha,\beta]$ tačkama $\alpha=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=\beta$ odgovara podela luka Γ tačkama $z_k=x(t_k)+iy(t_k)$ $(k=0,1,\ldots,n)$. Označimo $\delta=\max(t_1-t_0,t_2-t_1,\ldots,t_n-t_{n-1})$. Ako je $f(z)$ jednoznačna funkcija na Γ i $\tau_k\in[t_{k-1},t_k]$, $\zeta_k=x(\tau_k)+iy(\tau_k)$ $(k=0,1,\ldots,n)$ tada se izraz

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\,(z_k-z_{k-1})$$

zove *kompleksna integralna suma*, a granična vrednost

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\,(z_k-z_{k-1})$$

ako postoji, za bilo koju podelu razmaka $[\alpha,\beta]$, *integral funkcije duž krive* Γ. Označava se sa $\int\limits_\Gamma f(z)\,dz$. Tako je

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k-z_{k-1})=\int\limits_\Gamma \zeta f(z)\,dz.$$

Ako postoji ovaj integral, kaže se da je funkcija *integrabilna* na Γ. Neprekidna funkcija je integrabilna na glatkoj krivoj Γ. Ako je Γ glatka i ima jednačinu $z=\lambda(t)$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ tada je

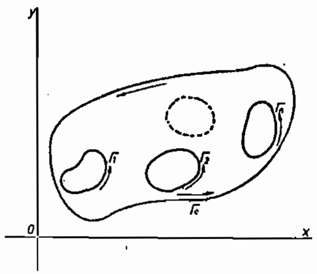
$$\int\limits_\Gamma f(z)\,dz=\int\limits_\alpha^\beta f[\lambda(t)]\,\lambda'(t)\,dt.$$

2° Cauchy-Goursatova teorema. Neka je Γ zatvorena Jordanova kriva i int Γ jednostruko povezana oblast. Ako je funkcija $f(z)$ regularna u int Γ i neprekidna na Γ tada je

$$\int\limits_\Gamma f(z)\,dz=0.$$

3° Integracija po složenoj konturi. Neka su $\Gamma_0,\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots,\Gamma_n$ zatvorene konture takve da je $\Gamma_k\subset\operatorname{int}\Gamma_0$ $(k=1,2,\ldots,n)$, $\operatorname{int}\Gamma_k\cap\operatorname{int}\Gamma_l=\varnothing(k\neq l)$ i $G=\operatorname{int}\Gamma_0\cap\operatorname{ext}\Gamma_1\cap\operatorname{ext}\Gamma_2\cap\cdots\cap\operatorname{ext}\Gamma_n$ (sl. 20). Ako je funkcija $f(z)$ regularna u oblasti G i neprekidna na $\Gamma=\Gamma_0\cup\Gamma_1\cup\cdots\cup\Gamma_n$ tada je

$$\oint\limits_{\Gamma_0} f(z)\,dz=\sum_{k=1}^{n}\oint\limits_{\Gamma_k} f(z)\,dz.$$



Sl. 20

4° Primitivna funkcija. Ako je $f(z)$ regularna funkcija u jednostruko povezanoj oblasti G i a i z dve tačke te oblasti, tada integral $\int\limits_a^z f(z)\,dz=F(z)$ ne zavisi od putanje koja spaja te dve tačke i koja je u oblasti G. Funkcija $F(z)$ je takođe regularna u oblasti G i ona se zove *primitivna funkcija funkcije* $f(z)$ $(F'(z)=f(z))$.

5° Newton-Leibnitzova formula. Ako su a i b dve tačke oblasti G i $F'(z)=f(z)$ tada je

$$\int\limits_a^b f(z)\,dz=F(b)-F(a).$$

3237. Naći po definiciji $\int\limits_\Gamma dz$ gde je Γ putanja koja spaja tačku z_0 sa tačkom z'.

3238. Naći $\int\limits_\Gamma z\,dz$ ako je Γ kriva $y=x$ $(0<x<1)$.

3239. Izračunati $\int\limits_\Gamma \bar z\,dz$ od tačke 0 do tačke $4+2i$ ako je Γ kriva $z=t^2+it$.

3240. Ako je Γ kriva $|z-a|=r$ $(r\in R)$, naći $\int\limits_\Gamma \dfrac{1}{z-a}\,dz$.

3241. Izračunati $\int\limits_c |z|\,dz$ gde je c: 1° duž koja spaja tačku 0 sa tačkom $2-i$;

2° polukrug $|z|=1\wedge 0<\arg z<\pi$, a početak putanje u tački $z=1$;

3° polukrug $|z|=1\wedge -\dfrac{\pi}{2}<\arg z<\dfrac{\pi}{2}$, a početak putanje u tački $z=-i$;

4° krug $|z|=R$; 5° duž $\arg z=\dfrac{\pi}{3}\wedge 0<|z|<1$.

3242. Izračunati $\int\limits_c \dfrac{dz}{\sqrt{z}}$ po krivoj $|z|=1\wedge J_m(z)>0$ gde se za $\sqrt{z}$ uzima ona grana za koju je $\sqrt{1}=-1$.

Izračunati integrale:

3243. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{z}{\bar z}\,dz.$ **3244.** $\displaystyle\int\limits_0^\pi \operatorname{tg}(\varphi+2i)\,d\varphi.$

3245. Izračunati $\int\limits_C \operatorname{Ln} z\,dz$ gde je: 1° c kriva $|z|=1$ i $\operatorname{Ln} z$ ona jednoznačna grana za koju je $\operatorname{Ln} 1=0$; 2° c kriva $|z|=1$ i $\operatorname{Ln} z$ ona jednoznačna grana za koju je $\operatorname{Ln} i=\dfrac{\pi i}{2}$.

3246. Dokazati Cauchy-Goursatovu teoremu ako je $f(z)$ regularna i $f'(z)$ neprekidna u svim tačkama jednostruko povezane oblasti G i na njenoj konturi Γ.

3247. Pokazati da je: 1° $\oint_c dz=0$; 2° $\oint_c z\,dz=0$; $\oint_c (z-z_0)\,dz=0$ gde je c zatvorena Jordanova kriva.

3248. Ako je $f(z)$ regularna u jednostruko povezanoj oblasti G, dokazati da $\int_a^b f(z)\,dz$ ne zavisi od putanje u oblasti G koja spaja tačke a i b.

3249. Neka je $f(z)$ regularna u oblasti G koja je ograničena sa dve zatvorene Jordanove krive c_1 i c_2 i neka je neprekidna na ovim krivama. Dokazati da je $\oint_{c_1} f(z)\,dz=\oint_{c_2} f(z)\,dz$ gde su c_1 i c_2 orijentisane tako da njihova unutrašnjost ostaje sa leve strane prilikom obilaska po orijentisanim krivim.

3250. Izračunati $\oint_c \dfrac{dz}{(z-a)^n}$ $(n=1, 2, \ldots)$ gde je c zatvorena Jordanova kriva u čijoj se unutrašnjosti nalazi tačka a.

3251. Izračunati $\int_c (12z^2-4iz)\,dz$ gde je c deo krive $y=x^3-3x^2+4x-1$ od tačke $(1, 1)$ do tačke $(2, 3)$.

3252. Dokazati da je $\int f(z)\,g'(z)\,dz=f(z)\,g(z)-\int f'(z)\,g(z)\,dz$.

Izračunati sledeće integrale:

3253. $\int_c (z+2)\,e^{iz}\,dz$ duž krive $\pi^2 y=x^2$ od tačke $(0, 0)$ do tačke $(\pi, 1)$.

3254. $\int_0^{\pi+i} z\cos 2z\,dz$.

3255. $\int_{-2-2\sqrt{3}i}^{-2+2\sqrt{3}i} \sqrt{z}\,dz$ gde je $\sqrt{z}$ ona grana za koju je $\sqrt{1}=1$.

Pokazati da je:

3256. $\displaystyle\int \frac{dz}{\sqrt{z^2\pm a^2}}=\operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2\pm a^2}\right)+c.$

3257. $\displaystyle\int \frac{dz}{z^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{Arc\,tg}\frac{z}{a}+c.$ **3258.** $\displaystyle\int \frac{dz}{z\sqrt{z^2-a^2}}=\frac{1}{a}\operatorname{Arc\,cos}\frac{a}{z}+c.$

3259. Izračunati $\oint_c |z|^2\,dz$ gde je c četvorougao sa temenima: $(0, 0)$, $(1, 0)$ $(1, 1)$, $(0, 1)$.

3260. Naći integral $\oint_c e^z\,dz$ gde je c krug $|z|=1$ pa na osnovu toga pokazati da je: $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\theta+\sin\theta)\,d\theta=\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\sin(\theta+\sin\theta)\,d\theta=0.$

3261. Dokazati da je

$$\int_0^{2\pi} e^{\sin n\theta}\cos(\theta-\cos n\theta)\,d\theta=\int_0^{2\pi} e^{\sin n\theta}\sin(\theta-\cos n\theta)\,d\theta=0.$$

3262. Izračunati integral $\displaystyle\int_{|z|=\varrho} \frac{dz}{z^2+1}$ $(\varrho\neq 1)$ u zavisnosti od ϱ.

3263. Date su funkcije $f(z)=\dfrac{1}{1-z^2}$, $\varphi(z)=\dfrac{z^2}{1-z}$. Diskutovati vrednost integrala $\oint_c [e^{\varphi(z)}+f(z)]\,dz$ gde je c zatvorena kontura.

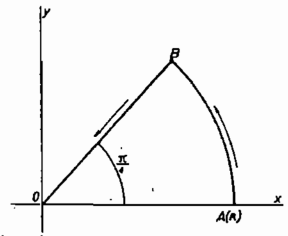
3264. Pokazati da integral $\displaystyle\int_0^z \frac{dz}{1+z^2}$ u oblasti $z\neq\pm i$ predstavlja multiformnu funkciju $\operatorname{Arc\,tg} z=\dfrac{1}{2i}\operatorname{Ln}\dfrac{i-z}{i+z}$.

3265. Primenom Cauchy-Goursatove teoreme na integral $\oint_c e^{iz^2}\,dz$, gde je c kontura kružnog isečka OAB (sl. 21), izračunati Frenelove integrale

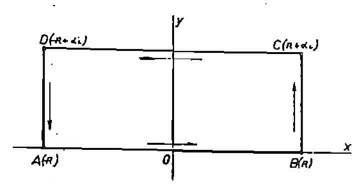
$$\int_0^{\infty}\cos x^2\,dx \quad \text{i} \quad \int_0^{\infty}\sin x^2\,dx.$$

3266. Integraleći funkciju $f(z)=e^{-\lambda z^2}$ $(\lambda>0)$ duž pravougaonika na sl. 22, izračunat

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2}\cos 2\lambda a x\,dx \qquad (a>0).$$



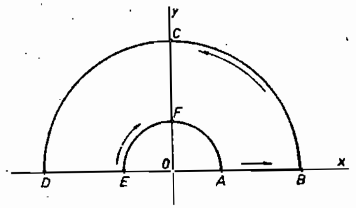
Sl. 21



Sl. 22

3267. Integraleći funkciju $f(z)=\frac{e^{iz}}{z}$ duž konture prikazane na sl. 23, gde su BCD i AFE polukrugovi, izračunati integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$$



Sl. 23

§ 6. Integralna Cauchyeva formula i srodni problemi

1° Integralna Cauchyeva formula. Neka je $f(z)$ regularna funkcija u oblasti int $\Gamma\cup\Gamma$ gde je Γ deo po deo glatka kriva. Tada je za svako $z_0\in\operatorname{int}\Gamma$

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz.$$

2° Izvodi regularne funkcije. Pod uslovom iz prethodne tačke važi

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz.$$

3° Teorema o nulama i polovima. Neka je Γ zatvorena kontura na kojoj je funkcija $f(z)$ regularna i različita od nule a funkcija $\varphi(z)$ regularna u oblasti int $\Gamma\cup\Gamma$. Neka, dalje, $f(z)$, od singulariteta u int Γ, ima samo polove $b_1, b_2, \ldots, b_n$ čiji su odgovarajući redovi $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, a funkcija $f(z)-A$ (A — fiksiran kompleksan broj) u int Γ ima jedine nule $a_1, a_2, \ldots, a_m$ čiji su odgovarajući redovi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$. tada je

$$(1)\quad \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)-A}\,dz=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\varphi(a_k)-\sum_{k=1}^{m}\beta_k\varphi(b_k).$$

4° Princip argumenta. Za $\varphi(z)\equiv 1$ i $A=0$ jednačina (1) daje

$$(1')\quad N-P=\frac{1}{2\pi}(\Phi_1-\Phi_0)=\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \operatorname{Arg} f(z)$$

gde je $\Phi_0=\operatorname{Arg} f(z_0)$ $(z_0\in\Gamma)$ a $\Phi_1=\operatorname{Arg} f(z_0)$ — argument funkcije $f(z)$ za $z=z_0$ pošto je tačka z_0 obišla Γ u pozitivnom smeru, a N i P respektivno broj nula i polova funkcije $f(z)$ u konturi Γ.

Formula (1′) se zove *princip argumenta*.

5° Rouchéova teorema. Ako su $f(z)$ i $\varphi(z)$ dve regularne funkcije u unutrašnjosti zatvorene konture Γ i neprekidne na Γ i ako je na krivoj Γ $|f(z)|>|\varphi(z)|$, tad u unutrašnjosti krive Γ funkcije $f(z)$ i $f(z)+\varphi(z)$ imaju jednak broj nula.

6° Princip maksimuma modula. Neka je $f(z)\not\equiv$const. regularna funkcija u oblasti int Γ i neprekidna na Γ, gde je Γ kontura. Tada postoji $z_0\in\Gamma$ tako da je

$$|f(z_0)|=\sup_{z\in\operatorname{int}\Gamma\cup\Gamma}|f(z)|.$$

3268. Neka je c zatvorena kontura. Izračunati integral $\int_c \frac{dz}{z^2+25}$ ako: 1° tačke $\pm 5i$ su izvan konture c; 2° tačka $5i$ je unutar konture c a tačka $-5i$ izvan konture c; 3° tačka $5i$ je izvan konture c a tačka $-5i$ unutar c; 4° tačke $\pm 5i$ su unutar konture c.

3269. Na osnovu Cauchyeve integralne formule izračunati sve moguće vrednosti integrala $\int_c \frac{dz}{z(z^2-1)}$ ako je c zatvorena kontura koja ne prolazi ni kroz jednu od tačaka 0, 1, -1.

3270. Dokazati da je

$$\int_c \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)}=\begin{cases}2^n-1, & n>1\\ 2, & n=1,\end{cases}$$

ako je c zatvorena kontura koja ne prolazi ni kroz jednu od tačaka z_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ i ako je $z_i\neq z_j$ $(i\neq j)$.

3271. Ako je $f(z)$ regularna u unutrašnjosti jednostruko povezane oblasti G i na granici te oblasti c, dokazati da je

$$f'(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz,\ \text{tj. dokazati da je } \frac{d}{da}f(a)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_c f(z)\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{z-a}\right)dz\cdot(a\in G).$$

3272. Ako $f(z)$ ispunjava uslove prethodnog zadatka, pokazati da je

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz\ (n=0, 1, 2\ldots).$$

3273. Ako je $f(z)$ regularna u oblasti G, dokazati da su $f'(z), f''(z), \ldots$ regularne funkcije u oblasti G.

3274. Ako je $f(z)$ regularna unutar i na krugu c sa centrom u tački $z=a$ i poluprečnikom r, dokazati da je

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})\,dt.$$

Primenom Cauchyeve integralne formule izračunati integrale:

3275. $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin^2\left(\frac{\pi}{6}+2e^{i\theta}\right)d\theta.$ **3276.** $\displaystyle\int_0^{\pi}\ln\sin\theta\,d\theta.$

3277. $\displaystyle\oint_c \frac{\sin\pi z^2+\cos\pi z^2}{(z-1)\,(z-2)}\,dz$, gde je c krug $|z|=3$.

3278. $\displaystyle\oint_c e^{2z}/(z+1)^4\,dz$ gde je c krug $|z|=3$.

3279. $\displaystyle\oint_c e^{zt}/(z^2+1)\,dz$, gde je $(t>0)$ a c krug $|z|=2$.

3280. $\displaystyle\oint_c e^{iz}/z^3\,dz$ gde je c krug $|z|=2$.

3281. $\displaystyle\oint_c f(z)/(z-a)^4\,dz$ gde je $f(z)$ regularna funkcija u unutrašnjosti konture c i na konturi c, a a je u unutrašnjosti konture c:

3282. $\displaystyle\oint_c \sin^6 z\Big/\left(z-\frac{\pi}{6}\right)^3 dz$ gde je c krug $|z|=1$.

3283. $\displaystyle\oint_c \frac{e^{zt}}{(z^2+1)^2}\,dz$ gde je $t>0$ a c krug $|z|=3$.

3284. Ako je $f(z)$ regularna unutar i na krugu c sa centrom u tački $z=a$ i poluprečnikom r, dokazati sledeću Cauchyevu nejednakost:

$$|f^{(n)}(a)|<\frac{M\,n!}{r^n}\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ldots),$$

gde je M konstanta takva da je $|f(z)|<M$ na c.

3285. Dokazati sledeću Liouvilleovu teoremu: Ako je funkcija $f(z)$ u proširenoj kompleksnoj ravni regularna i ograničena, tada je ona konstanta.

3286. Dokazati glavni stav algebre: Jednačina $P(z)\equiv a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n=0$ $(a_n\neq 0,\ n>1)$ ima bar jedan koren.

3287. Pokazati da jednačina $a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n=0$ $(a_n\neq 0,\ n>1)$ ima n korena.

3288. Neka je $f(z)$ regularna funkcija unutar i na krugu $|z|=R$. Neka je, dalje, $z=re^{i\theta}$ neka tačka unutar kruga $|z|=R$. Dokazati da važi sledeća Poissonova integralna formula:

$$f(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,f(Re^{i\varphi})\,d\varphi.$$

3289. Ako su $u(r,\theta)$ i $v(r,\theta)$ realni i imaginarni deo funkcije $f(re^{i\theta})$ iz prethodnog zadatka, dokazati da je:

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)\,u(R,\varphi)}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\varphi,$$

$$v(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)\,v(R,\varphi)}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\varphi.$$

Dokazati da je:

3290. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\varphi=2\pi.$

3291. 1° $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{e^{\cos\varphi}\cos(\sin\varphi)}{5-4\cos(\theta-\varphi)}\,d\varphi=\frac{2\pi}{3}e^{\cos\theta}\cos(\sin G);$

2° $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{e^{\cos\varphi}\sin(\sin\varphi)}{5-4\cos(\theta-\varphi)}\,d\varphi=\frac{2\pi}{3}e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta).$

3292. Izračunati integral $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$ gde je $f(z)=z^5-3iz^2+2z-1+i$ a c zatvorena kontura u čijoj se unutrašnjosti nalaze sve nule funkcije $f(z)$.

3293. Ako je $f(z)=\dfrac{(z^2+1)^2}{(z^2+2z+2)^3}$, izračunati integral $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$ gde je c krug $|z|=4$.

3294. Izračunati $\displaystyle\oint_c\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$ ako je c krug $|z|=\pi$ i:

1° $f(z)=\sin\pi z$; 2° $f(z)=\cos\pi z$; 3° $f(z)=\operatorname{tg}\pi z$.

3295. Izračunati $\oint\limits_{c} \frac{z f'(z)}{f(z)} dz$ ako je $f(z)=z^4-2z^3+z^2-12z+20$ i c je krug $|z|=5$.

3296. Neka su sve nule funkcije $f(z)=a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ $(a_0 \neq 0)$ u unutrašnjosti zatvorene krive c. Izračunati:

$$1^\circ \ \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{c} \frac{z f'(z)}{f(z)} dz; \quad 2^\circ \ \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{c} \frac{z^2 f'(z)}{f(z)} dz.$$

Koristeći Rouchéovu teoremu naći broj nula unutar kruga $|z|=1$ sledećih jednačina:

3297. $z^8-4z^5+z^2-1$. **3298.** $z^9-2z^6+z^2-8z-2=0$

3299. $z^7-5z^4+z^2-2=0$.

3300. Naći broj nula polinoma $z^4-8z+10$: 1° u krugu $|z|<1$; 2° u prstenu $1<|z|<3$.

3301. Pokazati da su sve nule polinoma $z^7-\frac{3}{2} i z^6+\frac{26}{9} z^5-\frac{25}{6} i z^4+4z^3-$ $-6 i z^2+\frac{100}{9} z-\frac{50}{3} i$ u prstenu $1<|z|<2$.

3302. Naći broj nula jednačine $z=\varphi(z)$ gde je $\varphi(z)$ regularna funkcija za koju je $|\varphi(z)|<1$ za $|z|<1$.

3303. Ako je $a>e$, dokazati da jednačina $az^n=e^z$ ima n nula unutar kruga $|z|=1$.

3304. Pokazati da jednačina $ze^z=a$ $(a \neq 0,\ a \in R)$ ima beskonačno nula.

3305. Pokazati da jednačina $z \operatorname{tg} z=a$ $(a>0)$ ima beskonačno realnih nula i da nema imaginarnih nula.

3306. Jednačina $z=\lambda-e^{-z}$ $(\lambda>1)$ ima jedan jedini realni koren u desnoj poluravni. Dokazati.

3307. Ako u svim tačkama zatvorene konture c važi $|a_k z^k|>|a_0+a_1 z+\cdots+$ $+a_{k-1} z^{k-1}+a_{k+1} z^{k+1}+\cdots+a_n z^n|$ tada polinom $a_0+a_1 z+\cdots+a_n z^n$ ima k nula unutar konture c ako je tačka $z=0$ unutar konture c. Ako je tačka $z=0$ izvan konture c polinom nema nula unutar konture c. Dokazati.

3308. Polinom $1+z+az^n=0$, gde je $n>1$ prirodan broj, u krugu $|z|<2$ ima bar jedan koren za bilo koje a. Dokazati.

3309. Koliko ima korena jednačina $z^4+2z^3+3z^2+z+2=0$ u svakom kvadrantu posebno?

3310. Dat je polinom $P_n(z)=z^n+a_1 z^{n-1}+\cdots+a_n$, kod koga nijedna nula nije na imaginarnoj osi. Dokazati: 1° priraštaj argumenta polinoma $P_n(z)$ kad z varira po imaginarnoj osi od $+\infty$ do $-\infty$ jednak je $k\pi$ gde je k ceo broj koji je parnosti kao i n i za koji je $|k|<n$; 2° $P_n(z)$ u desnoj poluravni ima $\frac{n+k}{2}$ nula.

3311. Naći broj nula jednačine

$$z^6+z^5+6z^4+5z^3+8z^2+4z+1=0$$

u desnoj poluravni.

3312. Neka je $a_0<a_1<a_2<\cdots<a_n$. 1° Pokazati da polinom $\sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ nema korena u oblasti $|z|>1$. 2° Pokazati da trigonometrijski polinomi $\sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu \cos \nu\varphi$ i $\sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu \sin \nu\varphi$ u intervalu $0<\varphi<2\pi$ imaju $2n$ realnih korena.

3313. Neka je $f(z)$ regularna funkcija u krugu $|z|<r$ i u čijoj unutrašnjosti postoje nule $a_1, a_2, \ldots, a_n$ različite od nule. Spajajući svaku nulu a_k zasekom sa kružnicom i integraleći po dobijenoj konturi datu funkciju, dokazati sledeću Jensen-Jacobievu formulu

$$\ln f(0)+\sum_{k=1}^{n} \ln \frac{r}{|a_k|}=\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi.$$

3314. Koristeći prethodni zadatak dokazati da je $N<\ln \frac{M}{m}$, gde je $M=$ $=\max\limits_{|z| \leq r} |f(z)|$, $f(0)=m$ i N broj nula funkcije $f(z)$ u krugu $|z|<\frac{r}{e}$.

3315. Koristeći Rouchéovu teoremu, pokazati da polinom

$$P(z) \equiv a_0+a_1 z+\cdots+a_n z^n \quad (a_n \neq 0)$$

ima n nula.

3316. Neka je $P(z)$ neki polinom, $m>0$ i $\omega=e^{\frac{2\pi i}{m}}$. Dokazati da je

$$\frac{P(1)+P(\omega)+P(\omega^2)+\cdots+P(\omega^{m-1})}{m}=P(0).$$

3317. Ako modul $|f(z)|$ regularne funkcije $f(z)$ u nekoj tački oblasti G ima maksimum, tada je u toj oblasti $f(z) \equiv \text{const}$. Dokazati.

3318. Neka je $f(z)$ regularna u oblasti $\operatorname{int} \Gamma \cup \Gamma$. Dokazati da je

$$|f(z)|<\max_{z \in \Gamma} |f(z)|.$$

3319. Dokazati Swarzovu lemu: Ako je $f(z)$ regularna funkcija u krugu $|z|<1$ i pri tome $f(0)=0$ i $|f(z)|<1$, tada je na celom krugu $|f(z)|<|z|$. Ako je osim toga, bar u jednoj unutrašnjoj tački toga kruga $|f(z)|=|z|$, tada je $f(z)=e^{i\alpha}z$ $(\alpha\in R)$.

§ 7. Beskonačni redovi. Taylorov i Laurentov red

1° Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$, sa kompleksnim članovima, *konvergira* ili *divergira* prema tome da li konvergira ili divergira niz $S_n=\sum\limits_{\nu=1}^{n} z_\nu$.

2° Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergira *apsolutno* ako konvergira red modula $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|$.

3° Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergira tada i samo tada ako konvergiraju redovi: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} R_e(z_n)$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} I_m(z_n)$.

4° Ako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergira apsolutno, konvergiraju i redovi:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|R_e(z_n)|,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}|I_m(z_n)|,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}R_e(z_n),\qquad \sum_{n=1}^{\infty}I_m(z_n),\qquad \sum_{n=1}^{\infty}z_n.$$

5° Abelleov i Dirichletov test su primenljivi na redove $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ iako su a_n kompleksni brojevi.

6° Potreban i dovoljan uslov da funkcionalni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ uniformno konvergira u zatvorenoj i ograničenoj oblasti G jeste da za svako $\varepsilon>0$ postoji prirodan broj N takav da je

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(z)\right|<\varepsilon$$

za $n>N$ i $p=1, 2, \ldots$ nezavisno od $z\in G$.

7° Ako su $u_n(z)$ neprekidne funkcije u oblasti G a red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ uniformno konvergira u toj oblasti, tada je $S(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ neprekidna funkcija u toj oblasti.

8° Ako su $u_n(z)$ neprekidne funkcije u oblasti G a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ uniformno konvergira u G tada je po svakoj krivoj c u G

$$\int_c\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)\right)dz=\sum_{n=1}^{\infty}\int_c u_n(z)\,dz.$$

9° Ako $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ konvergira u oblasti G i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(z)$ uniformno konvergira u toj oblasti, tada je

$$\frac{d}{dz}\left[\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(z).$$

10° Ako su $u_n(z)$ regularne funkcije u oblasti G i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ uniformno konvergira u G, tada je $S(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ regularna funkcija u G.

11° Potencijalni red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergira: 1) apsolutno za svako z za koje je

$$|z|<\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}=R.$$

2) uniformno za svako z za koje je $|z|\leqslant R_1<R$.

Potencijalni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ divergira za $|z|>R$.

12° Taylorov red. Neka je: $f(z)$ regularna funkcija u oblasti G, $z_0\in G$ i R rastojanje tačke z_0 od ruba oblasti G. Tada se $f(z)$ u oblasti $|z-z_0|<R$ može razložiti u red

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

gde je $a_n=\dfrac{f^{(n)}_{(z_0)}}{n!}$ $\left(n=0, 1, 2, \ldots;\ f^{(0)}_{(z_0)}=f(z_0)\right)$ ili

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z-z_0|=\varrho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta\qquad (n=0, 1, 2, \ldots;\ \varrho<R).$$

Ovaj red je *Taylorov red* funkcije $f(z)$ koji konvergira u disku $|z-z_0|<R$.

13° Laurentov red. Neka je $f(z)$ regularna funkcija u prstenu

$$r<|z-z_0|<R\qquad (0\leqslant r<\varrho<R\leqslant\infty).$$

Tada je

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

gde je $a_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z-z_0|=\varrho}\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta$ $\quad(n=0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

Ovaj red je konvergentan u naznačenom prstenu i zove se *Laurentov red*. Ako je $f(z)$ regularna za $|z|>r$ tada Laurentov red oko tačke $\zeta=0$ funkcije $f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$ predstavlja Laurentov red funkcije $f(z)$ u tački $z=\infty$.

14° **Vrste singulariteta.** 1) Ako $f(z)$ nije regularna u tački z_0 ali postoji kompleksan broj a_0 takav da ako se funkcija $f(z)$ dodefiniše sa $f(z_0)=a_0$ onda ona postaje regularna u disku $|z-z_0|<R$, kaže se da je tačka z_0 *otklonjiv singularitet*.

2) Ako se $f(z)$ u tački z_0 ne može dodefinisati da postane regularna u disku $|z-z_0|<R$ kaže se da je tačka z_0 *neotklonjiv singularitet*.

Ako je pri tome $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$, z_0 se zove **pol** funkcije $f(z)$.

Ako lim $f(z)$ ne postoji, z_0 se zove [illegible]

3) Da bi tačka z_0 bila pol k-og reda funkcije $f(z)$, potrebno je i dovoljno da je z_0 nula k-og reda funkcije $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$.

4) Potreban i dovoljan uslov da je tačka z_0 pol k-og reda, za funkciju $f(z)$, jeste da njen Laurentov red u okolini te tačke ima oblik

$$f(z)=a_{-k}(z-z_0)^{-k}+\cdots+a_{-1}(z-z_0)^{-1}+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots \qquad (a_{-k}\neq 0).$$

5) Neka je $f(z)$ regularna funkcija za $|z|>r$ osim u tački $z=\infty$. Tačka $z=\infty$ je otklonjiv singularitet, pol ili esencijalni singularitet funkcije $f(z)$ zavisno od toga da li je tačka $\zeta=0$ otklonjiv singularitet, pol ili esencijalni singularitet za funkciju $f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$.

15° **Analitičko produženje.** Neka su zadate dve funkcije $f_1(z)$ i $f_2(z)$ od kojih je $f_1(z)$ analitička u oblasti G_1 a $f_2(z)$ analitička u oblasti G_2. Neka je $G_1\cap G_2=G\neq\Phi$ i neka se funkcije $f_1(z)$ i $f_2(z)$ poklapaju u G. Funkcija

$$f(z)=\begin{cases} f_1(z), & z\in G_1\\ f_2(z), & z\in G_2\end{cases}$$

je analitička u oblasti $G_1\cup G_2$. Pri tome funkciju $f(z)$ zovemo *analitičko produženje* funkcije $f_1(z)$ u G_2, odnosno $f_1(z)$ analitičko produženje $f_2(z)$ u G_1.

3320. Dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n$ $(a\in K)$ konvergira za $|a|<1$ i zbir mu je $\dfrac{a}{1-a}$ a da divergira za $|a|\geq 1$.

3321. Dokazati da red $\sum \dfrac{(-1)^n(2n+1)+i}{[illegible]}$ konvergira i naći mu zbir.

3322. Naći zbir $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(e^{\frac{\pi}{2}ni}/2^n\right)$.

3323. Pokazati da je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nz^{n-1}}{z^n-(1+n^{-1})^n}$ apsolutno konvergentan za $|z|<1$.

Ispitati konvergenciju sledećih redova:

3324. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2+i^n}{2^n}$. **3325.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{na^n}{2^n}$. **3326.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(a+i)^n}{n!}$ $(a\in R)$.

3327. Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ može konvergirati iako je $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1$.

Primer: $1+a+b^2+a^3+b^4+\cdots$ $(0<|a|<|b|<1)$. Dokazati.

3328. Koji je efikasniji test: Cauchyev ili D'Alembertov?

3329. Da li konvergira red

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3+2i}{n}\right)? \quad \left(\binom{a}{n}=\frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!},\ n\in N\right).$$

3330. Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dbinom{a}{n}$ apsolutno konvergira za $R_e(a)>0$.

3331. Ako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira i ako je $|\arg a_n|<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, pokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ konvergira.

3332. Ako konvergiraju redovi: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ i ako je $R_e(a_n)>0$, tada red $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|^2$ konvergira.

3333. Red čiji je opšti član

$$a_n=\frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)\cdot b(b+1)(b+2)\cdots(b+n-1)}{n!\ c(c+1)(c+2)\cdots(c+n-1)}$$

konvergira apsolutno ako je $R_e(a+b-c)<0$.

3334. Dokazati formulu

$$\sum_{\nu=n+1}^{n+p} a_\nu b_\nu=A_{n+p}b_{n+p+1}-A_n b_{n+1}+\sum_{\nu=n+1}^{n+p}(b_\nu-b_{\nu+1})A_\nu$$

gde je $A_\nu=a_0+a_1+\cdots+a_\nu$. (Abelleova parcijalno sumaciona formula).

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{ni}/n)$$

3335. Da li konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e(^{ni}/n)$? Da li konvergira apsolutno?

3336. Red $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{e^{n\theta i}}{\ln n}$ ne konvergira apsolutno iako konvergira obično za $\theta\neq 2k\pi$.

3337. Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n e^{n\theta i}}{n^\alpha}$ konvergira apsolutno za $\alpha>1$ i svako θ; konvergira neapsolutno za $0<\alpha\leq 1$ i $-\pi<\theta<\pi$ a divergira za $\theta=\pm\pi$. Za $\alpha<0$ red divergira.

3338. Red $\sum_{n=1}^{\infty}\binom{a}{n}$ konvergira neapsolutno za $R_e(a)>-1$.

Ispitati konvergenciju sledećih redova:

3339. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$. **3340.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$. **3341.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n^a}$. **3342.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\sin(ni)}{3^n}$.

3343. $\sum_{n=1}^{\infty}(i)^n\ln\frac{n}{n+1}$. **3344.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\, i^{3n-1}}{\ln n}$. **3345.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+i}}$.

3346. Naći Cauchyev proizvod reda $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ sa samim sobom i pokazati da tako dobijeni red ne konvergira iako dati red konvergira.

3347. Ako redovi $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ $\left(c_n=\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu b_{n-\nu+1}\right)$ konvergiraju redom ka A, B i C tada je $AB=C$ (Abelle).

Odrediti poluprečnik konvergencije sledećih stepenih redova:

3348. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n+1}$. **3349.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$. **3350.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^n}{z^n}$.

3351. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$. **3352.** $\sum_{n=0}^{\infty}z^{2n}$. **3353.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,z^n}{(1+i)(1+2i)\cdots(1+ni)}$.

3354. $\sum_{n=0}^{\infty}\cos(in)\,z^n$. **3355.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+z_0^n}{n+1}z^n$. **3356.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-e^{i\alpha})^n}{n(1-e^{i\alpha})^n}$.

Ako je poluprečnik konvergencije reda $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ jednak R, naći poluprečnik konvergencije za sledeće redove:

3357. 1° $\sum_{n=0}^{\infty}a_n n^p z^n$; 2° $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n^p}z^n$. **3358.** 1° $\sum_{n=0}^{\infty}a_n n!\,z^n$; 2° $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}z^n$.

Za $|z|<1$ sumirati sledeće redove:

3359. $\sum_{n=1}^{\infty}nz^n$. **3360.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{2n+1}$.

Ispitati konvergenciju sledećih potencijalnih redova na rubu konvergencije:

3361. $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$. **3362.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$. **3363.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^3}$.

3364. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{n}$. **3365.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{3n-1}}{\ln n}$.

Koristeći zadatak 3360, dokazati da je

1° $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\varphi}{2n+1}=-\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right|$; 2° $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\varphi}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$ $(0<\varphi<\pi)$.

3367. Dat je funkcionalni red $F(z)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{z^2+n^2}$ u oblasti $G=\{z:|z|<1\}$.

1° Pokazati da dati red uniformno konvergira u G.

2° Da li je funkcija $F(z)$ neprekidna u datoj oblasti?

3° Naći $\lim_{z\to 0}F(z)$.

4° Pokazati da je $F(z)$ regularna u oblasti G i naći $F'(0)$.

5° $\oint_{|z|=1/2}\overline{F}(z)\,dz$.

3368. Pokazati da red $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{z^2+n^2}$ uniformno konvergira u oblasti $1<|z|<2$.

Pokazati da u naznačenim oblastima sledeći redovi uniformno konvergiraju:

3369. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n\sqrt{n+1}}$, $|z|<1$. **3370.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nz}{n^3}$, $|z|<1$.

Odrediti oblasti u kojima su sledeći redovi uniformno konvergentni.

3371. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{3^n+1}$. **3372.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^{2n}}{n^2}$.

3373. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)z^n}$. **3374.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n^2+|z|^2}$.

3375. Odrediti zbir reda: 1° $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$; 2° $\sum_{n=1}^{\infty}nz^n$; 3° $\sum_{n=1}^{\infty}n^2z^n$.

3376. Neka je $0<z<1$ i $u_n(z)=nz\,e^{-nz^2}$. Naći: 1° $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 u_n(z)\,dz$;

2° $\int_0^1\{\lim_{n\to\infty}u_n(z)\}\,dz$.

3377. Dat je potencijalni red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} z^{3n}$.

1° Odrediti oblast obične, apsolutne i uniformne konvergencije reda.

2° Sumirati dati red.

Ispitati konvergencije redova:

3378. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2-1}\left(\frac{z+1}{1-z}\right)^n$ **3379.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(1-z)^n}$.

Sledeće funkcije razviti u stepeni red oblika $\sum_0^{\infty} a_n z^n$ i naći mu poluprečnik konvergencije.

3380. e^z. **3381.** $\sin z$. **3382.** $\cos z$. **3383.** $\operatorname{sh} z$. **3384.** $\operatorname{ch} z$.

3385. $\sin^2 z$. **3386.** $\ln(1+z)$. **3387.** $(a+z)^m$ $(x^m = e^{m \ln x})$.

3388. $\frac{1}{z-2}$. **3389.** $\frac{1}{az+b}$. **3390.** $\frac{1}{z^2-3z+2}$. **3391.** $\frac{1}{(z-a)^m}$.

3392. $e^z \sin z$. **3393.** $\sqrt{z+i}$. $\left(\text{Jednoznačna grana za koju je } \sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$.

3394. $\ln \frac{1-z}{1+z}$.

3395. $\operatorname{arc\,tg} z$ (jednoznačna grana za koju je $\operatorname{arc\,tg} 0 = 0$).

3396. Oko koje se tačke može razviti funkcija $f(z) = \frac{z+1}{z^2-4z}$ u Laurentov red, odnosno Taylorov red u proširenoj kompleksnoj ravni?

Sledeće funkcije razložiti u Laurentov red u okolini naznačenih tačaka i odrediti oblast u kojima važi to razlaganje.

3397. $\frac{1}{z-2}$; $z=0$, $z=\infty$. **3398.** $\frac{1}{(z-3)(z-4i)}$; $z=0$, $z=\infty$.

3399. $\frac{1}{z^2(1-z)}$; $z=0$, $z=\infty$. **3400.** $\frac{1}{(z-a)^m}$; $z=0$, $z=\infty$.

3401. $\frac{1}{(z-a)(z-b)}$ $(0<|a|<|b|)$; $z=0$, $z=a$, $z=\infty$.

3402. $\frac{z}{z^2+a^2}$ $(a>1)$; $z=ai$. **3403.** $z^2 e^{\frac{1}{z}}$; $z=0$.

3404. $\frac{z^2-2iz-i\,e^{\frac{1}{z-i}}}{z-i}$; $z=i$. **3405.** $\frac{\operatorname{sh} z}{z^2}$; $z=0$.

3406. $\ln\frac{z-a}{z+b}$; $z=\infty$. **3407.** $\sin\frac{z}{1-z}$; $z=1$.

3408. Razviti u Laurentov red oko tačke $z=1$ granu funkcije

$$\frac{1+z^2(z-1)\sqrt{z^2-2z+2}}{z-1}$$

za koju je $\arg_{z=0} \sqrt{z^2-2z+2} = 0$. Odrediti oblast konvergencije dobijenog reda.

3409. Razviti funkciju $\frac{z}{(1-z)(z-i)^3}$ u Laurentov red oko tačke $z=1$ koji konvergira u tački $z=\frac{i}{2}$. Odrediti oblast konvergencije toga reda.

Razviti sledeće funkcije u Laurentov red u naznačenim oblastima:

3410. $\frac{z}{(z^2-4)(z^2-1)}$ za $1<|z|<2$.

3411. $\frac{1}{(z^2-1)(z^2-4)^2}$ 1° za $1<|z|<2$; 2° za $|z|>2$.

3412. $e^{z+\frac{1}{z}}$ za $0<|z|<\infty$.

3413. $\operatorname{ctg} z$ 1° za $|z|<\pi$; 2° za $\pi<|z|<2\pi$.

3414. $\sqrt{z^2-z}$ za $|z|>1$.

3415. Pokazati da je u Laurentovom razvoju funkcije $\frac{z^2}{z^2+2\lambda z-1}$ $(\lambda>0)$, u okolini tačke $z=\infty$, koeficijenat uz z^{-n} polinom n-tog stepena po λ čije su nule na imaginarnoj osi.

Ispitati singularitete sledećih funkcija u proširenoj kompleksnoj ravni:

3416. $\frac{z+1}{z^2+4}$. **3417.** $\frac{1}{z^3-z}$. **3418.** $\frac{z^5}{(1-z)^2}$.

3419. Odrediti k $(k \in N)$ da tačka $z=0$ bude pol 2-og reda za funkciju:

1° $\frac{1-\cos z}{z^k}$; 2° $\frac{e^z-1-z}{z^k}$.

Ispitati singularitete funkcija u proširenoj kompleksnoj ravni:

3420. $\dfrac{e^z}{z^2+3}$. **3421.** $z^2 e^{-z}$. **3422.** $e^{\frac{1}{z-z_0}}$. **3423.** $z e^{\frac{1}{z}}$.

3424. $e^{\frac{z^2-1}{z}}$ **3425.** $e^{\frac{a}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}$ $(a>0)$. **3426.** $1/\sin z$.

3427. $\dfrac{\cos z}{z^2}$. **3428.** $\dfrac{\sin z}{z^3}$. **3429.** $\dfrac{1}{\operatorname{ctg}^2 z}$.

3430. $\operatorname{ctg} z-\dfrac{3}{z}$. **3431.** $e^{-z}\cos\dfrac{1}{z}$. **3432.** $\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1+e^{-z}}{1-e^{-z}}-\dfrac{1}{2z}$.

3433. Neka su $P_n(z)$ i $Q_m(z)$ polinomi n-og, odnosno m-og stepena.

Odrediti singularitete u proširenoj kompleksnoj ravni za funkcije:

1° $P_n(z)+Q_m(z)$; 2° $P_n(z)/Q_m(z)$; 3° $P_n(z)\,Q_m(z)$.

3434. Neka funkcija $f(z)$ od singulariteta u oblasti G ima samo polove.

Dokazati da funkcija $\dfrac{f'(z)}{f(z)-A}$ ima proste polove u svim polovima funkcije $f(z)$ i u svim A tačkama te fukcije i da nema drugih singulariteta u G.

3435. Neka je $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ za $|z|<R$. Dokazati da je:

1° $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(r e^{i\varphi})|^2\, d\varphi=\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$ $(r<R)$;

2° $|a_n|<\dfrac{M(r)}{r^n}$ $(r<R)$ gde je $M(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$ (Cauchyeva nejednakost);

3° $f(z)=a_k z_k$ ako je za bilo koje k $|a_k|=\dfrac{M(r)}{r^k}$;

4° Dokazati sledeću Liouvilleovu teoremu: Regularna i ograničena funkcija u celoj ravni je konstantna.

3436. Ako je $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergentan red za $|z|<R$ pri čemu je $|f(z)|<M$, tada je $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 R^{2n}<M^2$. Dokazati.

3437. Neka je $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ regularna funkcija u krugu $|z|<R$ koja preslikava taj krug na oblast G čija je površina P. Dokazati da je

$$P=\pi\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 R^{2n}.$$

3438. Ako je $f(z)$ regularna u krugu $|z|<R$ i različita od konstante tada je $\varphi(r)=\displaystyle\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|^2\,dt$ rastuća funkcija za $0<r<R$. Dokazati.

3439. Od svih regularnih funkcija $f(z)$ u krugu $|z|<R$ i koje zadovoljavaju jednačinu $\displaystyle\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|^2\,dt=M$, linearna funkcija realizuje preslikavanje tog kruga na oblast najmanje površine. Naći tu površinu ako je $f(0)=0$.

Naći singularitete i ustanoviti vrstu sledećih višeznačnih funkcija u proširenoj kompleksnoj ravni:

3440. $\sqrt{1-z^2}$. **3441.** $\sqrt[3]{1+z^3}$. **3442.** $(\sqrt[6]{z})^4$.

3443. $(\sqrt[m]{z})^n$ $(m,n\in N)$. **3444.** $e^{\sqrt{z}}$. **3445.** $e^{\frac{1}{\sqrt{z}-1}}$.

3446. $\dfrac{1}{z^2+\sqrt{z}}$. **3447.** $\sqrt{\dfrac{i-2z^3}{z}}\Big/ z$. **3448.** $\sqrt{z}\,e^{\sqrt{z}}$.

3449. $\dfrac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$. **3450.** $\sqrt{\cos z}$. **3451.** $\sin\dfrac{\sqrt{1-\sin\left(z^2-\frac{\pi}{2}\right)}}{z^2+\pi^2}$.

3452. $e^{(\operatorname{Ln} z)^n}$ $(n\in C)$. **3453.** $\dfrac{1}{z}\operatorname{Ln}\dfrac{1}{1-z}$.

3454. $\dfrac{1}{z}[(z^2+1)\operatorname{Ln}(z^2+1)-z^2]$. **3455.** z^i. **3456.** $\dfrac{e^{\frac{1}{z}}\operatorname{Ln}\left(1-\frac{z}{2}\right)}{z^2}$.

3457. $\dfrac{\operatorname{Ln}\dfrac{z}{z-1}}{\sqrt{1-e^{\frac{z^2}{z-1}}}}$. **3458.** $\operatorname{Ln}\dfrac{-iz+i-1}{z-i}+e^{\frac{1}{z-i-1}}$.

3459. $\sqrt{z}\operatorname{Ln}\dfrac{1-\sqrt{z}}{z+\sqrt{z}}+\dfrac{e^{\frac{1}{\sqrt{z+1}}}}{z-\sqrt{z}}$. **3460.** $\sqrt{\dfrac{e^{z^2-2z}-1}{z}}$.

3461. $\dfrac{(z^2+2)\left[e^{a\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\right)}-1\right]}{(z-2)^2\sqrt[3]{z^2(z-1)}}$.

3462. Data je funkcija $\varphi(z)=\dfrac{z+1}{z^2-4z}$. Ispitati prirodu tačke $z=-1$ za funkciju $\dfrac{\sqrt{(z+1)\left[e^{\varphi(z)}-1\right]}}{(z^2-1)^n}$ gde je n ceo broj.

3463. Naći vrednost integrala $\displaystyle\int_c\left(e^z\ln\frac{z-2i}{z-3i}+\frac{i}{z^2+1}\right)dz$ gde je $\ln\dfrac{z-2i}{z-3i}$ proizvoljna grana funkcije $\operatorname{Ln}\dfrac{z-2i}{z-3i}$ a c rub oblasti kojoj pripadaju tačke $z=\pm i$ a ne pripada zasek. Da li integral zavisi od izabrane grane?

3464. Ispitati singularitete funkcije $\operatorname{Ln}\dfrac{\varphi(z)}{z-1}$ gde je $\varphi(z)$ inverzna funkcija funkcije $f(z)=\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$ $(n\in N)$.

3465. Kompleksnom integracijom izračunati realni integral

$$\int_0^1\frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(x+1)^3}\,dx.$$

3466. 1° Ispitati običnu apsolutnu i uniformnu konvergenciju reda

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{n(n-1)}.$$

2° Naći zbir $f(z)$ ovoga reda i analitički produžiti funkciju $f(z)$ koliko je moguće.

3467. 1° Obe grane funkcije $f(z)=1+\dfrac{1+\sqrt{1+z^2}}{z^2}$ razviti u odgovarajući stepeni red oko tačke $z=0$. 2° Kakva je tačka $z=0$ za pojedine grane?

3° Da li su dobijeni redovi Laurentovi? 4° Odrediti oblast konvergencije dobijenih redova.

3468. Neka je $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)z^k$ za $|z|<1$. Analitički produžiti datu funkciju za $|z|>1$ i izračunati integral $\int\limits_0^{\infty}F(x^2)\cos x\,dx$ gde je $F(z)$ analitičko produženje funkcije $f(z)$.

3469. 1° Opisati izgled Riemannove površi funkcije $f(z)=\operatorname{Ln}\dfrac{z-1}{z+1}$.

2° Ako je u z-ravni načinjen zasek $[-1, 1]$, odrediti vrednost $f(-i0)$ one grane funkcije $f(z)$ koja za $z=2$ uzima vrednost $-\ln 3$.

3470. Data je funkcija $f(z)=\sqrt{z^3+z^2-z+2}$.

1° Odrediti oblasti u kojima se funkcija $f(z)$ može razviti u Taylorov ili Laurentov red po stepenima od $(z-ai)$ u zavisnosti od realnog parametra a.

2° Neka su konačne kritične tačke (tačke grananja) funkcije $f(z)$ spojene sa $z=\infty$ zasecima paralelnim realnoj osi i to u smeru njenog negativnog dela. Ako $f^*(z)$ označava onu granu od $f(z)$ za koju je $f^*(0)=\sqrt{2}$, odrediti $f^*(-5\pm i0)$ i $f^*\left[-5+i\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pm 0\right)\right]$.

3471. Pokazati da su redovi $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{2^{n+1}}$ i $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$ analitička produženja jedan drugog.

3472. Pokazati da je funkcija $\dfrac{1}{1+i}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z+i}{1+i}\right)^n$ analitičko produženje funkcije $\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$.

3473. Pokazati da se red $1+z+z^2+z^4+z^8+\cdots$ ne može analitički produžiti izvan kruga $|z|=1$.

3474. Pokazati da se funkcija $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}z^{n!}$ ne može analitički produžiti preko $|z|=1$.

§ 8. Reziduum i njegova primena

1° Reziduum. Neka je $z=a$ neotklonjiv singularitet funkcije $f(z)$. Koeficijent uz $(z-a)^{-1}$ u Laurentovom redu funkcije $f(z)$ zove se *reziduum* funkcije $f(z)$ u tački $z=a$. ($\operatorname*{rez}\limits_{z=a} f(z)$). Reziduum funkcije $f(z)$ u tački $z=\infty$ je negativan koeficijent uz z^{-1} u Laurentovom redu funkcije $f(z)$ u tački $z=\infty$.
Ako je *a pol k-og reda* funkcije $f(z)$ tada je

$$\boxed{\operatorname*{rez}_{z=a} f(z)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{k-1}\left[f(z)(z-a)^k\right]}{dz^{k-1}}.}$$

2° Primena reziduuma. Neka su a_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ jedini neotklonjivi singulariteti funkcije $f(z)$ u int Γ (Γ-putanja) i neka je $f(z)$ neprekidna na Γ. Tada je

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{rez}_{z=a_k} f(z).$$

Ako je $z=\infty$ jedini neotklonjiv singularitet u ext Γ tada je

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{rez}_{z=\infty} f(z).$$

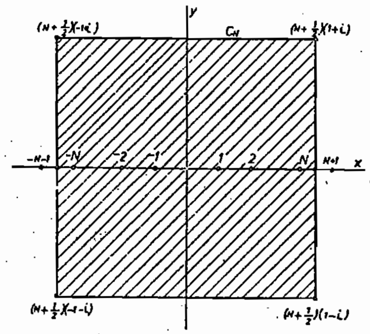
3° Sumiranje redova. Neka funkcija $f(z)$ ima konačno singulariteta u proširenoj kompleksnoj ravni, i na putanji C_N, sl 24 (N prirodan broj ili 0) ispunjava uslov $|f(z)|<\dfrac{M}{|z|^k}$, gde je $k>1$ i M konstanta koja ne zavisi od N. Tada je

1) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -$ {Zbir reziduuma funkcije $\pi \operatorname{ctg} \pi z f(z)$ u svim polovima funkcije $f(z)$}.

2) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = -$ {Zbir reziduuma funkcije $\pi (\operatorname{csc} \pi z f(z)$ u svim polovima funkcije $f(z)$}.

3) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\dfrac{2n+1}{2}\right) =$ {Zbir reziduuma funkcije $\pi \operatorname{tg} \pi z f(z)$ u svim polovima funkcije $f(z)$}.

4) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f\left(\dfrac{2n+1}{2}\right) =$ {Zbir reziduuma funkcije $\pi \sec \pi z f(z)$ u svim polovima funkcije $f(z)$}.



Sl. 24

4° Mittag-Lefflerova teorema. 1) Neka funkcija $f(z)$ od singulariteta u konačnoj z-ravni ima samo proste polove $a_1, a_2, a_3, \ldots$ uređene u rastući niz po modulima. 2) Neka su reziduumi u ovim polovima respektivno $b_1, b_2, b_3, \ldots$. 3) Neka su C_N krugovi poluprečnika R_N koji ne prolaze kroz polove i na kojima je $|f(z)|<M$, gde je M nezavisno od N i $R_N\to\infty$ kad $N\to\infty$. Tada je

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[\frac{1}{z-a_n}+\frac{1}{a_n}\right].$$

3475. Ako je za funkciju $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ tačka $z=a$ pol prvog reda i $\varphi(a)\neq 0$ tada je $\operatorname*{rez}_{z=a} f(z)=\dfrac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$. Dokazati.

Naći reziduum u neotklonjivim singularitetima sledećih funkcija:

3476. $\dfrac{2}{z^5-z^3}$. **3477.** $\left(\dfrac{z}{z^2+1}\right)^2$. **3478.** $\dfrac{(z+1)^{n+k}}{z^{k+1}}$ $(k, n\in N)$.

3479. $\dfrac{z^{2n}}{(z+1)^n}$ $(n\in N)$. **3480.** $\dfrac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$. **3481.** $\dfrac{e^z}{z^2(z^2+9)}$.

3482. $\dfrac{\sin z}{(z-1)^2}$. **3483.** $\operatorname{ctg} z$. **3484.** $\sin\dfrac{1}{z}$.

3485. $\cos\dfrac{1}{z-2}$. **3486.** $\sin^3 z/z^6$. **3487.** $e^{z+\frac{1}{z}}$.

3488. $\dfrac{\operatorname{ctg} z \operatorname{ctg} hz}{z^3}$ u tački $z=0$. **3489.** $\dfrac{\sqrt{z}}{\sin\sqrt{z}}$. **3490.** $\dfrac{e^z}{z^n}$ $(n\in N)$.

3491. Pokazati da je $\operatorname*{rez}_{z=i}\left[\dfrac{e^{zi}}{(z^2+1)^3}\right]=\dfrac{7i}{16e}$.

3492. Naći $\operatorname*{rez}_{z=0} f(z)+\operatorname*{rez}_{z=1} f(z)$ ako je

$$f(z)=(a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3)\left(e^{z}+e^{z^{-1}}+\dots\right)$$

3493. Pokazati da je za $f(z)=(a_0+a_1z+\cdots+a_kz^k)\left[e + \; + \; \cdots + e^{\frac{1}{z-k}}\right]$

$$\operatorname*{rez}_{z=0} f(z)=a_0+\frac{a_1}{2!}+\cdots+\frac{a_k}{(k+1)!}.$$

3494. Ako funkcija $f(z)$ u okolini tačke $z=\infty$ ima razvoj

$$f(z)=a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\cdots,$$

dokazati da je $\operatorname*{rez}_{z=\infty}[f(z)]^2=-2a_0a_1$.

3495. Naći $\operatorname*{rez}_{z=a}\left[\dfrac{f'(z)}{f(z)}\right]$ ako je 1° $z=a$ nula n-og reda funkcije $f(z)$; 2° $z=a$ pol n-og reda funkcije $f(z)$.

3496. Ako su $f(z)$ i $\varphi(z)$ regularne funkcije i $z=a$ nula drugog reda funkcije $\varphi(z)$ i $f(a)\neq 0$, tada je $\operatorname{rez}_{z=a}\left[\frac{f(z)}{\varphi(z)}\right]=[6f'(a)\varphi''(a)-2f(a)\varphi'''(a)]/3[\varphi''(a)]^2$. Dokazati.

3497. Naći reziduum u tački $z=4$ za obe jednoznačne grane funkcije $\frac{\sqrt{z}}{z^2-16}$.

3498. Izraziti u obliku konvergentnog reda $\operatorname{rez}_{z=\infty}\left(z\sin z\ln\frac{z-i}{z+i}\right)$.

U sledećim zadacima naći reziduum svake jednoznačne grane odgovarajućih multiformnih funkcija u naznačenim tačkama:

3499. $\frac{e^{a\,\mathrm{Ln}\,z}}{1-\sqrt{z}}$, $z=1$. 3500. $\sqrt{(z-a)(z-b)}$, $z=\infty$.

3501. $\frac{1}{(z-1)^2(z-2)^3\sqrt{z+5}}$, $z=1$, $z=2$.

3502. Izračunati reziduum u tački $z=2$ funkcije $\frac{1}{(z-2)\sqrt[5]{z^2(1-z)^3}}$ za granu za koju je izraz $\sqrt[5]{z^2(1-z)^3}$ na gornjoj ivici zaseka $[0, 1]$ pozitivan.

3503. Izračunati $\operatorname{rez}_{z=\infty}\left[\frac{i}{z+i}+\sqrt{iz^2-1}\right]$ za onu granu za koju je $\arg_{z=i}\sqrt{iz^2-1}=\frac{5\pi}{8}$.

Izračunati reziduume multiformnih funkcija u naznačenim tačkama:

3504. $e^z\ln\frac{z-\alpha}{z-\beta}$, $z=\infty$.

3505. $\mathrm{Ln}\,z\sin\frac{1}{z-1}$, $z=1$, za granu za koju je $\mathrm{Ln}\,1=2k\pi i$.

3506. $\frac{e^{\frac{a}{z}}\mathrm{Ln}\left(1-\frac{z}{2}\right)}{z^2}$, $z=0$ za granu za koju je $\mathrm{Ln}\,1=0$.

3507. Izračunati integral $\oint_c\frac{dz}{z^4+1}$ gde je c putanja u sledećim slučajevima:

1° $|z|=\frac{1}{2}$; 2° $|z-1|=1$; 3° $|z+1|=1$; 4° $|z-i|=1$; 5° $|z+i|=1$; 6° $|z|=2$; 7° $x^2-xy+y^2+x+y=0$.

Izračunati sledeće integrale, duž zatvorene konture c orijentisane suprotno smeru kretanja kazaljke na časovniku:

3508. $\int_c\frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$, gde je c krug $x^2+y^2-2x-2y=0$.

3509. $\int_c\frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)^2}$, gde je c krug $|z-2|=\frac{1}{2}$.

3510. $\int_c\frac{z^3\,dz}{2z^4+1}$, gde je c krug $|z|=1$.

3511. $\int_c\frac{dz}{(z^2-1)(z-3)^2}$, gde je c astroida $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{2}{3}}$.

3512. $\int_c\frac{e^z\,dz}{z}$, gde je c kriva $|e^z|=e|z|$.

3513. $\int_c\frac{e^{zt}\,dz}{z^2(z^2+2z+2)}$, gde je c krug $|z|=3$.

3514. $\int_c e^{-1/z}\sin 1/2\,dz$, gde je c krug $|z|=1$.

3515. $\int_c \mathrm{sh}\,3z/(z-\pi/4)^3\,dz$, gde je c kvadrat koji čine prave $x=\pm 2$, $y=\pm 2$.

3516. $\int_c\sin\frac{1}{z}\,dz$, gde je c krug $|z|=r$.

3517. $\int_c\frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^n}$ $(|a|<1, |b|<1, n\in N)$, gde je c krug $|z|=1$.

3518. $\int_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)\cdots(z-n)}$.

3519. $\frac{1}{2\pi i}\int_c z^n e^{\frac{2}{z}}\,dz$, gde je n ceo broj a c krug $|z|=2$.

3520. 1° $\int_c z^{n-1}\left(e^z+e^{\frac{1}{z}}\right)dz$ gde je c krug $|z|=1$, 2° $\int_{|z|=1}z^{-(n+1)}e^{-z}\,dz$.

3521. $\int_c 1/\sqrt{z^2+z+1}\,dz$ za granu za koju je $\sqrt{1}=1$, gde je c krug $|z|=r\neq 1$.

3522. $\int_{|z-i|=1}[\varphi(z)]^2\,dz$ gde je $\varphi(z)=\frac{z^2-zi-ie^{\frac{1}{z-i}}}{z-i}$.

3523. $\int\limits_{|z|=1} 1/\sqrt{4z^2+4z+3}\,dz$ za granu za koju je $(1/\sqrt{4z^2+4z+3})_{z=1}>0$.

3524. $\int\limits_{c} \frac{dz}{(z^4+1)\sqrt{z^2+1}}$ za granu za koju je $\sqrt{1}=1$ a c parabola $y^2=x$ orijentisana u smeru rašćenja y.

3525. $\int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ctg} z}{z(z-1)}\,dz.$ **3526.** $\int\limits_{|z|=n} \operatorname{tg} \pi z\,dz \quad (n=1, 2, 3, \ldots).$

3527. Dokazati da je $\int\limits_{|e^z/z|=e} e^z/z\,dz=1$.

3528. Odrediti λ tako da je $\int\limits_{|z|=2} \varphi(z)\,dz=\frac{\pi i}{4}$, gde je $\varphi(z)$ grana funkcije $\frac{e^{\lambda z}-\lambda z^3\sqrt{1-z^2}}{z}$, određena sa $\arg\limits_{z=0}\sqrt{1-z^2}\neq\pi$.

3529. Izračunati integral $I=\int\limits_{c} \frac{1}{z}e^{\frac{1}{1-z}}\,dz$ u zavisnosti od zatvorene konture c.

Izračunati realne integrale:

3530. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a+\cos\varphi} \quad (a>1).$ **3531.** $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos x\,dx}{(a-\cos x)^2} \quad (a>1).$

3532. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1+\cos x}{1+\cos^2 x}\,dx.$ **3533.** $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3x}{1-2a\cos x+a^2}\,dx \quad (a\neq\pm 1,\ a\in K).$

3534. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{(1-2a\cos x+a^2)(1-2b\cos x+b^2)}\,dx \quad (a\neq b,\ ab\neq 1).$

3535. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+4x+13)^2}.$ **3536.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx.$ **3537.** $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}.$

3538. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{x^6+1}.$ **3539.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx.$ **3540.** $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2} \quad (a>0).$

3541. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n} \quad (n\in N).$ **3542.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} \quad (a>0,\ b>0).$

3543. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}\,dx \quad (m<n,\ m,\ n\in N).$

3544. 1° $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\,dx;$ 2° $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2-2x+10}\,dx.$

3545. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin ax}{x^2+r^2}\,dx \quad (a>0,\ r>0).$

3546. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+r^2}\,dx \quad (a>0,\ r>0).$ **3547.** $\int\limits_0^{\infty} \frac{x\sin x}{x^4+x^2+1}\,dx.$

3548. Neka je $f(z)=e^{aiz}F(z)$, gde je $a>0$ a $F(z)$ ima osobine:

1° U gornjoj poluravni ima konačan broj singularnih tačaka $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

2° Regularna je u svim tačkama realne ose osim u tačkama $x_1, x_2, \ldots, x_m$. koje su polovi prvog reda.

3° Za $I_m(z)>0$ važi $\lim\limits_{z\to\infty} F(z)=0$. Dokazati da je

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=2\pi i\left[\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{rez}_{z=a_k} f(z)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \operatorname*{rez}_{z=x_k} f(z)\right],$$

gde se integral podrazumeva u smislu glavne vrednosti u odnosu na tačke x_k i ∞.

Izračunati sledeće realne integrale:

3549. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx.$

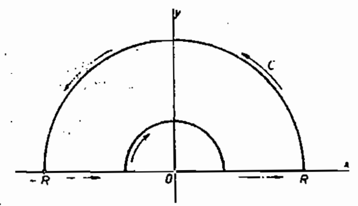
3550. 1° $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{(x^2-x)(x^2+1)^2}\,dx;$ 2° $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2-x)(x^2+1)^2}\,dx.$

3551. 1° $\int\limits_0^{\infty} \frac{(x^2+1)\sin ax}{x^3+a^2x}\,dx;$ 2° $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+1)\cos ax}{x^3+a^2x}\,dx.$

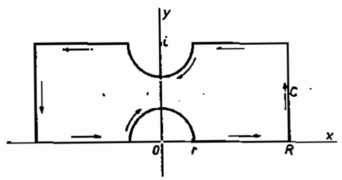
3552. Integraleći funkciju $f(z)=\frac{z}{a-e^{-iz}}$ $(a>0)$ duž pravougaonika čija su temena $\pm\pi$, $\pm\pi+i\pi$, izračunati realni integral $\int\limits_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1-2a\cos x+a^2}\,dx.$

3553. Pomoću integrala $\int\limits_c \frac{e^{2iz}-1}{z^2}\,dz$ gde je c kontura na sl. 25, izračunati realni integral $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx.$

3554. Pomoću integrala $\int\limits_c \frac{e^{3iz}-3\,e^{iz}+2}{z^3}\,dz$ gde je c kontura na sl. 25, izračunati realni integral $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3}\,dx.$



Sl. 25



Sl. 26

3555. Koristeći integral $\int\limits_c \frac{e^{az}}{\operatorname{sh}\pi z}\,dz$ $(-\pi<a<\pi)$ gde je c kontura na sl. 26, dokazati da je $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh}\pi x}\,dx=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{a}{2}.$

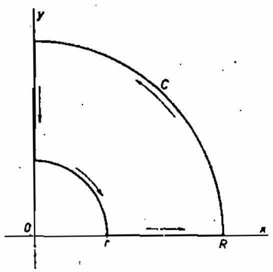
3556. Polazeći od integrala $\int\limits_c z^{p-1}e^{-az}\,dz$ $(a>0,\ 0<p<1)$ gde je c kontura na sl. 27, izračunati realne integrale:

1° $\int\limits_0^\infty x^{p-1}\cos ax\,dx$; 2° $\int\limits_0^\infty x^{p-1}\sin ax\,dx.$

Dokazati sledeće jednakosti:

3557. $\int\limits_0^\infty \cos x^p\,dx=\frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\cos\frac{\pi}{2p}$ $(p>1).$

3558. $\int\limits_0^\infty \sin x^p\,dx=\frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\sin\frac{\pi}{2p}$ $(|p|<1).$



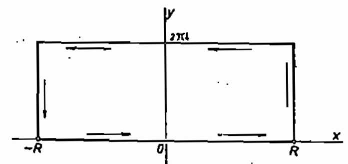
Sl. 27

3559. Neka je $\varphi(z)$ racionalna funkcija takva da je $\lim\limits_{z\to\infty} z\varphi(z)=0$. Dokazati da je

$$\int\limits_0^\infty \frac{\varphi(x)}{\ln^2 x+\pi^2}\,dx=\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{rez}_{z=a_k}\left[\frac{1}{\ln z}\varphi(z)\right]$$

gde su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jedini singulariteti funkcije $\frac{\varphi(z)}{\ln z}$.

3560. Polazeći od integrala $\int\limits_c \frac{e^{az}}{1+e^z}\,dz$ $(0<a<1)$, gde je c kontura na sl. 28, izračunati realni integral $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx.$



Sl. 28

Dokazati sledeće jednakosti:

3561. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos x-e^{-x}}{x}\,dx=0.$

3562. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\,\frac{\sin x}{x}\,dx=\pi(2\,e^{-a}-1)$ $(a>0).$

3563. $\int\limits_0^\infty \frac{x\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}2x+\cos 2a}\,dx=\frac{\pi a}{4\sin a}$ $\left(0<a<\frac{\pi}{2}\right).$

3564. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{e^{ax}-e^{bx}}{1-e^x}\,dx=\pi(\operatorname{ctg} a\pi-\operatorname{ctg} b\pi)$ $(0<a<1,\ 0<b<1).$

3565. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)(\ln^2 x+\pi^2)}=\frac{\pi}{2a}\cdot\frac{1}{\ln^2 a+\frac{\pi^2}{4}}-\frac{1}{a^2+1}$ $(a>0).$

3566. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx=\frac{\pi}{\sin\pi a}$ $(0<a<1).$

3567. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x+a}\,dx=\int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax}}{1+x^2}\,dx$ $(a>0).$ **3568.** $\int\limits_0^\infty \frac{\ln x}{x^4+1}\,dx=-\frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}.$

3569. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{(1+2\cos x)^n\cos nx}{1-a-2a\cos x}\,dx=\frac{2\pi}{\sqrt{1-2a-3a^2}}\left(\frac{1-a-\sqrt{1-2a-3a^2}}{2a^2}\right)^n$ $\left(-1<a<\frac{1}{3},\ n\in N\right).$

3570. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^{2n}}{(1-x^2)^{1/2}}dx=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\qquad (n\in N).$

3571. $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{x^{1-p}(1-x)^p}{(1+x)^3}dx=\frac{\pi p(1-p)}{8\sin\pi p}\cdot 2^p.$

3572. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{(1+x)^{1-p}(1-x)^p}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{\sin\pi p}\left(\sin\frac{\pi p}{2}+\cos\frac{\pi p}{2}-1\right).$

3573. Dokazati da je $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=\frac{\pi}{a}\operatorname{ctg}h\,\pi a\qquad (a>0).$

3574. Naći zbir reda $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{a^{2k}+m^{2k}}\qquad (a>0,\ k\in N).$

Dokazati da je:

3575. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=\frac{\pi}{2a}\operatorname{ctg}h\,\pi a-\frac{1}{2a^2}\qquad (a>0).$ 3576. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$

3577. Ako je a realan broj ali nije ceo, dokazati da je

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+a)^2}=\frac{\pi^2\cos\pi a}{\sin^2\pi a}.$$

3578. Ako a ispunjava uslove kao u prethodnom zadatku, dokazati da je

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{a^2+n^2}{(a^2-n^2)^2}=\frac{1}{2a^2}-\frac{\pi^2\cos\pi a}{2\sin^2\pi a}.$$

3579. Naći zbir reda $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)^3}.$

Dokazati sledeće jednakosti:

3580. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{ctg}n\pi}{n^3}=\frac{7\pi^3}{180}.$ 3581. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^4+n^2+1}=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}h\,\frac{\pi\sqrt{3}}{2}.$

3582. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)^5}=\frac{5\pi^5}{1536}.$ 3583. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^3\operatorname{sh}n\pi}=\frac{\pi^3}{360}.$

3584. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n\sin n\theta}{n^2+a^2}=\frac{\pi\operatorname{sh}a\theta}{2\operatorname{sh}a\pi}\qquad (-\pi<\theta<\pi).$

3585. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^4+4a^4}=\frac{\pi}{4a^3}\,\frac{\operatorname{sh}2\pi a+\sin 2\pi a}{\operatorname{sh}2\pi a-\cos 2\pi a}.$

3586. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(m^2+a^2)(n^2+b^2)}=\frac{\pi^2}{ab}\operatorname{ctg}h\,\pi a\operatorname{ctg}h\,\pi b.$

Naći zbirove redova:

3587. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}.$ 3588. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}.$

Koristeći Mittag-Lefflerovu teoremu, dokazati da je:

3589. $\displaystyle\csc z=\frac{1}{z}-2z\left(\frac{1}{z^2-\pi^2}-\frac{1}{z^2-4\pi^2}+\frac{1}{z^2-9\pi^2}-\cdots\right).$

3590. $\displaystyle\sec z=\pi\left(\frac{1}{(\pi/2)^2-z^2}-\frac{3}{(3\pi/2)^2-z^2}+\frac{5}{(5\pi/2)^2-z^2}-\cdots\right).$

3591. $\displaystyle\operatorname{tg}z=2z\left(\frac{1}{(\pi/2)^2-z^2}+\frac{1}{(3\pi/2)^2-z^2}+\frac{1}{(5\pi/2)^2-z^2}+\cdots\right).$

3592. $\displaystyle\operatorname{ctg}z=\frac{1}{z}+2z\left(\frac{1}{z^2-\pi^2}+\frac{1}{z^2-4\pi^2}+\frac{1}{z^2-9\pi^2}+\cdots\right).$

3593. $\displaystyle\csc h\,z=\frac{1}{z}-2z\left(\frac{1}{z^2+\pi^2}-\frac{1}{z^2+4\pi^2}+\frac{1}{z^2+9\pi^2}+\cdots\right).$

3594. $\displaystyle\sec h\,z=\pi\left(\frac{1}{(\pi/2)^2+z^2}-\frac{3}{(3\pi/2)^2+z^2}+\frac{5}{(5\pi/2)^2+z^2}-\cdots\right).$

3595. $\displaystyle\operatorname{tg}h\,z=2z\left(\frac{1}{(\pi/2)^2+z^2}+\frac{1}{(3\pi/2)^2+z^2}+\frac{1}{(5\pi/2)^2+z^2}+\cdots\right).$

3596. $\displaystyle\operatorname{ctg}h z=\frac{1}{z}+2z\left(\frac{1}{z^2+\pi^2}+\frac{1}{z^2+4\pi^2}+\frac{1}{z^2+9\pi^2}+\cdots\right).$

Glava X

SPECIJALNE FUNKCIJE*

§ 1. Gama-funkcija i Beta-funkcija

1° Neka je $R_e\{z\}>0$. *Gama-funkcija* $\Gamma(z)$ se definiše sa

(1) $$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt.$$

2° Analitičko produženje funkcije $\Gamma(z)$, definisane sa (1), ispunjava uslov

(2) $$\Gamma(z+1)=z\,\Gamma(z).$$

Koristeći (2) $\Gamma(z)$ se, pomoću $\Gamma(z)=\dfrac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}$, analitički produžava na celu kompleksnu ravan.

3° Važnije osobine:

1) $$\Gamma(z)=\lim_{k\to\infty}\frac{k!}{(z+1)(z+2)\cdots(z+k)}k^z.$$

2) $$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{\gamma z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}},$$

gde je $\gamma=\lim\limits_{p\to\infty}\left\{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{p}-\ln p\right\}$ Eulerova konstanta.

3) $$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}.$$

4) $$\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right)=n^{1/2-nz}(2\pi)^{(n-1)/2}\,\Gamma(nz).$$

5) $$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=-\gamma+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{z+n-1}\right).$$

* U ovoj glavi oznake u zadacima su definisane u odgovarajućim uvodima.

4° Neka je $R_e\{p\}>0$ i $R_e\{q\}>0$. *Beta-funkcija* $B(p,q)$ se definiše sa

$$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt.$$

5° Osobina Beta-funkcije:

1) $$B(p,q)=B(q,p).$$

2) $$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Pokazati da je:

3597. $\Gamma(m)=2\int_0^\infty x^{2m-1}e^{-x^2}\,dx\quad(m>0).$ **3598.** $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}.$

3599. $\Gamma(-7/2)=\dfrac{16\sqrt{\pi}}{105}.$ **3600.** $\Gamma(-1/2)=-2\sqrt{\pi}.$

3601. $\Gamma(-1/3)=-3\,\Gamma(2/3).$

3602. Pokazati da analitičko produženje od $\Gamma(z)$ ima proste polove u tačkama: $0, -1, -2, \ldots$ i da je $\operatorname*{rez}\limits_{z=-n}\Gamma(z)=(-1)^n\dfrac{1}{n!}.$

3603. Izraziti sledeće integrale preko Γ-funkcije:

1° $\int_0^1[\ln(1/t)]^{-1/2}\,dt;$ 2° $\int_0^\infty(ye^{-y^2})^{1/4}\,dy.$

Dokazati da je:

3604. $$\int_1^\infty\frac{(x-1)^p}{x^2}\,dx=\Gamma(1+p)\,\Gamma(1-p)\quad(-1<p<1).$$

3605. $$\int_0^\infty x^m e^{-ax^n}\,dx=\frac{1}{n}a^{-\frac{m+1}{n}}\,\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)\quad(m>0,\ n>0,\ a>0).$$

3606. $$\Gamma(-1/2-m)=\frac{(-1)^{m+1}\sqrt{\pi}\,2^{m+1}}{(2m+1)!!}\quad(m=0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

3607. $$2^{2z-1}\,\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z).$$

3608. $$|\Gamma(iy)|=\sqrt{\frac{\pi}{y\operatorname{sh}\pi y}}\quad(y>0).$$

3609. $$\frac{\Gamma\left(p+n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(p-n+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{2^{2n}}(4p^2-1^2)(4p^2-3^2)\cdots[4p^2-(2n-1)^2].$$

3610. $$\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)\Gamma\left(\frac{3}{m}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right)=\frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{m}}\quad(m=1,\,2,\,3,\ldots).$$

3611. $$\int_0^\infty\frac{\sin t}{t^n}\,dt=\frac{\pi\operatorname{cosec}(n\pi/2)}{2\,\Gamma(n)}\quad(0<n<2).$$

3612. $$\int_0^\infty\frac{\cos t}{t^n}\,dt=\frac{\pi\sec(n\pi/2)}{2\,\Gamma(n)}\quad(0<n<1),$$

3613. $$\int_0^{\pi/2}\cos^p\theta\cos q\theta\,d\theta=\pi\,\Gamma(p+1)\Big/\left[2^{p+1}\,\Gamma\left(\frac{2+p+q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2+p-q}{2}\right)\right].$$

3614. $$\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2=4\sqrt{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}}.$$

3615. Neka je $\psi(z)=\dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ i $\gamma=-\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\ln t\,dt$. Pokazati da funkcija ψ ima osobine:

1° $\psi(z+1)=\dfrac{1}{z}+\psi(z)$;

2° $\psi(1-z)-\psi(z)=\pi\operatorname{ctg}\pi z$;

3° $\psi(z)+\psi\left(z+\dfrac{1}{2}\right)+2\ln 2=2\,\psi(2z)$;

4° $\psi(n+1)=-\gamma+\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu}$;

5° $\psi\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\gamma-2\ln 2.$

3616. Dokazati da je $$\left(1+\frac{1}{1^2}\right)\left(1+\frac{1}{4^2}\right)\left(1+\frac{1}{7^2}\right)\cdots=\frac{[\Gamma(^1/_3)]^2}{\left[\Gamma\left(\frac{1+i}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1-i}{3}\right)\right]^2}.$$

3617. Izračunati: 1° $B(3,{}^5/_2)$; 2° $B(^1/_3,\,^2/_3)$.

3618. Izraziti sledeće integrale preko B-funkcije:

1° $\displaystyle\int_0^2\sqrt{x(2-x)}\,dx$; 2° $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sqrt{\operatorname{tg}\theta}\,d\theta$.

Dokazati da je:

3619. $$\int_0^4 x^{3/2}(16-x^2)^{1/2}\,dx=\frac{64}{21}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2.$$

3620. $$\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^4-x^4}}=\frac{[\Gamma(^1/_4)]^2}{4a\sqrt{2\pi}}\quad(a>0).$$

3621. $$\int_0^1\frac{x^{m-1}+x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx=2B(m,n)\quad(R_e\{m\}>0,\ R_e\{n\}>0).$$

3622. $$\frac{B(m+1,n)}{B(m,n+1)}=\frac{m}{n}.$$

3623. $$\frac{B\left(\frac{p+1}{2},\frac{1}{2}\right)}{B\left(\frac{p+1}{2},\frac{p+1}{2}\right)}=2^p.$$

§ 2. Hipergeometrijska funkcija i Zeta-funkcija

1° *Hipergeometrijska funkcija* $F(a,\,b,\,c,\,z)$ se definiše redom

$$F(a,b,c,z)=1+\frac{ab}{1!\,c}z+\frac{a(a+1)\,b(b+1)}{2!\,c(c+1)}z^2+\frac{a(a+1)(a+2)\,b(b+1)(b+2)}{3!\,c(c+1)(c+2)}z^3+\cdots$$

($|z|<1$ i $|z|=1$ ako je $R_e\{c-a-b\}>0$).

Za $|z|>1$ funkcija $F(a,b,c,z)$ se može analitički produžiti.

2° Važnije osobine:

1) Za $|z|<1$, $R_e\{c\}>R_e\{b\}<0$ važi

$$F(a,b,c,z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}\int_0^\infty t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}\,dt.$$

2) $y=F(a,b,c,z)$ zadovoljava Gaussovu diferencijalnu jednačinu

$$z(1-z)\,y''+[c-(a+b+1)\,z]\,y'-aby=0.$$

3° Neka je $R_e\{z\}>1$. *Zeta-funkcija* $\zeta(z)$ je definisana redom

$$\zeta(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}.$$

$\zeta(z)$ se može analitički produžiti i za druge vrednosti z.

4° Važnije osobine ζ-funkcije:

1) $\zeta(1-z)=2^{1-z}\,\Gamma(z)\cos(\pi z/2)\,\zeta(z)$.

2) $\zeta(z)=\dfrac{1}{\Gamma(z)}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{t^{z-1}}{e^t+1}\,dt \quad (R_e\{z\}>0)$.

3) $\zeta(2k)=\dfrac{2^{2k-1}\pi^{2k}B_k}{(2k)!} \quad (k=1,2,3,\ldots)$, gde su B_k Bernoullievi brojevi.*)

4) $\dfrac{1}{\zeta(z)}=\displaystyle\prod_p\left(1-\frac{1}{p^z}\right)$, gde se proizvod uzima po svim prostim brojevima p.

3624. Izračunati $F\left(1/2,\ -m,\ \dfrac{1}{2}-m,\ 1\right)$ ako je m prirodan broj.

Pokazati da je:

3625. $F(1/2,\ 1/2,\ 3/2,\ z^2)=\dfrac{\operatorname{Arc\,sin} z}{z}$. **3626.** $z\,F(1,\ 1,\ 2,\ -2)=\ln(1+z)$.

3627. $F(1/2,\ 1,\ 3/2,\ -z^2)=\dfrac{\operatorname{Arc\,tg} z}{z}$.

3628. $F(a,\ -a,\ 1/2,\ \sin^2 z)=\cos 2az$.

3629. $\dfrac{d}{dz}F(a,\ b,\ c,\ z)=\dfrac{ab}{c}F(a+1,\ b+1,\ c+1,\ z)$.

3630. $F(a,\ b,\ c,\ 1)=\dfrac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)} \quad (R_e\{c-a-b\}>0,\ c\neq 0,\ -1,\ -2,\ldots)$.

3631. $F(a,\ b,\ c,\ z)=(1-z)^{c-a-b}F(c-a,\ c-b,\ c,\ z)$.

3632. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{\pi}{2}\,F(1/2,\ 1/2,\ 1,\ k^2)$.

3633. $(1+x)^n=F(-n,\ \beta,\ \beta,\ -x)$. **3634.** $e^x=\lim\limits_{n\to\infty}F\left(1,\ n,\ 1,\ \dfrac{x}{n}\right)$.

3635. $\ln(1+x)=F(1,\ 1,\ 2,\ -x)$. **3636.** $\dfrac{1}{2x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}=F(1/2,\ 1,\ 3/2,\ x^2)$.

*) Videti § 4 ove glave.

3637. $(1+x)^n+(1-x)^n=2\,F\left(-\dfrac{n}{2},\ \dfrac{1-n}{2},\ \dfrac{1}{2},\ x^2\right)$.

3638. Dokazati da je za $|x|<1$ opšte rešenje Gaussove jednačine

$$x(1-x)\,y''+[c-(a+b+1)\,x]\,y'-aby=0$$

dato sa $y=c_1F(a,b,c,x)+c_2x^{1-c}F(a-c+1,\ b-c+1,\ 2-c,\ x)$.

3939. Polinom $Q(x)=F\left(p+q+n+1,\ -n,\ p+1,\ \dfrac{1-x}{2}\right)$ naziva se Jacobiev polinom.

Dokazati da je

$$(1-x)^p(1+x)^qQ(x)=$$
$$=\frac{1}{2^n(p+1)\,(p+2)\cdots(p+n)}\,\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{p+n}(1+x)^{q+n}\right].$$

3640. Neka je $F_n(x)=F\left(a+n,\ \beta+n,\ \gamma+n,\ \dfrac{1-x}{2}\right)$.

Pokazati da je

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x)^{\gamma}(1+x)^{a+\beta-\gamma+1}F_1(x)\right]=2\gamma(1-x)^{\gamma-1}(1+x)^{a+\beta-\gamma}F_0(x).$$

3641. Dokazati da je $\zeta(z)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^z}$ analitička funkcija u oblasti $R_e\{z\}>1+$ $+\delta$, gde je δ proizvoljan mali broj.

3642. Dokazati da je $\displaystyle\prod_p\left(1-\frac{1}{p^z}\right)^{-1}=\zeta(z)$, gde je proizvod uzet po svim prostim brojevima p.

3643. Pokazati da je $\displaystyle\prod_p\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1}=\frac{\pi^2}{6}$ gde je proizvod uzet po svim prim brojevima p.

3644. Pokazati da je jedini singularitet funkcije $\zeta(z)$ tačka $z=1$ pol prvog reda u kojem je reziduum jednak 1.

3645. Pokazati da je:

1° $\zeta(-1)=-1/12$; 2° $\zeta(-3)=1/120$.

§ 3. Eliptičke funkcije

1° Jacobieve eliptičke funkcije. Integral

$$z=\int_0^{w}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad (|k|<1) \qquad (1)$$

naziva se *eliptički integral* prve vrste. On egzistira za w realno i takvo da je $|w|<1$. Analitičkim produženjem on se može produžiti i za druge vrednosti w. Ako je $t=\sin\theta$ i $w=\sin\varphi$ dobijamo

$$z=\int_0^{\varphi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}. \tag{2}$$

Ako je k konstanta, funkciju $\varphi=f(z)$, definisanu sa (2), označavamo sa $\varphi=am\, z$ ($\varphi=am(z, k)$), a funkciju $w=g(z)$, definisanu sa (1), označavamo sa $w=sn\, z$ ($w=sn(z, k)$). Ova poslednja se naziva *eliptička funkcija*.

Po analogiji sa trigonometrijskim funkcijama, uvode se i sledeće eliptičke funkcije

$$cn\, z=\sqrt{1-sn^2 z} \quad \text{i} \quad dn\, z=\sqrt{1-k^2 sn^2 z}.$$

2° Periodičnost eliptičkih funkcija. Funkcija $sn\, z$ ima dva osnovna perioda: $4K$ i $2iK'$ gde je:

$$K=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}};\quad K'=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}$$

a k i k' su vezani jednakosti $k'=\sqrt{1-k^2}$ i nazivaju se *komplementarni moduli* funkcije $sn\, z$.

Funkcija $cn\, z$ ima periode $4K$ i $2K+2iK'$, a funkcija $dn\, z$ ima osnovne periode $2K$ i $4iK'$.

3° Adicione teoreme i izvodi eliptičkih funkcija.

1) $$sn(z_1+z_2)=\frac{sn\, z_1\, cn\, z_2\, dn\, z_2+cn\, z_1\, dn\, z_1\, sn\, z_2}{1-k^2 sn^2 z_1\, sn^2 z_2}.$$

$$cn(z_1+z_2)=\frac{cn\, z_1\, cn\, z_2-sn\, z_1\, sn\, z_2\, dn\, z_1\, dn\, z_2}{1-k^2 sn^2 z_1\, sn^2 z_2}.$$

$$dn(z_1+z_2)=\frac{dn\, z_1\, dn\, z_2-k^2 sn\, z_1\, sn\, z_2\, cn\, z_1\, cn\, z_2}{1-k^2 sn^2 z_1\, sn^2 z_2}.$$

2) $(sn\, z)'=cn\, z\, dn\, z$; $(cn\, z)'=-sn\, z\, dn\, z$; $(dn\, z)'=-k^2 sn\, z\, cn\, z$.

Dokazati da je:

3646. 1° $sn(0)=0$; 2° $cn(0)=1$; 3° $dn(0)=1$; 4° $sn(-z)=-sn\, z$; 5° $cn(-z)=cn\, z$; 6° $dn(-z)=dn\, z$.

3647. 1° $sn(z+2K)=-sn\, z$; 2° $cn(z+2K)=-cn\, z$.

3648. 1° $\sin(K+iK')=1/k$; 2° $cn(K+iK')=-ik'/k$; 3 $dn(K+iK')=0$.

3649. 1° $sn(2K+i2K')=0$; 2° $cn(2K+2iK')=1$; 3° $dn(2K+2iK')=-1$.

3650. 1° $sn(z+2iK')=sn\, z$; 2° $cn(z+2K+2iK')=cn\, z$; 3° $dn(z+4iK')=dn\, z$.

3651. 1° $sn\, 2z=\dfrac{2\, sn\, z\, cn\, z\, dn\, z}{1-k^2 sn^4 z}$; 2° $cn\, 2z=\dfrac{1-2\, sn^2 z+k^2 sn^4 z}{1-k^2 sn^4 z}$.

3652. $\dfrac{sn\, z_1+sn\, z_2}{cn\, z_1+cn\, z_2}=tn\,\dfrac{1}{2}(z_1+z_2)\, dn\,\dfrac{1}{2}(z_1-z_2)\qquad\left(tn\, z=\dfrac{sn\, z}{cn\, z}\right)$.

3653. 1° $sn(K/2)=\sqrt{2/3}$; 2° $cn(K/2)=\sqrt{1/3}$; 3° $dn(K/2)=\sqrt{1/2}$. (U svim slučajevima je $k=\sqrt{3}/2$).

3654. Pokazati da je opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y''=(6k^2 sn^2 x+h)\, y$$

dato sa $y=cn\, x\; dn\, x\left(c_1+c_2\displaystyle\int\frac{dx}{sn^2 x\, cn^2 x}\right)$.

Dokazati da je;

3655. 1° $sn(iz, k)=i\, tn(z, k')$; 2° $cn(iz, k)\, cn(z, k')=1$; 3° $dn(iz, k)=\dfrac{dn(z, k')}{cn(z, k')}$.

3656. $sn^2 z+cn^2 z=1$. **3657.** $\dfrac{cn\, 2z+dn\, 2z}{1+cn\, 2z}=dn^2 z$.

3658. $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{t^4-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$\left(K(k)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right.$ je potpuni eliptički integral prve vrste).

3659. $\displaystyle\int_0^1\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}=\frac{\pi}{2}F(1/2, 1/2, 1, k^2)$.

3660. $\dfrac{dK}{dk}=-\dfrac{K}{k}+\dfrac{E}{kk'}$.

$\left(E(k)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi\right.$ je potpuni eliptički integral druge vrste$\Big)$.

3661. $\dfrac{dE}{dk}=-\dfrac{K}{k}+\dfrac{E}{k}$ gde je $K=K(k)$, $E=E(k)$.

3662. $KE'+K'E-KK'=\pi/2$, gde su $K=K(k)$ i $E=E(k)$ potpuni eliptički integrali prve i druge vrste i $K'=K(k')$, $E'=E(k')$, $k^2+k'^2=1$. (Legendreova relacija)

3663. $2K(c)=(1+k')K(k)$ gde je: $c=\dfrac{1-k'}{1+k'}$, $k^2+k'^2=1$.

3664. Dokazati da funkcije $K = K(k)$ i $K' = K(k')$ zadovoljavaju diferencijalnu jednačinu $k(1-k^2)\dfrac{d^2y}{dk^2}+(1-3k^2)\dfrac{dy}{dk}-ky=0.$

Dokazati da je:

3665. $snz = z-\dfrac{1}{6}(1+k^2)z^3+\dfrac{1}{120}(1+14k+k^4)z^5+\cdots$

3666. $cnz=1-\dfrac{1}{2}z^2+\dfrac{1}{24}(1+4k^2)z^4+\cdots$

3667. $dnz=1-\dfrac{1}{2}k^2z^2+\dfrac{1}{24}k^2(k^2+4)z^4+\cdots$

3668. Odrediti realni imaginarni deo funkcije $w=sn(z,k)$ $(z=x+iy,\ 0<k<1)$.

§ 4. Bernoullievi polinomi i Bernoullievi brojevi

1° Funkcija generatrisa. Funkcija $G(t,x)$ kompleksne promenljive t i kompleksnog parametra x je *generatrisa* niza funkcija $\varphi_n(x)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ ako je

$$G(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x)\,t^n.$$

2° *Bernoullievi polinomi* $B_n(x)$ su definisani generatrisom

$$G(t,x)=\begin{cases}\dfrac{t\,e^{tx}}{e^t-1}, & x\neq 0\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

3° Važnije osobine:

1) $B_n(x)=\dfrac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k x^{n-k}$ gde su B_k izvesne konstante koje se zovu *Bernoullievi brojevi*.

2) Za Bernoullieve brojeve i Bernoullieve polinome važi sledeća simbolička relacija

$$n!\,B_n(x)=(B+x)^n$$

gde posle izvršenog stepenovanja umesto B^k treba staviti B_k $(k=1,2,\ldots,n)$.

3) Ako je $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^x-1}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$, tada je $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{B_n}{n!}x^n$.

3669. Naći prvih osam Bernoullievih brojeva.

3670. Naći prva četiri Bernoullieva polinoma.

3671. Pokazati da je $B_n(0)=\dfrac{B_n}{n!}$.

3672. Razvijajući u stepeni red po x funkciju $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

pokazati da je $\left(\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{B_n}{n!}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)!}x^n\right)=1.$

Pokazati da je:

3673. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{2k}}=(-1)^{k-1}\dfrac{B_{2k}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}.$

3674. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^{2k}}=(-1)^k\dfrac{2^{2k}-1}{2(2k)!}B_{2k}\pi^{2k}.$

3675. 1° $\operatorname{sgn} B_{2k}=(-1)^{k-1}$; 2° $B_{2k+1}=0$ $\quad(k=1,2,3,\ldots)$.

3676. $(2B+1)^n=(2-2^n)B_n$ gde posle dizanja na k-ti stepen umesto B^k treba treba staviti B_k $(k=1,2,\ldots,n)$.

3677. Dokazati da su Bernoullievi brojevi racionalni.

3678. Brojevi $E_0, E_1, E_2, \ldots,$ definisani simboličkom relacijom

$$(E+1)^n=(E-1)^n\quad(n=1,2,\ldots),$$

gde posle stepenovanja umesto E^k treba staviti E_k, zovu se Eulerovi brojevi. Pokazati da je $E_{2k-1}=0$ $\quad(k=1,2,3,\ldots)$.

Dokazati da je:

3679. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(2n+1)^{2k+1}}=(-1)^k\dfrac{E_{2k}}{2^{2k+2}(2k)!}\pi^{2k+1}.$

3680. $(4B+1)^n=(2-2^n)B_n-nE_{n-1}.$

3681. $(4B+3)^n=(2-2^n)B_n+nE_{n-1}.$

3682. $\dfrac{x}{2}\operatorname{ctg}h\dfrac{x}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{B_{2n}}{(2n)!}x^{2n}\quad(|x|<1).$

3683. $\operatorname{tg}x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}}{(2n)!}x^{2n-1}\quad\left(|x|<\dfrac{\pi}{2}\right).$

3684. $\dfrac{z}{\sin z}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2^{2n}-2)B_n}{(2n)!}z^{2n}\quad(|z|<\pi).$

3685. $\ln\dfrac{\sin z}{z}=-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{2n-1}B_n}{n(2n)!}z^{2n}\quad(|z|<\pi).$

3686. $\ln\cos z=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{2n-1}(2^{2n-1}-1)B_n}{n(2n)!}z^{2n}\quad\left(|z|<\dfrac{\pi}{2}\right).$

3687. Dokazati da je

$$B_{2n}=(2n)!\begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n-1)!} & \cdots & & & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}$$

3688. $B_n(1+z)-B_n(z)=\dfrac{z^{n-1}}{(n-1)!}$. 3689. $B_n(1-x)=(-1)^n B_n(x)$.

3690. $B_n^{(k)}(x)=B_{n-k}(x) \quad (k<n)$. 3691. $\int_0^1 B_{n-1}(x)\,dx=\delta_{1n}$.

3692. $B_n(0)=B_n(1)=\dfrac{1}{n!}B_n \quad (n>1)$.

3693. $B_n^{(k)}(0)=\dfrac{1}{(n-k)!}B_{n-k} \quad (k<n-1)$.

3694. $1^n+2^n+3^n+\cdots+k^n=\dfrac{1}{n+1}[(1+k+B)^{n+1}-B^{n+1}]$.

3695. $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1^n+2^n+3^n\cdots+k^n}{k^{n+1}}=\dfrac{1}{n+1}$.

3696. $B_{2p}=(-1)^{p-1}4p\int_0^\infty \dfrac{t^{2p-1}}{e^{2\pi t}-1}\,dt$. 3697. $B_{2p}=4\pi\int_0^\infty \dfrac{t^{2p}}{(e^{\pi t}-e^{-\pi t})^2}\,dt$.

3698. $B_{2k}(x)=\dfrac{(-1)^{k-1}2[(2k)!]^2}{(2\pi)^{2k}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2\pi n x}{n^{2k}}$.

3699. Neka funkcija $f(x)$ u intervalu $(k, k+1)$ ima neprekidne izvode do $2\nu+1$-og reda zaključno. Dokazati sledeću Eulerovu sumacionu formulu

$$\frac{1}{2}[f(k+1)-f(k)]=\int_k^{k+1} f(x)\,dx+\frac{B_2}{2!}[f'(k+1)-f'(k)]+$$
$$+\frac{B_4}{4!}[f'''(k+1)-f'''(k)]+\cdots+\frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!}[f^{(2\nu-1)}(k+1)-f^{(2\nu-1)}(k)]+$$
$$+\int_0^1 f^{(2\nu+1)}(x+k)\,B_{2\nu+1}(x)\,dx.$$

§ 5. Legendreovi polinomi

1° *Legendreovi polinomi,* $P_n(x)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, su definisani generatrisom

$$G(t, x)=\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} \qquad (|x|<1)$$

gde se uzima ona grana funkcije $G(t, x)$ za koju je $G(0, x)=1$.

2° Važnije osobine:

1) $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\dfrac{(2n-2k)!}{(n-k)!\,(n-k)!}\dbinom{n-k}{k}x^{n-2k}$.

2) $P_n(x)=\dfrac{1}{n!\,2^n}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ (*Rodriguesova formula.*)

3) $(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0$.

4) $\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)\,dx=\dfrac{2}{2n+1}\delta_{mn}$ (osobina ortogonalnosti).

5) $P_n(x)$ je jedno partikularno rešenje jednačine

$$(x^2-1)y''+2xy'-n(n+1)y=0 \quad (n=0, 1\ 2, \ldots).$$

3700. Naći: 1° $P_3(z)$; 2° $P_4(z)$; 3° $P_5(z)$.

Dokazati jednakosti:

3701. $P'_{n+1}(z)-P'_{n-1}(z)=(2n+1)P_n(z)$.

3702. $P'_{n+1}(z)-zP'_{n-1}(z)=(n+1)P_n(z)$.

3703. $nP'_{n+1}(z)-(2n+1)zP'_n(z)+(n+1)P_{n-1}(z)=0$.

3704. 1° $P_{2n+1}(0)=0$; 2° $P_{2n}(0)=(-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$; 3° $P_n(1)=1$;

4° $P_n(-1)=(-1)^n$.

3705. $(x^2-1)P_n(x)=nxP_n(x)-nP_{n-1}(x)$.

3706. $(1-x^2)\{[P'_n(x)]^2-P'_{n-1}(x)P'_{n+1}(x)\}=n(n+1)\,[P_n^2(x)-P_{n-1}(x)P_{n+1}(x)]$.

3707. $\int_{-1}^{1}(1-x^2)P'_m(x)P'_n(x)\,dx=0$. 3708. $\int_{-1}^{1}P_{2m}(x)P_n(x)P_{n-1}(x)\,dx=0$.

3709. $\int_{-1}^{1}P'_{2n}(x)P'_{2m}(x)\,dx=2m(2m+1) \quad (n>m)$.

3710. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^n P_n(x)\,dx=\frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

3711. $\displaystyle\int_{0}^{1} x^2 P_{n+1}(x)\,P_{n-1}(x)\,dx=\frac{n(n+1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$.

3712. Ako je $f_n(x)=\dfrac{1}{n!\,(b-a)^n}\dfrac{d^n}{dx^n}\{(x-a)^n(x-b)^n\}\qquad(n=0,1,2,\ldots)$,

dokazati da je:

$1°\ f_n(a)=(-1)^n;\quad 2°\ f_n(b)=1;\quad 3°\ f_n\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=\begin{cases}0, & n=2k+1\\ \dbinom{-1/2}{k}, & n=2k\end{cases}.$

3713. Pokazati da je $y=\dfrac{d^m}{dx^m}[P_n(x)]$ partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$$(1-x^2)\,y''-2(m+1)\,xy'+[n(n+1)-m(m+1)]\,y=0.$$

3714. Odrediti a_k $(k=0,1,\ldots,n)$ iz identiteta $x^n=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k P_k(x)$ gde je $P_k(x)$ Legendreov polinom.

3715. Ako su m i n $(n>m)$ iste parnosti, dokazati da je

$$\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}P_n(x)\,\frac{d}{dx}P_m(x)\,dx=m(m+1).$$

3716. Izračunati integral $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^2-1)\,P_{n+1}(x)\,P_n'(x)\,dx$.

3717. Ako je $P_\nu(-1/2)=P_\nu$, pokazati da je

$$P_n=P_0\,P_{2n}-P_1\,P_{2n-1}+P_2\,P_{2n-2}-\cdots+P_{2n}\,P_0.$$

3718. Polazeći od Laplaceove formule za Legendreove polinome:

$$P_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta\right)^n d\theta,$$

pokazati da za njih važi nejednakost

$$P_n^2(x)<P_{n-1}(x)\,P_{n+1}(x)\qquad(|x|>1).$$

3719. Proveriti jednakost $nP_n(\cos\theta)=\sum\limits_{k=1}^{n}\cos(k\theta)\,P_{n-k}(\cos\theta)$.

3720. Pokazati da je opšti integral Legendreove jednačine

$$(1-z^2)\,y''-2zy'+n(n+1)\,y=0\qquad n=0,1,2,\ldots)$$

funkcija $y=c_1P_n(z)+c_2\,Q_n(z)$ gde je $Q_n(z)=P_n(z)\displaystyle\int_z^{\infty}\frac{dt}{(t^2-1)\,[P_n(t)]^2}$.

3721. Pomoću prethodnog zadatka pokazati da je opšte rešenje jednačine

$$(1-z^2)y''-2zy'+2y=0.$$

funkcija $y=c_1z+c_2\left[1+\dfrac{1}{2}z\,\mathrm{Ln}\,\dfrac{z-1}{z+1}\right]$.

3722. Ako je m prirodan broj, dokazati da je:

$1°\ P_{2m}(z)=\dfrac{(-1)^m(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}\,F\left(-m,\,m+\dfrac{1}{2},\,\dfrac{1}{2},\,z^2\right);$

$2°\ P_{2m+1}(z)=\dfrac{(-1)^m(2m+1)!}{2^{2m}(m!)^2}\,zF\left(-m,\,m+\dfrac{3}{2},\,\dfrac{3}{2},\,z^2\right).$

3723. Ako je m prirodan broj, dokazati da je

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}P_{m+n}(z)\big|_{z=1}=\frac{\Gamma(2m+n+2)}{2^{m+1}(m+1)!\,\Gamma(n)}.$$

3724. Uzastopnom primenom parcijalne integracije dokazati da je

$$\int_{-1}^{1}(1+x)^m P_n(x)\,dx=\frac{2^{m+1}\,m!\,n!}{(m-n)!\,(m+n+1)!}\qquad(n<m).$$

§ 6. Laguerreovi polinomi

1° *Laguerreovi polinomi* $L_n(x)$ su definisani sa

$$\frac{1}{1-t}\,e^{-\frac{xt}{1-t}}=\sum_{n=}^{\infty}\frac{L_n(x)}{n!}\,t^n.$$

2° Važnije osobine:

1) $L_n(x)=e^x\dfrac{d^n}{dx^n}\,(x^n e^{-x})$.

2) $L_{n+1}(x)+(x-2n-1)\,L_n(x)+n^2L_{n-1}(x)=0$.

3) $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-x}L_m(x)\,L_n(x)\,dx=(n!)^2\,\delta_{mn}$.

4) $L_n(x)$ je jedno partikularno rešenje jednačine

$$xy''+(1-x)y'+ny=0.$$

3° Polinomi $L_n^s(x)=x^{-s}e^x\dfrac{d^n}{dx^n}(x^{n+s}e^{-x})$, gde je s konstanta, zovu se *generalisani Laguerreovi polinomi.*

3725. 1° $L_0(x)$; 2° $L_1(x)$; 3° $L_2(x)$; 4° $L_3(x)$.

3726. Pokazati da je $L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\dfrac{n!}{k!}\dbinom{n}{k}x^k$.

3727. Pokazati da je $y=L_n(1-x)$ partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$$(1-x)y''-xy'+ny=0.$$

Dokazati da je:

3728. $\left\{\dfrac{\partial^n}{\partial t^n}\left(\dfrac{1}{1-t}e^{-\frac{xt}{1-t}}\right)\right\}_{t=0}=L_n(x)$.

3729. $\dfrac{n!}{2\pi i}\oint\limits_{|t|=r>0}e^{-xt}\dfrac{(t+1)}{t^{n+1}}dt=L_n(x)$.

3730. $\dfrac{n!}{2\pi i}\oint\limits_{c}e^{-z}\left(1+\dfrac{x}{z}\right)^n\dfrac{dz}{z}=L_n(x)$ gde je c zatvorena kriva koja opkoljava tačku $z=0$.

3731. $\dfrac{x^n}{n!}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\dfrac{1}{k!}\dbinom{n}{k}L_k(x)$.

3732. $L_n(ax)=n!\sum_{m=0}^{n}\dbinom{n}{m}(1-a)^{n-m}a^m\dfrac{L_m(x)}{m!}$.

3733. $|L_n(x)|<n!\,e^{\frac{x}{2}}$ $(0<x<\infty)$ (Szegöva nejednakost).

3734. Dokazati osobinu ortogonalnosti Laguerreovih polinoma, tj. jednakost

$$\int_0^\infty e^{-x}L_m(x)L_n(x)\,dx=(n!)^2\delta_{mn}.$$

Dokazati da za generalisane Laguerreove polinome, $L_n^s(x)$, važe osobine:

3735. $L_n^s(z)+(z-2n-s+1)L_{n-1}^s(z)+(n-2)(n+s-1)L_{n-2}^s(z)=0$.

3736. $\dfrac{d}{dx}[L_n^s(x)]=-n\,L_{n-1}^{s+1}(x)$.

3737. $x\,L_n^s(x)=(n+s)L_n^{s-1}(x)-L_{n+1}^{s-1}(x)$.

3738. $\dfrac{1}{(1-t)^{s+1}}e^{-\frac{xt}{1-t}}=\sum_{n=0}^{\infty}L_n^s(x)\dfrac{t^n}{n!}$ $\quad(|t|<1)$.

3739. $\int_0^\infty x^{s+1}e^{-x}L_n^s(x)L_m^s(x)\,dx=m!\,\Gamma(s+1+n)\,\delta_{mn}$.

3740. Dokazati da funkcija $J=\int_0^\infty e^{-\lambda x}L_m^r(\alpha x)L_n^s(\beta x)x^{\sigma-1}dx$ $\quad(\sigma>1)$ zadovoljava sistem parcijalnih jednačina:

$$\alpha\frac{\partial^2 J}{\partial\alpha^2}+\alpha\frac{\partial^2 J}{\partial\alpha\,\partial\lambda}+(r+1)\frac{\partial J}{\partial\alpha}-m\frac{\partial J}{\partial\lambda}=0$$

$$\beta\frac{\partial^2 J}{\partial\beta^2}+\beta\frac{\partial^2 J}{\partial\beta\,\partial\lambda}+(s+1)\frac{\partial J}{\partial\beta}-n\frac{\partial J}{\partial\lambda}=0.$$

§ 7. Hermiteovi polinomi

1° *Hermiteovi polinomi,* $H_n(x)$, su definisani sa

$$e^{2tx-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n.$$

2° Važnije osobine:

1) $H_n(x)=\sum_{k=0}^{[n/2]}\dfrac{(-1)^k n!}{k!\,(n-2k)!}(2x)^{n-2k}$.

2) $H_{n+1}(x)-2x\,H_n(x)+2n\,H_{n-1}(x)=0$.

3) $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}H_m(x)H_n(x)\,dx=2^n n!\sqrt{\pi}\,\delta_{mn}$.

4) $H_n(x)$ je jedno partikularno rešenje jednačine

$$y''-2xy'+2ny=0.$$

3741. Naći prva četiri Hermiteova polinoma.

3742. Izračunati: 1° $H_{2n}(0)$; 2° $H'_{2n+1}(0)$.

Dokazati jednakosti:

3743. $H'_n(x)=\dfrac{d}{dx}\{H_n(x)\}=2n\,H_{n-1}(x)$.

3744. $H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x) \qquad (n>1).$

3745. $\dfrac{d^2}{dx^2}\{H_n(x)\}-2x\dfrac{d}{dx}\{H_n(x)\}+2nH_n(x)=0.$

3746. Funkcija $z=e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)$ se naziva Hermiteova funkcija. Pokazati da ova funkcija zadovoljava jednačinu $z''+(2n+1-x^2)z=0$.

Dokazati da je:

3747. $H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\dfrac{d^n(e^{-x^2})}{dx^n}.$

3748. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{H_k^2(x)}{k!\,2^k}=\frac{1}{n!\,2^{n+1}}\{H_{n+1}^2(x)-H_n(x)H_{n+2}(x)\}.$

3749. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}H_n(x)H_m(x)\,dx=\sqrt{\pi}\,(2^{n-1}n!\,\delta_{m,n-1}+2^n(n+1)!\,\delta_{m,n+1}).$

3750. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_m(x)H_n(x)H_r'(x)\,dx=$

$$=\begin{cases}\dfrac{m!\,n!\,r\,2^{m+\nu+1}}{(n-\nu)!}\dbinom{m-n+2\nu}{\nu}\sqrt{\pi}\ \text{za}\ r=m-n+2\nu+1,\ \max(0,m-n)<\nu<n.\\ 0,\quad \text{za ostale vrednosti.}\end{cases}$$

3751. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{a}}H_{2m}(x)\,dx=\frac{(2m)!}{m!}\sqrt{\pi a}\,(a-1)^m \qquad (a>0).$

3752. Pokazati da funkcija-generatrisa Hermiteovih polinoma

$$w(x,z)=e^{2xz-z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}z^n$$

zadovoljava parcijalne diferencijalne jednačine:

$$\frac{\partial w}{\partial z}-2(x-z)w=0,\quad \frac{\partial w}{\partial x}-2zw=0$$

pa na osnovu toga izvesti rekurentni obrazac za Hermiteove polinome i njihove izvode, kao i diferencijalnu jednačinu koju zadovoljavaju ovi polinomi.

Dokazati da između generalisanih Laguerreovih polinoma i Hermiteovih polinoma postoje veze:

3753. $H_{2n}(x)=(-1)^n 2^{2n} L_n^{-1/2}(x^2).$ 3754. $H_{2n+1}(x)=(-1)^n 2^{2n+1}x\,L_n^{1/2}(x^2).$

3755. Primenom stava o reziduumu dokazati da je

$$H_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{e^{2xz-z^2}}{z^{n+1}}\,dz$$

gde je c prosta zatvorena kontura koja opkoljava tačku $z=0$.

§ 8. Čebiševljevi polinomi

Čebiševljevi polinomi $T_n(x)$, su definisani sa

$$T_n(x)=\frac{\varphi_n(x)}{\varepsilon_n}$$

gde je $\varepsilon_0=1$ i $\varepsilon_n=2\ (n>1)$ a niz funkcija $\varphi_n(x)$ ima generatrisu

$$G(t,x)=\frac{1-t^2}{1-2xt+t^2}.$$

2° Važnije osobine:

1) $T_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}2^{n-2k-1}x^{n-2k} \quad (n>1,\ T_0(x)=1.$

2) $T_n(x)=(-1)^n 2^n\dfrac{n!}{(2n)!}\sqrt{1-x^2}\dfrac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}.$

3) $T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x).$

4) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}T_m(x)T_n(x)\,dx=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\delta_{mn},\ n\neq 0\\ \pi,\ n=0\end{cases}.$

5) $T_n(x)$ je jedno partikularno rešenje jednačine

(1) $$(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0.$$

3° Drugo partikularno rešenje jednačine (1) je funkcija

$$U_n(x)=\sin(n\arccos x)$$

koja se zove *Čebiševljeva funkcija druge vrste.*

4° Polinom $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n$, sa realnim koeficijentima, za koji je izraz $\max\limits_{x\in[-1,1]}|x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n|$ minimalan, je $2^{-n+1}T_n(x)$.

3756. Napisati prva četiri Čebiševljeva polinoma.

Dokazati jednakosti:

3757. $\cos(n\arccos x)=T_n(x).$

3758. $2\,T_m(x)\,T_n(x)=T_{n+m}(x)-T_{n-m}(x) \qquad (n>m).$

3759. $T_{-n}(x)=T_n(x).$ 3760. $U_{-n}(x)=-U_n(x).$

3761. 1° $T_n(1)=1$; 2° $T_n(-1)=T_{2n}(0)=(-1)^n$; 3° $T_{2n+1}(0)=0.$

3762. 1° $U_n(1)=0$; 2° $U_n(-1)=U_{2n}(0)=0$; 3° $U_{2n+1}(0)=(-1)^n.$

3763. $\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n=2\,T_n(x).$

3764. 1° $T_n'(1)=n^2$; 2° $T_n'(-1)=(-1)^{n-1}n^2.$

3765. $(1-x^2)\dfrac{d^2}{dx^2}T_n(x)-x\dfrac{d^2}{dx}T_n(x)+n^2\,T_n(x)=0.$

3766. $$\int_{-1}^{1} T_m(x)\,T_n(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \pi/2, & m=n\neq 0\\ \pi, & m=n=0.\end{cases}$$

3767. $$\int_{-1}^{1} T_n^2(x)\,dx=1-\frac{1}{4n^2-1}.$$

3768. $U_n(x)=(-1)^{n-1}\,2^n n\dfrac{n!}{(2n)!}\dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(1-x^2)^{n-1/2}$, gde je $U_n(x)$ Čebiševljeva funkcija.

3769. $$\int_{-1}^{1} U_m(x)\,U_n(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \pi/2, & m=n\neq 0.\\ 0, & mn=0\end{cases}$$

3770. $T_n(x)=F\left(n,\,-n,\,\dfrac{1-x}{2}\right).$

3771. Naći sve nule polinoma $T_n(x)$.

3772. Dokazati da je funkcija $y=\dfrac{U_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ jedno partikularno rešenje jednačine

$$(1-x^2)\,y''-3\,xy'+n\,(n+2)\,y=0.$$

3773. Odrediti polinom u obliku ax^2+bx+1 koji najbolje aproksimira funkciju $y=0$ na segmentu $[-1,\,1]$.

3774. Odrediti polinom ax^2+x+b, gde su a i b proizvoljne konstante, koji najmanje odstupa od nule na segmentu $[-1,\,1]$.

§ 9. Ortogonalni polinomi

1° Za niz polinoma

(1) $$A_0(x),\ A_1(x),\ A_2(x),\ \ldots$$

gde je $A_k(x)$ stepena k, kažemo da je *ortogonalan* na segmentu $[a,\,b]$ sa *težinom* $p(x)$ ako je

$$\int_a^b p(x)\,A_m(x)\,A_n(x)\,dx=0$$

za svako $m\neq n$.

Niz (1) je ortonormiran na $[a,\,b]$ ako je

$$\int_a^b p(x)\,A_m(x)\,A_n(x)\,dx=\delta_{mn}$$

gde je δ_{mn} Krneckerov simbol.

2° Za tri uzastopna polinoma ortogonalnog niza (1) postoji rekurentna relacija

$$A_{n+1}(x)-(\alpha_n x+\beta_n)\,A_n(x)+\gamma_n\,A_{n-1}(x)=0$$

gde su α_n, β_n i γ_n konstante.

3° Sve nule polinoma $A_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ iz ortogonalnog niza (1) su realne, proste i pripadaju intervalu $(a,\,b)$.

4° Razvijanje funkcija u red po ortogonalnim polinomima.

Neka funkcija $f(x)$ ispunjava uslove: 1) Postoji integral $\int_a^b p(x)\,f^2(x)\,dx$.

2° Za $x=x_0\in[a,\,b]$ postoji $f'(x_0)$. Neka je još niz (1) ograničen na $[a,\,b]$. Tada je

$$(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k\,A_k(x)$$

gde je

$$c_k=\int_a^b p(x)\,f(x)\,A_k(x)\,dx \qquad (k=0,\,1,\,2,\ldots).$$

Za $-1<x<1$ razložiti sledeće funkcije u red po Legendreovim polinomima $P_n(x)$:

3775. $f(x)=\begin{cases}0, & -1<x<0\\ 1, & 0<x<1\end{cases}$. 3776. $f(x)=|x|$.

3777. Ako je $f(x)$ polinom n-og stepena, dokazati da je

$$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left\{(2\,k+1)\,P_k(x)\int_{-1}^{1} f(t)\,P_k(t)\,dt\right\},$$

gde su $P_k(x)$ Legendreovi polinomi.

Neka su $L_n(x)$ Laguerreovi polinomi. Za $0<x<\infty$ sledeće funkcije razložiti u red po polinomima $\frac{L_n(x)}{n!}$:

3778. $f(x)=e^{-ax}$. **3779.** $f(x)=x^n$.

3780. $f(x)=\sin ax$. **3781.** $f(x)=\cos ax$.

Neka su $H_n(x)$ Hermiteovi polinomi. Na intervalu $(-\infty, \infty)$, sledeće funkcije razviti u red po polinomima $H_n^*(x)=\frac{(-1)^n 2^{-\frac{n}{2}}}{n!} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$:

3782. $f(x)=\begin{cases} -1, & x<0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$. **3783.** $f(x)=|x|$.

3784. $f(x)=e^{-ax}$. **3785.** $f(x)=\cos ax$.

Na intervalu $(-1, 1)$, sledeće funkcije razviti u red po polinomima $T_n^*(x)=\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$, gde su $T_n(x)$ Čebiševljevi polinomi:

3786. $f(x)=x^3$. **3787.** $f(x)=\begin{cases} 0, & -1<x<0 \\ 1, & 0<x<1 \end{cases}$.

3788. $f(x)=|x|$. **3789.** $f(x)=x^{2n}$.

§ 10. Besselove funkcije

1° *Besselove funkcije prve vrste $I_n(z)$, indeksa n,* su definisane sa

$$e^{z(t-1/t)/2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(z)\, t^n.$$

2° Važnije osobine:

1) $I_{-n}(z)=(-1)^n I_n(z)$ $\quad (n=0, 1, 2, \ldots)$.

2) $I_n(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k!\,(n+k)!}$ $\quad (n=0, 1, 2, \ldots)$.

3) $z I_{n-1}(z)-2n I_n(z)+z I_{n+1}(z)=0$.

4) $\frac{d}{dz}\{z^n I_n(z)\}=z^n I_{n-1}(z)$; $\quad \frac{d}{dz}\{z^{-n} I_n(z)\}=-z^{-n} I_{n+1}(z)$.

5) $I_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\varphi - z\sin\varphi)\, d\varphi$.

6) $I_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|t|=r>0} t^{-n-1} e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} dt$.

7) Za $n>0$ $I_n(z)$ je rešenje Besselove jednačine:

$$z^2 y''+z y'+(z^2-n^2)\, y=0.$$

3° *Besselova funkcija prve vrste, proizvoljnog indeksa ν,* gde je ν kompleksna konstanta, je

$$I_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z/2)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}.$$

4° *Besselove funkcije druge vrste, $N_\nu(z)$ i $N_n(z)$,* su definisane sa:

$$N_\nu(z)=\frac{I_\nu(z)\cos\nu\pi - I_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi} \quad (\nu \text{ nije ceo broj})$$

$$N_n(z)=\lim_{\nu\to n} \frac{I_\nu(z)\cos\nu\pi - I_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi} \quad (n \text{ ceo broj}).$$

3790. Proveriti jednakosti: 1° $I_0'(z)=-I_1(z)$; 2° $\int z^3 I_2(z)\,dz=z^3 I_3(z)+c$; 3° $\int z^3 I_0(z)\,dz=z^3 I_1(z)-2z^2 I_2(z)+c$.

Dokazati da je

3791. 1° $I_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2z}{\pi}}\sin z$; 2° $I_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2z}{\pi}}\cos z$.

3792. $I_{3/2}(z)\sin z - I_{-3/2}(z)\cos z=\sqrt{2/\pi z}$. **3793.** $I_n'(z)=\frac{1}{2}\left(I_{n-1}(z)-I_{n+1}(z)\right)$.

3794. Ako je $R_e\{z\}>0$ onda je $\int_0^\infty e^{-zt} I_0(t)\,dt=\frac{1}{\sqrt{z^2+1}}$.

3795. Ako je $R_e\{z\}>0$, dokazati da je

$$I_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi - z\sin\varphi)\,d\varphi - \frac{\sin n\varphi}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-n\varphi - z\,\mathrm{sh}\,\varphi}\, d\varphi.$$

Dokazati jednakosti:

3796. $\mathrm{ch}(x\,\mathrm{sh}\,\theta)=I_0(x)+2\sum_{\nu=1}^{\infty} I_{2\nu}(x)\,\mathrm{ch}\, 2\nu\theta$.

3797. $\mathrm{sh}(x\,\mathrm{sh}\,\theta)=2\sum_{\nu=0}^{\infty} J_{2\nu+1}(x)\,\mathrm{sh}(2\nu+1)\,\theta$.

3798. $[I_0(z)]^2+2[I_1(z)]^2+2[I_2(z)]^2+\cdots=1.$

3799. $e^{z\cos\alpha} I_0(z\sin\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n(\cos\alpha)}{n!}z^n.$

3800. 1° $\frac{z}{2}=I_1(z)+3I_3(z)+5I_5(z)+\cdots$

2° $\frac{z^2}{8}=I_2(z)+2^2I_4(z)+3^2I_6(z)+\cdots$

3801. $I_2(z)-I_0(z)=2I_0''(z).$ **3802.** $I_2(z)+\frac{1}{z}I_0'(z)=I_0''(z).$

3803. $16\,I_n^{(4)}(z)=I_{n-4}(z)-4I_{n-2}(z)+6I_n(z)-4I_{n+2}(z)+I_{n+4}(z).$

3804. $I_3(z)+3I_0'(z)+4I_0'''(z)=0.$

3805. $\frac{d}{dz}\left\{z^{\frac{\nu}{2}}I_\nu(2\sqrt{z})\right\}=z^{\frac{\nu-1}{2}}I_{\nu-1}(2\sqrt{z}).$

3806. $\frac{d}{dz}\left\{z^{-\frac{\nu}{2}}I_\nu(2\sqrt{z})\right\}=-z^{-\frac{\nu-1}{2}}I_{\nu+1}(2\sqrt{z}).$

3807. $\int_0^x\frac{1}{t}I_1^2(t)\,dt=\frac{1}{2}\ \ 1-I_0^2(x)-I_1^2(x)\}$

3808. $\int_0^x xI_0(x)\,dx=xI_1(x).$

3809. $\int_0^x x^3I_0(x)\,dx=2x^2I_0(x)+(x^3-4x)I_1(x).$

3810. Modifikovane Besselove funkcije prve vrste, $I_n(z)$, definisane su sa

$$e^{\frac{z}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}I_n(z)\,t^n.$$

Pokazati da je $I_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}.$

3811. Dokazati da je:

1° $\operatorname{ch}(x\operatorname{ch}\theta)=I_0(x)+2\sum_{\nu=1}^{\infty}I_{2\nu}(x)\operatorname{ch}2\nu\theta;$

2° $\operatorname{sh}(x\operatorname{ch}\theta)=2\sum_{\nu=0}^{\infty}I_{2\nu+1}(x)\operatorname{ch}(2\nu+1)\theta.$

3812. $I_n(z)=(-1)^nJ_n(iz).$

Kelvinove funkcije $ber_n z$ i $bei_n z$ definisane su sa jednakosti

$$ber_n z+i\,bei_n z=I_n\left(ze^{\frac{3\pi i}{4}}\right).$$

Dokazati jednakosti:

3813. 1° $ber_n z=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos\frac{3}{4}(n+2k)\pi}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k};$

2° $bei_n z=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin\frac{3}{4}(n+2k)\pi}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}.$

3814. 1° $ber_{n+1}x=-\frac{n\sqrt{2}}{x}(ber_n x-bei_n x)-ber_{n-1}x;$

2° $bei_{n+1}x=-\frac{n\sqrt{2}}{x}(ber_n x+bei_n x)-bei_{n-1}x.$

3815. Dokazati da je funkcija $y=\frac{1}{\cos x}[c_1I_n(x)+c_2N_n(x)]$ opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$x^2v''+(x-2x^2\operatorname{tg}x)\,y'-(x\operatorname{tg}x+n^2)\,y=0.$$

3816. Pokazati da Besselova funkcija $I_\nu(z)$, proizvoljnog indeksa ν, zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$z^2w''+zw'+(z^2-\nu^2)\,w=0.$$

3817. Proveriti da li je tačan razvoj

$$\ln x=-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{I_0(\lambda_k x)}{\lambda_k^2[I_1(\lambda_k x)]^2}$$

gde su λ_k rešenja jednačine $I_0(x)=0$ a $I_0(x)$ i $J_1(x)$ su Besselove funkcije prve vrste.

3818. Pokazati da je funkcija $y=x^{-\frac{a}{2}}Z_p(e^x)$ opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y''+\frac{a}{x}y'+\left(e^{2x}+\frac{a(a-2)}{4x^2}-p^2\right)y=0,$$

gde je $Z_p(x)=C_1I_p(x)+C_2N_p(x).$

3819. Dokazati Neumannovu formulu:

$$I_n(u+v)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}I_m(u)\,I_{n-m}(v).$$

3820. Dokazati nejednakost $|I_\nu(z)| < \left|\frac{z}{2}\right|^\nu \frac{e^{|Im(z)|}}{\Gamma(\nu+1)}$ $\quad(\nu > 0)$.

3821. Ako je $R_e\{\nu\} > -\frac{1}{2}$, dokazati da je

$$I_\nu(z) = \frac{z^\nu}{2^\nu \sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi \cos(z\cos\theta) \sin^{2\nu}\theta \, d\theta.$$

3822. Dokazati da je $\displaystyle\int_0^\infty t^n I_m(t)\, dt = \frac{2^n \Gamma\left(\frac{m+n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-n+1}{2}\right)}$.

3823. Ako su a i b dva različita rešenja jednačine $I_0(x) = 0$, pokazati da je

(1) $$\int_0^1 x I_0(ax) I_0(bx)\, dx = 0.$$

(2) $$\int_0^1 x I_0^2(ax)\, dx = \frac{1}{2} I_1^2(a).$$

Primeniti formule (1) i (2) za određivanje A_k u razvoju

$$x^2 = \sum_{k=1}^\infty A_k J_0(a_k x) \qquad (0 < x < 1)$$

gde su $a_k (a_1 < a_2 < a_3 < \cdots)$ pozitivne nule funkcije $I_0(x)$.

Dokazati da je:

3824. $\int x^n I_{n-1}(x)\, dx = x^n I_n(x) + \text{const.}$

3825. $\int x^{-n} I_{n+1}(x)\, dx = x^{-n} I_n(x) + \text{const.}$

§ 11. Asimptotski redovi

1° Red $\sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{z^{n+\sigma}}$ je *asimptotski* za funkciju $f(z)$ ako je za svaki fiksirani broj M $(M = 0, 1, 2, \ldots)$

$$\lim_{z\to\infty} z^{M+\sigma}\left[f(z) - \sum_{n=0}^{M} \frac{a_n}{z^{n+\sigma}}\right] = 0 \qquad (\sigma \in C).$$

U tom slučaju se piše

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{z^{n+\sigma}}.$$

2° Asimptotski redovi nekih funkcija: 1) Gama-funkcija:

$$\Gamma(z+1) \sim \sqrt{2\pi z}\, z^z e^{-z}\left(1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} - \frac{139}{51{,}84z^3} + \cdots\right).$$

2) Besselova funkcija:

$$I_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[P(z)\cos\left(z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right) + Q(z)\sin\left(z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right)\right] \text{ gde je}$$

$$P(z) = 1 + \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k (4n^2-1)(4n^2-3^2)\cdots[4n^2-(4k-1)^2]}{(2k)!\, 2^{6k} z^{2k}},$$

$$Q(z) = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k (4n^2-1)(4n^2-3^2)\ldots[4n^2-(4k-3)^2]}{(2k-1)!\, 2^{6k-3} z^{2k-1}},$$

$(-\pi < \arg z < \pi \ \wedge \ |z| \to \infty)$.

3) Funkcija greške: $\displaystyle erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \sim 1 + \frac{z e^{-z^2}}{\pi} \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \frac{\Gamma\left(k - \frac{1}{2}\right)}{z^{2k}}$,

$\left(-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2} \ \wedge \ |z| \to \infty\right)$.

Ako se z zameni sa $-z$ onda formula važi i za $\frac{\pi}{2} < \arg < z < \frac{3\pi}{2}$.

4) Eksponencijalni integral:

$$E_i(z) = \int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \sim e^{-z} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k k!}{z^{k+1}}, \quad (-\pi < \arg z < \pi \wedge |z| \to \infty).$$

Dokazati da je

3826. $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} \quad (n \to \infty)$

3827. $\displaystyle\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \quad (n \to \infty)$.

3828. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-zt^2}}{1+t^2} dt \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(1 + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2z)^n}\right)$.

3829. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-zt}}{1+t} dt \sim \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{z^n}$.

3830. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-zt} F(t)\, dt \sim \sum_{n=0}^\infty \frac{F_{(0)}^{(n)}}{z^{n+1}}$.

3831. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t+x} dt \sim \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

3832. $e^{x^2}\int\limits_x^\infty e^{-t^2}\,dt \sim \frac{1}{2x}+\sum\limits_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}x^{2n+1}}.$

3833. $\int\limits_x^\infty \frac{\cos(t-x)}{t}\,dt \sim \sum\limits_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!}{x^{2n}}.$

3834. $\int\limits_x^\infty \frac{\sin(t-x)}{t}\,dt \sim \sum\limits_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{x^{2n-1}}.$

3835. $\int\limits_{k\pi}^\infty \frac{\sin t}{t} \sim (-1)^k \sum\limits_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{(k\pi)^{2n-1}}.$

3836. Mogu li različite funkcije imati jednake asimptotske redove?

3837. Ako je $f(z)\sim\sum\limits_{n=0}^\infty \frac{a_n}{z^n}$ i $g(z)\sim\sum\limits_{n=0}^\infty \frac{b_n}{z^n}$, dokazati da je:

1° $f(z)+g(z)\sim\sum\limits_{n=0}^\infty \frac{a_n+b_n}{z^n}$; 2° $f(z)\,g(z)\sim\sum\limits_{n=0}^\infty \frac{c_n}{z^n}$,

gde je

$$c_n=\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

3838. Dokazati da iz $f(z)\sim\sum\limits_{n=2}^\infty \frac{a_n}{z^n}$ sledi $\int\limits_z^\infty f(z)\,dz\sim\sum\limits_{n=2}^\infty \frac{a_n}{(n-1)z^{n-1}}.$

Glava XI

OPERACIONI RAČUN

§ 1. Određivanje slike i originala

1° Osnovni pojmovi i definicije. Proizvoljna kompleksna funkcija $f(t)$ realnog argumenta t naziva se *original funkcije* $F(p)$ ako zadovoljava sledeće uslove.

1) Funkcija $f(t)$ i svi njeni izvodi dovoljno velikog reda neprekidni su na celoj osi t, osim izolovanih tačaka, u kojima $f(t)$ i njeni izvodi mogu imati prekide prvog reda, pri čemu na svakom konačnom intervalu t ose takvih tačaka može biti samo konačno mnogo.

2) Za svako $t<0$

$$f(t)=0.$$

3) Funkcija $f(t)$ raste najviše brzinom eksponencijalne funkcije, tj. postoje takve konstante $M>0$ i $s_0>0$ da je za svako t

$$|f(t)|<Me^{s_0 t}$$

Broj s_0 naziva se *pokazatelj rašćenja funkcije* $f(t)$.

Prostija funkcija-original je takozvana *jedinična* funkcija

$$\eta(t)=\begin{cases}1, & t>0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

Očigledno je $\varphi(t)\eta(t)=\begin{cases}\varphi(t), & t>0,\\ 0, & t<0;\end{cases}$ ako $\varphi(t)$ zadovoljava uslove 1 i 3 onda $\varphi(t)\eta(t)$ takođe zadovoljava sve uslove funkcije originala.

Po dogovoru se smatra da je $\varphi(t)\equiv 0$ za $t<0$, pa se umesto $\varphi(t)\eta(t)$ piše $\varphi(t)$.

Funkcija kompleksne promenljive $p=s+i\omega$ definisana relacijom

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt, \tag{1}$$

naziva se, prema Laplaceu, *slika funkcije* $f(t)$. Simbolički jednakost (1) se piše

$$F(p)\risingdotseq f(t).$$

Obrnuto, ako je funkcija $f(t)$ original, tj. zadovoljava uslove 1), 2) i 3), a $F(p)$ njena slika, onda je funkcija $f(t)$ u proizvoljnoj tački u kojoj je neprekidna, definisana jednakošću

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp, \tag{2}$$

pri čemu se integral uzima duž proizvoljne prave $R_e p=a>s_0$, a tretira kao granična vrednost integrala duž odsečka $(a-ib,\ a+ib)$ kada $b\to\infty$.

2° Osobine Laplaceove transformacije. 1) Za proizvoljne kompleksne konstante α i β važi *svojstvo linearnosti*

$$\alpha f(t)+\beta g(t)\doteqdot\alpha F(p)+\beta G(p),\qquad (F(p)\doteqdot f(t),\ G(p)\doteqdot g(t)). \tag{3}$$

2) Za proizvoljno konstantno $\alpha>0$ važi *teorema sličnosti*:

$$f(\alpha t)\doteqdot F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \tag{4}$$

3) Ako je $f'(t)$ ili $f^{(n)}(t)$ original, onda

$$f'(t)\doteqdot pF(p)-f(0), \tag{5}$$

ili

$$f^{(n)}(t)\doteqdot p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}_{(0)}, \tag{6}$$

pri čemu se pod $f^{(k)}(0)$ podrazumeva

$$\lim_{t\to+0} f^{(k)}(t).$$

4) *Diferenciranje slike* :

$$F^{(n)}(p)\doteqdot(-1)^n t^n f(t). \tag{7}$$

5) *Integracija originala* svodi se na deljenje slike sa p:

$$\int_0^t f(t)\,dt\doteqdot\frac{F(p)}{p}. \tag{8}$$

6) Ako integral $\int_p^\infty F(p)\,dp$ konvergira, onda je on slika funkcije $f(t)/t$:

$$\frac{f(t)}{t}\doteqdot\int_p^\infty F(p)\,dp, \tag{9}$$

(*integracija slike*).

7) Za proizvoljno pozitivno τ važi *teorema kašnjenja*:

$$f(t-\tau)\doteqdot e^{-p\tau}F(p). \tag{10}$$

8) Za proizvoljno kompleksno p_0 važi *teorema pomeranja*:

$$e^{p_0t}f(t)\doteqdot F(p-p_0). \tag{11}$$

Teorema množenja (Borelova teorema) tvrdi da je proizvod dve slike $F(p)$ i $G(p)$ takođe slika, pri čemu je

$$F(p)\,G(p)\doteqdot\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau. \tag{12}$$

Integral na desnoj strani relacije (12) naziva se *konvolucija* funkcija $f(t)$ i $g(t)$ i obeležava simbolom

$$(f*g)$$

3° Nalaženje originala funkcije $f(t)$. Za nalaženje originala $f(t)$ kada je poznata slika $F(p)$ koriste se sledeći postupci:

1) Ako je $F(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$ razlomljena racionalna funkcija pri čemu je stepen polinoma $A(p)$ manji od stepena polinoma $B(p)$, onda se taj razlomak razlaže na zbir prostih razlomaka i nalazi original za svaki prosti razlomak, koristeći svojstva (1)—(9) Laplaceove transformacije.

2) Koristi se druga teorema razlaganja koja tvrdi da pri određenim uslovima za $F(p)$ kao original za $F(p)$ služi funkcija

$$f(t)=\sum_{p_k}\operatorname{res}[F(p)\,e^{pt}], \tag{13}$$

pri čemu se zbir ostataka uzima za sve tačke p_k funkcije $F(p)$ u poretku neopadanja njihovih modula.

Specijalno, ako je $F(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$ pravilan razlomak, onda kao njen original služi funkcija

$$f(t)=\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{(n_k-1)}\lim_{p\to p_k}\frac{d\,n_k-1}{d\,p^{n_k-1}}\{F(p)(p-p_k)^{n_k}e^{pt}\}, \tag{14}$$

gde su p_k polovi funkcije $F(p)$ reda n_k, a zbir se uzima po svim polovima. Ako su svi polovi $F(p)$ prosti onda se formula (15) uprošćava i dobija oblik

$$f(t)=\sum_{k=1}^{l}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}\,e^{p_kt}. \tag{15}$$

3) *Neka je* $f(t)\doteqdot F(p)$ *i neka su* $\Phi(p)$ *i* $q(p)$ *analitičke funkcije, takve da je*

$$\Phi(p)\,e^{-\tau q(p)}\doteqdot\varphi(t,\tau). \tag{16}$$

Tada je

$$F[q(p)]\,\Phi(p)\doteqdot\int_0^\infty f(t)\,\varphi(t,\tau)\,d\tau), \tag{17}$$

(*Efrosova teorema*).

Specijalno, ako je $\Phi(p)=\dfrac{1}{\sqrt{p}}$, $q(p)=\sqrt{p}$ onda je $\varphi(t,\tau)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{\tau^2}{4t}}$.

Prema tome ako je poznato da je $F(p)\doteqdot f(t)$ onda je prema Efrosovoj teoremi

$$\frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}\doteqdot\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty f(\tau)\,e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau. \tag{18}$$

Naći sliku sledećih funkcija:

3839. $f(t)=t.$ **3840.** $f(t)=t^n,\ n\in N.$

3841. $f(t)=e^{at}$, gde je a proizvoljan kompleksan broj.

3842. $f(t)=\sin\alpha t$. **3843.** $\cos\alpha t$. **3844.** $\operatorname{sh}\alpha t$.

3845. $\operatorname{ch}\alpha t$. **3846.** $e^{at}-1$. **3847.** $\sin(t-a)$, $(a>0)$.

3848. $\cos(t-a)$, $(a>0)$. **3849.** $e^{\lambda t}\sin\alpha t$.

3850. $\operatorname{ch}t\cdot\cos t$. **3851.** $\operatorname{sh}t\cdot\cos t$. **3852.** $t^n e^{\lambda t}$.

3853. $\int\limits_0^t \sin t\,dt$. **3854.** $\int\limits_0^t \cos\alpha t\,dt$.

3855. $(t-1)^2 e^{t-1}$. **3856.** $\cos^3 t$. **3857.** $\int\limits_0^t \frac{\sin t}{t}\,dt$.

3858. $t\operatorname{ch}2t$. **3859.** $t\sin t$. **3860.** $t\cos t$.

3861. $\sin^2 t$. **3862.** $\frac{e^t-1}{t}$. **3863.** $\sin 3(t-2)$.

3864. $\cos mt\cdot\cos nt$. **3865.** $\sin mt\cdot\cos nt$.

3866. $\sin^4 t$. **3867.** $\frac{1-\cos t}{t}$. **3868.** t^a, $(a>-1)$.

3869. $f(t)=I_0(t)$.

3870. Pokazati da je $I_n(t)\doteqdot\frac{(\sqrt{p+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$.

3871. Pokazati da je

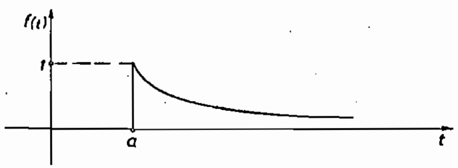
$$t^{\frac{n}{2}}\, I_n(2\sqrt{t})\doteqdot\frac{1}{p^{n+1}}e^{-\frac{1}{p}}\ (n=0,1,2,\dots).$$

3872. Pokazati da je $erf(\sqrt{t})\doteqdot\frac{1}{p\sqrt{p^2+1}}$, gde je $erf(x)\equiv\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt$.

3873. Pokazati da je $Erf(\sqrt{t})\doteqdot\frac{1}{\sqrt{p+1}+p+1}$, gde je $Erft\equiv 1-erft$.

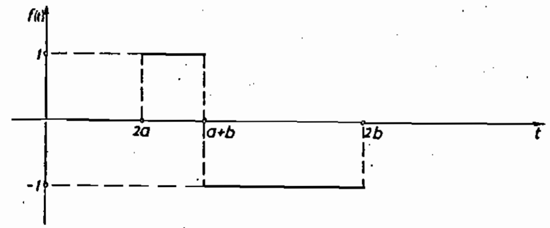
Naći sliku sledećih funkcija zadatih grafički:

3874. $f(t)=\begin{cases}0 & \text{za } a<t<a,\\ e^{-b(t-a)} & \text{za } t>a.\end{cases}$



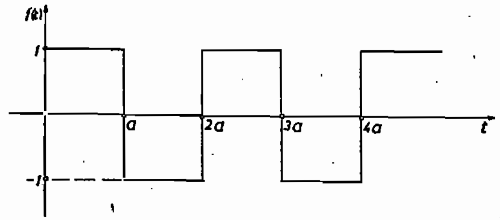
Sl. 29

3875.



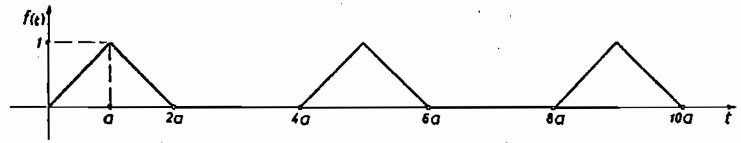
Sl. 30

3876.



Sl. 31

3877.



Sl. 32

Naći sliku funkcija:

3878. $f(t)=\arccos(\cos t)$. **3879.** $f(t)=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}t)$.

Naći konvoluciju funkcija:

3880. $f(t)=\sin t$; $\varphi(t)=e^t$. **3881.** $f(t)=e^{-at}$; $\varphi(t)=e^{-bt}$.

U sledećim primerima naći original kada je poznata slika:

3882. $F(p)=\frac{1}{(p^2+1)(p-1)}$. **3883.** $F(p)=\frac{1}{(p+a)(p+b)}$.

3884. $F(p)=\dfrac{1}{p^2+4p+5}$. **3885.** $F(p)=\dfrac{1}{p^2+4p+3}$.

3886. $F(p)=\dfrac{1}{(p^2+1)^2}$. **3887.** $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p+1)^3}$.

3888. $F(p)=\dfrac{1}{p(p^2+1)}$. **3889.** $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}$.

3890. $\dfrac{p^2+3p+4}{p(p-1)(p-2)}$. **3891.** $\dfrac{p^2+14}{(p^2+4)(p^2+9)}$.

3892. $\dfrac{p^2+2}{p^4+p^2+1}$. **3893.** $\dfrac{1}{(p+1)(p+2)^2}$.

3894. $\dfrac{p^2}{(p^2+4)(p^2+9)}$. **3895.** $\dfrac{3p^2}{(p^3-1)^2}$.

3896. $\dfrac{1}{\sqrt{p}}e^{\frac{1}{p}}$. **3897.** $\dfrac{e^{-3p}}{(p+1)^2}$. **3898.** $\dfrac{e^{-p}}{p(p-1)}$.

3899. $\dfrac{e^{-p}}{p^2-1}+\dfrac{pe^{-2p}}{p^2-4}$. **3900.** $\dfrac{e^{-p}}{p^2}+2\dfrac{e^{-2p}}{p^3}+6\dfrac{e^{-3p}}{p^4}$.

3901. $\dfrac{1}{\sqrt{p}}\cos\dfrac{1}{p}$. **3902.** $\dfrac{1}{\sqrt{p}}\sin\dfrac{1}{p}$. **3903.** $\dfrac{\operatorname{ch}^2\sqrt{ap}}{\sqrt{\pi p}}$.

Koristeći Efrosovu teoremu naći original sledećih funkcija (a je realan broj):

3904. $F(p)=\dfrac{e^{-\frac{\sqrt{px}}{a}}}{p}$. **3905.** $F(p)=\dfrac{e^{-a\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}}$. **3906.** $F(p)=\dfrac{e^{-a\sqrt{p}}}{p^2}$.

3907. $F(p)=\dfrac{e^{-\frac{\sqrt{px}}{a}}}{\sqrt{p}\left(\dfrac{\sqrt{p}}{a}+h\right)}$. **3908.** $F(p)=\dfrac{e^{-a\sqrt{p}}}{p(\sqrt{p}+a)}$.

Koristeći Efrosovu teoremu izračunati sledeće integrale:

3909. $J(t)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int_0^\infty \operatorname{ch}\tau\, e^{-\frac{\tau^2}{4\pi}}\,d\tau$.

3910. $J(t)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int_0^\infty \cos\tau\cdot e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau$.

3911. $J(t)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int_0^\infty \tau\operatorname{sh}\tau\, e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau$.

3912. $J(t)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int_0^\infty \tau\sin\tau\, e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau$.

§ 2. Primena operacionog računa na rešavanje diferencijalnih jednačina

1° Navodimo dva postupka za rešavanje linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima.

1) Neka je data na primer diferencijalna jednačina drugog reda

(1) $$a_0y''+a_1y'+a_2y=f(x),$$

gde su a_i ($i=0, 1, 2$) konstante, $a_0\neq 0$. Traži se rešenje te jednačine koje zadovoljava početne uslove

(2) $$y(0)=y_0,\quad y'(0)=y_1.$$

Neka je, dalje, $y(x)\doteqdot y(p)$, $f(x)\doteqdot F(p)$. Primenjujući na obe strane jednačine (1) Laplaceovu transformaciju, koristeći teoremu o diferenciranju i osobinu linearnosti Laplaceove transformacije, umesto diferencijalne jednačine (1) sa početnim uslovima (2) dobija se *operaciona jednačina*

(3) $$(a_0p^2+a_1p+a_2)\,y(p)-(a_0py_0+a_0y_1+a_1y_0)=F(p).$$

Iz (3) sledi

(4) $$y(p)=\frac{F(p)+a_0py_0+a_0y_1+a_1y_0}{a_0p^2+a_1p+a_2}.$$

Rešenje (4) naziva se *operaciono rešenje*. Nalaženjem originala $y(x)$ za $y(p)$ dobija se funkcija $y(x)$ koja predstavlja rešenje postavljenog Cauchyevog problema.

Navedeni postupak potpuno analogno se prenosi na slučaj linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima n-og reda.

2) Ako je funkcija $f(t)$ neprekidna na intervalu $[0, \infty)$, funkcija $\varphi(t)$ neprekidna i diferencijabilna na $[0, \infty)$, $F(p)\doteqdot f(t)$ i $\Phi(p)\doteqdot\varphi(t)$, onda je

$$F(p)\,\Phi(p)\doteqdot\int_0^t f(\tau)\,\varphi(t-\tau)\,d\tau,\ \Rightarrow$$

(5) $$p\,F(p)\,\Phi(p)\doteqdot f(t)\,\varphi(0)+\int_0^t f(\tau)\,\varphi'(t-\tau)\,d\tau.$$

Formula (5) naziva se *Duhamelova formula*. Primena formule (5) na rešavanje diferencijalnih jednačina sastoji se u sledećem. Neka je data linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima n-og reda

(6) $$L[x]=f(t).$$

i početni uslovi

(7) $$x(0)=x'(0)=\cdots=x^{(n-1)}(0)=0.$$

Ukoliko su početni uslovi različiti od (7), onda se neznatnom izmenom funkcije $f(t)$ oni mogu svesti na iste te uslove. Dopustimo da je poznato rešenje jednačine

(8) $$L[x]=1,$$

kod koje su leva i desna strana jednačine jednake jedinici pod uslovom (7). Prelazeći na operacione jednačine biće

(9) $$A(p)\,X(p)=F(p)$$

za (6) i

(10) $$A(p)\,X_1(p)=\frac{1}{p},$$

za (7), pri čemu je $A(p)$ poznat polinom po p. Iz (9)$\Rightarrow X(p)=\dfrac{F(p)}{A(p)}$ a iz (10) $A(p)=\dfrac{1}{p\,X_1(p)}$. Otuda, saglasno formuli (5), biće

(11) $$pX_1(p)\,F(p)\doteq f(t)\,x_1(0)+\int_0^t f(\tau)\,x_1'(t-\tau)\,d\tau.$$

Uzimajući u obzir da je $x_1(0)=0$ dobija se

$$X(p)=pX_1(p)F(p)\doteq\int_0^t f(\tau)\,x_1'(t-\tau)\,d\tau,$$

tj.

$$x(t)=\int_0^x f(\tau)\,x_1'(t-\tau)\,d\tau,$$

pri čemu je $x(t)$ rešenje jednačine (6) za uslove (7).

2° Rešavanje sistema linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima izvodi se na isti način kao i rešavanje jedne diferencijalne jednačine.

Neka je, na primer, potrebno rešiti sistem diferencijalnih jednačina 2-og reda

(12) $$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}\frac{d^2y_k}{dx^2}+b_{ik}\frac{dy_k}{dx}+c_{ik}\,y_k=f_i(x)\right),$$

gde su a_{ik}, b_{ik} i c_{ik} konstante, pri početnim uslovima

$$y_k(0)=\alpha_k,\ y'$$

Obeležavajući sa $y_k(p)$ i $F_i(p)$ slike od $y_k(x)$ i $f_i(x)$ sistema (13) pod uslovom (12) prelazimo na operacioni sistem

(14) $$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}p^2+b_{ik}p+c_{ik})\,y_k(p)=F_i(p)+\sum_{k=1}^{n}[(a_{ik}p+b_{ik})\,\alpha_k+a_{ik}\,\beta_k]$$

$$(i=1\ 2,\ldots,n).$$

Rešavajući sistem (14) kao linearni algebarski sistem jednačine po $y_k(p)$, nalazimo $y_k(p)$, a zatim njihove originale $y_k(x)$ $(k=1,2,\ldots,n)$. Ti originali i predstavljaju rešenja Cauchyevog problema (13) za sistem (12).

Ostali problemi vezani za rešavanje diferencijalnih jednačina, primenom operacione metode, demonstrirani su na primerima.

Primenom operacionog računa rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

3913. $y''+y=2\cos x;\quad y(0)=0,\ y'(0)=-1.$

3914. $y''+4y=2\cos 2x;\quad y(0)=0,\ y'(0)=4.$

3915. $y''+a^2y=f''(x);\quad y(0)=f(0),\ y'(0)=f'(0).$

3916. $y''+y=x^3+6x;\quad y(0)=y'(0)=0.$

3917. $y''+y=\cos x+\sin 2x;\quad y(0)=y'(0)=0.$

3918. $y'''+y''=\sin x;\quad y(0)=y'(0)=1,\ y''(0)=0.$

3919. $y'''+y''=x;\quad y(0)=-3,\ y'(0)=1,\ y''(0)=0.$

3920. $y'''+y'=10\,e^{2x};\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=0.$

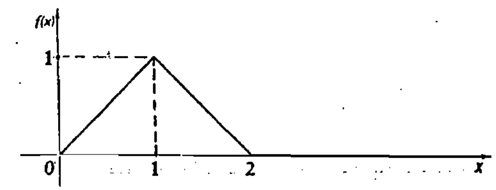
3921. $y'''+y=\dfrac{1}{2}x^2e^x;\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=0.$

3922. $y^{\mathrm{IV}}-y''=1;\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=y'''(0)=0.$

3923. $y^{\mathrm{IV}}+2y''+y=x\ln x;\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=y'''(0)=0.$

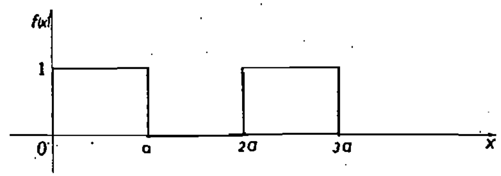
3924. $y^{\mathrm{IV}}+y'''=\cos x;\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=0,\ y'''(0)=\alpha.$

3925. $y''+4y=f(x);\quad y(0)=y'(0)=0.$



Sl. 33

3926. $y''-2y'+y=f(x);\quad y(0)=y'(0)=0.$



Sl. 34

3927. Naći rečenje jednačine

$$y'' + 4y = f(x),$$

gde je

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0<x<a), \; y(0) = A; \\ 5e^{-(x-a)} & (x>0), \; y'(0) = B. \end{cases}$$

Primenom Duhamelove formule rešiti sledeće jednačine:

3928. $x'' + x = e^{at}$ $x(0) = x'(0) = 0$.

3929. $x'' - 2x' = t^2 e^t$; $x(0) = x'(0) = 0$.

3930. $x'' + 2x' + 2x = \sin x$; $x(0) = x'(0) = 0$.

3931. $x'' = \operatorname{arc\,tg} t$; $x(0) = x'(0) = 0$.

3932. $x'' + x = \dfrac{1}{2+\cos t}$; $x(0) = x'(0) = 0$.

3933. $x'' - x' = \dfrac{1}{1+e^t}$ $x(0) = x'(0) = 0$.

3934. $x'' + x' = \dfrac{1}{4+\operatorname{tg}^2 t}$; $x(0) = x'(0) = 0$.

3935. $x'' + x' = \dfrac{1}{1+\cos^2 t}$; $x(0) = x'(0) = 0$.

3936. $x'' - x = \operatorname{sh} t$; $x(0) = x'(0) = 0$.

3937. $x'' - 2x' + x = \operatorname{ch} t$; $x(0) = x'(0) = 0$.

Naći opšte rešenje sledećih jednačina:

3938. $y''' - 3y' + 2y = (4x^2 + 4x - 10)e^{-x}$.

3939. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 12x^2 e^{3x} - e^{2x}$.

3940. $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 1 + x + x^2$.

3941. $y^{IV} + y''' = \cos x$.

Naći opšte rešenje sledećih jednačina sa linearnim koeficijentima:

3942. 1° $xy'' - y' = 0$. 2° $xy'' - (1+x)y' + y = 0$.

3943. $xy'' - (1+x)y' + 2(1-x)y = 0$.

3944. $xy'' - 2(ax+b)y' + (a^2x + 2ab)y = 0$.

3945. $xy'' - y' = x I_2(2\sqrt{x})$.

3946. $xy'' - (x+5)y' + 3y = 0$.

3947. $(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$.

3948. $xy'' - 2y' + ay = 0$; $y(0) = 0$.

3949. $xy'' - 2y' + ay = x^3$; $y(0) = 0$.

3950. $xy'' - 2y' + ay = I_0(2\sqrt{ax})$; $y(0) = 0$.

3951. $xy'' - y' + ay = 0$.

Odrediti partikularne integrale sledećih jednačina:

3952. $xy'' + 2y' - xy = 0$. **3953.** $xy'' + (2x+2)y' + (x+2)y = 0$.

3954. $xy'' + y' = x^n$. **3955.** $xy'' + y' + y = I_0(2\sqrt{x})$.

3956. $xy'' + (4x+3)y' + (3x+3)y = 0$.

3957. $xy'' + (x+3)y' + 3y = 0$. **3958.** $axy'' + (bx+3a)y' + 3by = 0$.

Naći periodično rešenje sledećih jednačina, smatrajući da je funkcija $f(x)$ periodična sa periodom 2ω:

3959. $y'' + a^2 y = f(x)$. **3960.** $y''' + y' = f(x)$.

3961. $y' - y = \arcsin(\sin x)$.

3962. $y'' + 4y = f(x)$, gde je $2\omega = 4$, $f(x) = \begin{cases} x & (0<x<1), \\ 2-x & (1<x<2), \\ 0 & (2<x<4). \end{cases}$

Rešiti sledeće sisteme jednačina:

3963. $\ddot{x} = 3(y - x + z)$, $\ddot{y} = x - y$, $\ddot{z} = -z$; $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = -1$, $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 0$.

3964. $y' = 3z - y$, $z' = y + z + e^x$; $y(0) = 0$, $z(0) = 0$.

3965. $y' - 2y - 4z = \cos x$, $z' + y + 2z = \sin x$; $y(0) = 0$, $z(0) = 0$.

3966. $y' + 7y - z = 0$, $z' + 2y + 5z = 0$; $y(0) = 1$, $z(0) = 1$.

3967. $y' + z' - z = e^x$, $2y' + z' + 2z = \cos x$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$.

3968. $y' - y + z = \dfrac{3}{2}x^2$, $z' + 4y + 2z = 4x + 1$; $y(0) = 0$, $z(0) = 0$.

3969. $y' = -y + z + t$, $z' = y - z + t$, $t' = y + z + t$; $y(0) = 1$, $z(0) = 0$, $t(0) = 0$.

3970. $y' = z - t$, $z' = t - 2y$, $t' = 2y - z$; $y(0) = 1$, $z(0) = 0$, $t(0) = 0$.

3971. $y''+2z=0,\ z''-2y=0;\quad y(0)=0,\ y'(0)=1,\ z(0)=0,\ z'(0)=0.$

3972. $\ddot{x}-x+y+z=0,\ \ddot{y}+x-y+z=0,\ \ddot{z}+x+y-z=0;$

$x(0)=1,\ \dot{x}(0)=y(0)=\dot{y}(0)=z(0)=\dot{z}(0)=0.$

3973. $\dot{x}+y=\begin{cases}1 & \text{za } 0<t<1,\\ 0 & \text{za } t>0,\end{cases}\quad \dot{y}+x=\begin{cases}1 & \text{za } 0<t<2,\\ 0 & \text{za } t>2,\end{cases}\quad x(0)=y(0)=0.$

Naći periodično rešenje sledećih sistema jednačina, smatrajući da su funkcije $f(x)$ i $F(x)$ periodične, sa periodom 2ω:

3974. $y'=az+f(x),\ z'=by.$ **3975.** $y'=8z+f(x),\ z'=-2y+F(x).$

3976. $y'=y-2z,\ z'=5y-z+f(x).$

Rešiti sledeće jednačine matematičke fizike:

3977. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),\quad (a=\text{const});\quad u(x,0)=\varphi(x),\ u(0,t)=\psi_1(t),$

$u(l,t)=\psi_2(t);\quad (0<x<l;\ t>0).$

3978. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0,\ u(x,0)=A\sin\dfrac{\pi x}{l},\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0,\quad u(0,t)=u(l,t)=0.$

3979. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ (x>0,\ t>0);\quad u(0,t)=u_0,\ u(x,0)=0.$

3980. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ (x>0,\ t>0);\quad u(0,t)=0,\ u(x,0)=u_1.$

3981. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ (x>0,\ t>0);\quad u(0,t)=a\cos\omega t,\ u(x,0)=0.$

3982. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ (x>0,\ t>0);\quad u(0,t)=a\sin\omega t,\ u(x,0)=0,$

3983. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+bx(x-l);\quad u\Big|_{t=0}=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0;\quad u(0,t)=u(l,t)=0.$

3984. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial u}{\partial y}+a^2u=f(x);\quad 0<x<\infty,\ 0<y<\infty,\ u(0,y)=0,\ \dfrac{\partial u(0,y)}{\partial x}=0.$

3985. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+ay=f(x,y),$

$0<x<\infty,\ 0<y<\infty,\ a>0,\ u(x,0)=\varphi(x),\ u(0,y)=\psi(y).$

§ 3. Primena operacionog postupka na rešavanje diferencijalnih jednačina sa argumentom odstupanja i diferencnih jednačina

1° Diferencijalne jednačine u kojima nepoznata funkcija figuriše sa različitim vrednostima argumenta, kao na primer:

(1) $y'(x)=f(x,y(x),y(x-\tau(x))),$

(2) $y'(x)=f(x,y(x),y(x-\tau(x)),y'(x-\tau(x))),$

(3) $y''(x)=f(x,y(x),y'(x),y(x-\tau(x)),y'(x-\tau(x))),$

(4) $y''(x)=f(x,y(x),y(x-\tau_1(x)),\ldots,y(x-\tau_n(x)),$

$y'(x,y'(x-\tau_1(x)),\ldots,y'(x-\tau_n(x))),$

nazivaju se *diferencijalne jednačine sa argumentom odstupanja.*

Ako su sva odstupanja argumenata $\tau_s(x)$ konstantna, onda se diferencijalne jednačine sa argumentom odstupanja nazivaju diferencijalno-diferencne. Ako najveći izvod ulazi u diferencijalno-diferencnu jednačinu samo sa jednom vrednošću argumenta, koji nije manji od svih drugih argumenata funkcije i izvoda, koji ulazi u jednačinu, onda se jednačina naziva diferencijalna jednačina sa argumentom kašnjenja (na primer jednačine (1), (2) i (4)).

2° 1) Neka je data diferencijalna jednačina sa argumentom kašnjenja i konstantnim koeficijentima

(5) $$y^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}a_k y^{(k)}(x-\tau_k)+f(x),$$

gde su $a_k=\text{const}$, $\tau_k=\text{const}>0$, $0<x<\infty$, sa početnim uslovima

(6) $$y(0)=y'(0)=\cdots=y^{(n-1)}(0).$$

Pri tome se stavlja

$$y(x)=y'(x)=\cdots=y^{(n-1)}(x)\equiv 0 \text{ za } x<0.$$

Primenjujući na obe strane jednačine (4) Laplaceovu transformaciju i koristeći pri tome teoremu kašnjenja dobija se operaciona jednačina

(7) $$p^n Y(p)=\sum_{k=0}^{n-1}a_k p_k Y(p)e^{-\tau_k p}+F(p),\ \text{gde je}$$

$$Y(p)\doteqdot y(x) \text{ a } F(p)\doteqdot f(x).$$

Iz (6) sledi

(8) $$Y(p)=\frac{F(p)}{p^n-\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_k p^k e^{-\tau_k p}}.$$

Nalaženjem originala $y(x)$ za $Y(p)$ određeno formulom (8), dobija se rešenje jednačine (5), koje zadovoljava početne uslove (6).

U diferencijalnim jednačinama sa argumentom kašnjenja vrlo često se javlja i sledeći problem:

Naći rešenje jednačine $y(x)$ za $x>x_0$ pri čemu se za svako $x<x_0$, za koje vrednosti $y(x)$ utiču na kasnije vrednosti rešenja za $x>x_0$, funkcija $y(x)$ zadaje. Tako, na primer, postavlja se problem naći neprekidno rešenje za $x>x_0$ jednačine

$$y'(x)=f(x,y(x),y(x-\tau)),\ (\tau>0 \text{ — konstanta})$$

ako je $y(x)=\varphi(x)$ za $x_0-\tau<x<x_0$.

U ovom slučaju zadata neprekidna funkcija $\varphi(x)$ naziva se *početna funkcija*. Odsečak na kome je zadata funkcija $\varphi(x)$ naziva se *početni skup*.
Rešenje linearne jednačine (5) sa konstantnim koeficijentima i konstantnim kašnjenjem, u slučaju kada početna funkcija nije identički jednaka nuli, takođe se može naći koristeći Laplaceovu transformaciju.

3° Diferencne jednačine. Jednačina oblika

(9) $$\Phi[n, f(n), f(n+1), \ldots, f(n+k)]=0$$

ili

(10) $$\tilde{\Phi}[n, f(n), \Delta f(n), \ldots, \Delta^k f(n)]=0,$$

gde je $f(n)$ tražena rešetkasta funkcija, naziva se *diferencna jednačina* (ili *jednačina sa konačnim razlikama*).
Posmatramo samo linearne diferencne jednačine k-og reda sa konstantnim koeficijentima.

(11) $$f(n+k)+a_1 f(n+k-1)+\cdots+a_k f(n)=\varphi(n).$$

Ovde je $\varphi(n)$ data rešetkasta funkcija (ako je $\varphi(n)\equiv 0$ onda se jednačina naziva *homogena*), a koeficijenat a_k različit od nule (ako je $a_k=0$, onda stavljajući $n+1=m$ dobija se jednačina nižeg reda).
Za rešavanje diferencnih jednačina koristi se *diskretna Laplaceova transformacija* ili kako se još naziva *D-transformacija*. Navodimo samo neke formule vezane za primenu D-transformacije na rešetkastu funkciju.
Ako je k prirodan broj, onda je

(12) $$f(n-k) \doteq e^{-qk} F^*(q),$$

(13) $$f(n+k) \doteq e^{qk}\left[F^*(q)-\sum_{r=0}^{k-1} f(r)\, e^{-qr}\right],$$

gde je

$$F(z)=a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\cdots+\frac{a_n}{z^n}+\cdots,\quad F^*(q)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, e^{-nq},\quad z=e^q$$

pri čemu je q nova nezavisno promenljiva (z je kompleksna promenljiva).
Pri tome se pod $f(n-k)$ podrazumeva rešetkasta funkcija sa argumentom $n-k$, koja je jednaka nuli za $n-k<0$.
Dalje, ako se koriste uobičajene oznake, važi formula

(14) $$\Delta^k f(n) \doteq (e^q-1)^k F^*(q)-e^q[(e^q-1)^{k-1} f(0)+ (e^q-1)^{k-2}\Delta f(0)+\cdots+(e^q-1)\Delta^{k-2} f(0)+\Delta^{k-1} f(0)].$$

Ako je $F(z)=\dfrac{C(z)}{B(z)}$, onda je u slučaju kada su koreni polinoma $B(z)$ prosti

(15) $$F(z)=\frac{C(z)}{B(z)}=\sum_{k=1}^{r}\frac{d_k}{z-z_k}.$$

Prelazeći na promenljivu q $(z=e^q)$ podrazumevajući da je $z_k=e^{\ln z_k}=e^{q_k}$, biće

(16) $$\frac{C^*(z)}{B^*(z)}=\sum_{k=1}^{r}\frac{d_k}{e^q-e^{q_k}},$$

pri čemu je $d_k=\dfrac{C^*(q)}{\dot{B}^*(q)}$, gde tačka u imeniocu označava diferenciranje po e^q.

Primenjujući na poznatu relaciju $e^{an} \doteq \dfrac{e^q}{e^q-e^a}$ formulu (11) uzimajući $k=1$ dobija se

(17) $$\frac{1}{e^q-e^a} \doteq \psi(n),\quad \text{gde je}\quad \psi(n)=\begin{cases}0 & \text{za } n=0\\ e^{a(n-1)} & \text{za } n\geq 1.\end{cases}$$

S obzirom da D-transformacija poseduje osobinu linearnosti, to se iz (14) i (15) dobija *formula razlaganja*

(18) $$\frac{C^*(q)}{B^*(q)} \doteq \sum_{k=1}^{r} d_k e^{q_k(n-1)}=\sum_{k=1}^{r} d_k z_k^{n-1},$$

čiju desnu stranu treba zameniti nulom za $n=0$. Analogna formula se dobija za slučaj kada su koreni z_k jednačine $B(z)=0$ višestruki.
U rezultatima su data rešenja diferencnih jednačina za sve realne vrednosti argumenta.

Rešiti sledeće diferencne jednačine:

3986. $y'(x)=y(x-1)+1;\ y(0)=0.$

3987. $y''(x)-y(x-1)=x;\ y(0)=y'(0)=0.$

3988. $y''(x)-2y'(x-1)=x;\ y(0)=y'(0)=0.$

3989. $y''(x)=2y'(x-1)-y(x-2)+1;\ y(0)=y'(0)=0.$

3990. $y''(x)+2y'(x-2)+y(x-4)=x;\quad y(0)=y'(0)=0.$

3991. $y'(x)=y(x-1)$, ako je početna funkcija $\varphi(x)=1$, za $-1<x<0$.

3992. $y'(x)=y(x-1)$, ako je početna funkcija $\varphi(x)=x$ za $-1<x<0$.

3993. $y'(x)=y(x-1)+x$, ako je početna funkcija $\varphi(x)=1$, za $-1<x<0$.

3994. $y'(x)+y\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$, ako je početna funkcija $\varphi(x)=\cos x$ za $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$.

3995. $y'(x)-y(x)+y(x-1)=1$, ako je početna funkcija
$$\varphi(x)=x^2-1 \text{ za } -1<x<0,\ y(0)=-1.$$

3996. $y'(x)+2y(x)-y(x-1)=f(x)$, ako je početna funkcija
$$\varphi(x)=0 \text{ za } -1<x<0,\ y(0)=0.$$

3997. $y''(x)+y(x)+y(x-\pi)=0$, ako je početna funkcija
$$\varphi(x)=\sin x \text{ za } 0<x<\pi,\ y(0)=0.$$

3998. $y''(x)+2y(x)-4y'(x-2)-2y(x-2)=0$, ako je početna funkcija
$$\varphi(x)=2x+4 \text{ za } -2<x<0,\ y(0)=4,\ y'(0)=0.$$

3999. $y''(x)+2y'(x)+y(x)+y'(x-1)+2y(x-1)=0$, ako je početna funkcija
$$\varphi(x)=e^{-2x} \text{ za } -2<x<0,\ y(0)=1,\ y'(0)=-2.$$

4000. $y'''(x)-2y''(x)-y'(x)+2y(x)+y'(x-1)+y(x-1)=0$, ako je početna funkcija $\varphi(x)=e^{-x}$ za $-1<x<0$, $y(0)=1$, $y'(0)=-1$, $y''(0)=1$.

Rešiti sledeće diferencne jednačine:

4001. $f(x+2)-5f(x+1)+6f(x)=0$, za početne uslove $f(0)=f_0$, $f(1)=f_1$.

4002. $\Delta^2 f(x)-2\Delta f(x)+f(x)=2$, za početne uslove $f(0)=0$, $\Delta f(0)=1$.

4003. $f(x+4)-16f(x)=30x+7$; $f(0)=1$, $f(1)=-5$.

4004. $\Delta^2 f(x)-6\Delta f(x)+9f(x)=0$; $f(0)=1$, $\Delta f(0)=-1$.

4005. $f(x+1)-3f(x)=a^x$, $f_0=1$.

4006. $f(x+1)-af(x)=a^x \sin qx$, $f_0=c$.

4007. $f(x+2)-2f(x+1)+f(x)=0$; $f_0=4$, $f_1=5$.

4008. $f(x+2)+3f(x+1)+2f(x)=0$; $f_0=1$, $f_1=0$.

4009. $f(x+2)-f(x+1)-f(x)=0$; $f_0=0$, $f_1=1$.

4010. $f(x+3)-f(x)=0$; $f_0=f_1=0$, $f_2=1$.

4011. $f(x+4)+2f(x+3)+3f(x+2)+2f(x+1)+f(x)=0$; $f_0=f_1=f_3=0$, $f_2=-1$.

4012. $f(x+4)+f(x)=0$; $f_0=f_1=f_2=0$, $f_3=1$.

4013. $f(x+2)-3f(x+1)-4f(x)=(-1)^x$; f_0 i f_1 su proizvoljni.

4014. $f(x+2)-3f(x+1)+2f(x)=2^x$; $f_0=f_1=0$.

4015. $f(x+3)-f(x+2)-f(x+1)+f(x)=x^2$; $f_0=f_1=f_2=0$.

Rešiti sledeće sisteme diferencnih jednačina:

4016. $\begin{cases} y(x+1)-3y(x)-z(x)=0, \\ z(x+1)+5y(x)+z(x)=0; \end{cases}$
$y_0=z_0=1$.

4017. $\begin{cases} y(x+1)-2y(x)-2z(x)=3^x, \\ z(x+1)-y(x)-3z(x)=2^x; \end{cases}$
$y_0=z_0=0$.

4018. $\begin{cases} y(x+1)=z(x)-u(x), \\ z(x+1)=u(x)-2y(x), \\ u(x+1)=2y(x)-z(x); \end{cases}$
$y_0=z_0=u_0=0$.

§ 4. Primena operacionog računa na rešavanje nekih tipova integralnih jednačina

Jednačina koja sadrži traženu funkciju pod znakom integrala naziva se *integralna jednačina*. Na primer, rešavanje Cauchyevog problema

$$y'=f(x,y),\ y(x_0)=y_0,$$

kao što je poznato, svodi se na rešavanje integralne jednačine

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx.$$

Ako tražena funkcija ulazi linearno u jednačinu, onda se sama integralna jednačina naziva *linearna*.

Jednačina oblika

$$(2)\qquad y(x)=f(x)+\int_a^b k(x,y)\,y(t)\,dt,$$

gde su a i b konstante naziva se *Fredholmova linearna integralna jednačina drugog reda*. Pretpostavlja se da su funkcije $k(x,y)$ i $f(t)$ poznate a da je $y(x)$ tražena funkcija. Funkcija $k(x,t)$ naziva se *jezgro* jednačine.

Jednačina

$$(2)\qquad y(x)=f(x)+\int_a^x k(x,t)\,y(t)\,dt$$

naziva se *Volterraova linearna integralna jednačina drugog reda*.

Ako je u jednačinama (1) i (2) $f(x)\equiv 0$, onda se te jednačine nazivaju *homogene*. Ako tražena funkcija $y(x)$ figuriše samo pod znakom integrala onda se dobijaju respektivno Fredholmova i Valterraova jednačina *prvog* reda.

$$\int_a^b k(x,t)\,y(t)\,dt=f(x) \quad \text{i} \quad \int_a^x k(x,t)\,y(t)\,dt=f(x).$$

2° **Veza između linearnih diferencijalnih jednačina i Volterraovih integralnih jednačina.** Radi uprošćavanja razmotrimo diferencijalnu jednačinu drugog reda

$$(3)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)\,y=\psi(x),$$

pri čemu se pretpostavlja da su u tački $x=0$ funkcije $a_1(x)$, $a_2(x)$ i $\psi(x)$ r egularne

Ako se izvrši smena $\frac{d^2y}{dx^2}=\varphi(x)$ dobija se

$$\frac{dy}{dx}=\int_0^x \varphi(t)\,dt+c_1,$$

$$y=\int_0^x dx\left\{\int_0^x \varphi(t)\,dt\right\}+c_1x+c_2$$

Zamenjujući izraze za y, $\frac{dy}{dx}$ i $\frac{d^2y}{dx^2}$ u jednačinu (3) biće

$$(4) \qquad \varphi(x)+a_1(x)\int_0^x \varphi(t)\,dt+a_2(x)\int_0^x dx\left\{\int_0^x \varphi(t)\,dt\right\}=$$

$$=\psi(x)-c_1 a_1(x)-(c_1 x+c_2)\,a_2(x).$$

Ako se stavi $\psi(x)-c_1 a_1(x)-(c_1 x+c_2)\,a_2(x)=f(x)$ i primeti da je

$$\int_0^x dx\left\{\int_0^x \varphi(t)\,dt\right\}=\int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt,$$

tada (4) ima oblik

$$(5) \qquad \varphi(x)+\int_0^x [a_1(x)+a_2(x)(x-t)]\,\varphi(t)\,dt=f(x).$$

Jednačina (5) je Volterraova integralna jednačina drugog reda. Ako je uz diferencijalnu jednačinu (3) postavljen i Cauchyev problem, onda konstante c_1 i c_2 koje figurišu na desnoj strani jednačine (4), imaju konkretnu brojnu vrednost, pa na taj način rešenje Volterraove jednačine (5) je ekvivalentno rešenju Cauchyevog problema za linearnu diferencijalnu jednačinu (3).

Jedinstvenost rešenja Volterraove jednačine sledi iz toga, što Cauchyev problem u tačkama, u kojima je jednačina regularna, ima jedno i samo jedno rešenje. U slučaju linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima navedeni postupak dovodi do Volterraove integralne jednačine drugog reda, čije je jezgro polinom po $x-t$.

Jednačina oblika

$$(6) \qquad \varphi(x)+\int_0^x K(x-t)\,\varphi(t)\,dt=f(x)$$

čije jezgro $K(x, t)$ zavisi samo od razlike argumenata, predstavlja važnu klasu Volterraovih jednačina. One se ponekada nazivaju jednačine tipa konvolucije.

3° 1) Neka je data Volterraova jednačina čije jezgro zavisi samo od razlike argumenata

$$(7) \qquad \varphi(x)+f(x)+\int_0^x K(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Pretpostavićemo da su $f(x)$ i $K(x)$ dovoljno glatke funkcije i imaju konačan red rašćenja za $x>0$. U tom slučaju i $\varphi(x)$ za $x>0$ ima konačan red rašćenja, pa znači, može biti nađena slika funkcija f, K i φ. Neka je $\Phi \fallingdotseq \varphi(x)$, $F(p) \fallingdotseq f(x)$, $L(p) \fallingdotseq K(x)$. Primenjujući na obe strane jednačine (7) Laplaceovu transformaciju i koristeći formulu konvolucije biće

$$(8) \qquad \Phi(p)=F(p)+L(p)\,\Phi(p),$$

odakle je

$$(9) \qquad \Phi(p)=\frac{F(p)}{1-L(p)}.$$

Nalazeći original $\varphi(x)$ za $\Phi(p)$ dobija se rešenje integralne jednačine (7).

2) Analogno se rešavaju Volterraove integralne jednačine prvog reda sa jezgrom $K(x, t)$, koje zavisi samo od razlike $x-t$, tj. jednačine oblika

$$(10) \qquad \int_0^x K(x-t)\,\varphi(t)\,dt=f(x),$$

gde je $f(x)$ poznata funkcija, $K(x, t)$ jezgro a $\varphi(x)$ tražena funkcija. Pri tome se pretpostavlja da je $K(x, x)\neq 0$, što obezbeđuje egzistenciju rešenja jednačine (10).

Neka je $F(p) \fallingdotseq f(x)$, $L(p) \fallingdotseq K(x)$, $\Phi(p) \fallingdotseq \varphi(x)$. Primenjujući na obe strane jednačine (10) Laplaceovu transformaciju i koristeći teoremu konvolucije biće:

$$L(p)\,\Phi(p)=F(p),$$

odakle je

$$(11) \qquad \Phi(p)=\frac{F(p)}{L(p)}.$$

Original funkcije $\Phi(p)$ biće rešenje $\varphi(x)$ jednačine (10).

3) Demonstrirani postupak rešavanja jednačina (7) i 10) može se primeniti takođe na sistem Volterraovih integralnih jednačina oblika

$$(12) \qquad \varphi_i(x)=f_i(x)+\sum_{k=1}^{s}\int_0^x K_{ik}(x-t)\,\varphi_k(t)\,dt, \quad (i=1, 2, \ldots, s).$$

Primenjujući na obe strane ove jednačine Laplaceovu transformaciju dobija se

$$(13) \qquad \Phi_i(p)=F_i(p)=F_i(p)+\sum_{k=1}^{s} K_{ik}(p)\,\Phi_k(p), \ (i=1, 2, \ldots, s).$$

Rešavajući ovaj sistem po $\Phi_i(p)$ i nalazeći original za $\Phi_i(p)$ $(i=1, 2, \ldots, s)$ istovremeno se nalazi i rešenje sistema jednačina (12).

Formirati integralne jednačine, koje odgovaraju sledećim diferencijalnim jednačinama sa zadatim početnim uslovima:

4019. $y''+xy'+y=0; \quad y(0)=1, \ y'(0)=0.$

4020. $y''+y=0; \quad y(0)=0, \ y'(0)=1.$

4021. $y'-y=0; \quad y(0)=1.$

4022. $y''+y=\cos x; \quad y(0)=y'(0)=0.$

4023. $y''+y=\cos x; \quad y(0)=0; \quad y'(0)=1.$

4024. $y''-5y'+6y=0; \quad y(0)=0, \ y'(0)=1.$

4025. $y''-y'\sin x+e^x y=x; \quad y(0)=1, \ y'(0)=-1.$

4026. $y''+(1+x^2)\,y=\cos x; \quad y(0)=0, \ y'(0)=2.$

4027. $y'''+xy''+ +(x^2-x)\,y=xe^x+1; \quad y(0)=y'(0)=1, \ y''(0)=0.$

4028. $y''' - 2xy = 0; \quad y(0) = \frac{1}{2}, \ y'(0) = y''(0) = 1.$

Rešiti sledeće Volterraove integralne jednačine drugog reda:

4029. $\varphi(x) = \sin x + 2\int_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$ **4030.** $\varphi(x) = \cos x + \int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

4031. $\varphi(x) = e^x - \int_0^x e^{x-t}\,\varphi(t)\,dt.$ **4032.** $\varphi(x) = \cos 3x + \int_0^x e^{-(x-t)}\,\varphi(t)\,dt.$

4033. $\varphi(x) = x^3 + \int_0^x \sin(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$ **4034.** $\varphi(x) = 1 + x + \int_0^x e^{-2(x-t)}\,\varphi(t)\,dt.$

4035. $\varphi(x) = x + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2\,\varphi(t)\,dt.$

4036. $\varphi(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^x (x-t)\,e^{-(t-x)}\,\varphi(t)\,dt.$

4037. $\varphi(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2\,\varphi(t)\,dt.$

4038. $\varphi(x) = 1 - 2x - 4x^2 + \int_0^x [3 \pm 6(x-t) - 4(x-t)^2]\,\varphi(t)\,dt.$

4039. $\varphi(x) = \cos x + \int_0^x \varphi(t)\,dt.$

4040. $\varphi(x) = F(x) + \lambda\int_0^x (x-t)^{n-1}\,\varphi(t)\,dt, \ (n \in N).$

Rešiti sledeće Volterraove jednačine prvog reda:

4041. $\int_0^x e^{x-t}\,\varphi(t)\,dt = x.$ **4042.** $\int_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt = x.$

4043. $\int_0^x e^{x-t}\,\varphi(t)\,dt = \sin x.$ **4044.** $\int_0^x 3^{x-t}\,\varphi(t)\,dt = x.$

4045. $\int_0^x \operatorname{ch}(x-t)\,\varphi(t)\,dt = x^n.$ **4046.** $\int_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt = x + x^2.$

4047. $\int_0^x e^2(x-t)\,\varphi(t)\,dt = x^2 e^x.$ **4048.** $\int_0^x \sin(x-t)\,\varphi(t)\,dt = e^{\frac{x^2}{2}} - 1.$

4049. $\int_0^x J_0(x-t)\,\varphi(t)\,dt = \sin x.$

Rešiti sledeće sisteme integralnih jednačina:

4050. $u(x) = x + \int_0^x e^{-(x-t)}\,u(t)\,dt + \int_0^x (x-t)\,v(t)\,dt,$

$v(x) = 1 + \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\,u(t)\,dt - \int_0^x e^{(x-t)}\,v(t)\,dt.$

4051. $u(x) = e^x + \int_0^x u(t)\,dt - \int_0^x e^{(x-t)}\,v(t)\,dt,$

$v(x) = -x - \int_0^x (x-t)\,u(t)\,dt + \int_0^x v(t)\,dt.$

4052. $u(x) = e^x - \int_0^x u(t)\,dt + 4\int_0^x e^{(x-t)}\,v(t)\,dt,$

$v(x) = 1 - \int_0^x e^{-(x-t)}\,u(t)\,dt + \int_0^x v(t)\,dt.$

4053. $u(x) = 2 - \int_0^x (x-t)\,u(t)\,dt - 4\int_0^x v(t)\,dt,$

$v(x) = 1 - \int_0^x u(t)\,dt - \int_0^x (x-t)\,v(t)\,dt.$

4054. $u(x) = f(x) + \int_0^x \sin(x-t)\,v(t)\,dt,$

$v(x) = g(x) - \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\,u(t)\,dt.$

Glava XII

RAČUN VEROVATNOĆE

§ 1. Osnovni pojmovi i definicije

U računu verovatnoće pojmovi *opit* i *događaj* ne definišu se. Svaki opit završava se nekim ishodom ili događajem. Događaji se obeležavaju latinskim slovima $A, B, C, \ldots$ Ako neki opit a priori izaziva pojavu događaja A, onda se taj događaj naziva *pouzdan*. Ako se događaj A sigurno ne realizuje datim opitom onda se on naziva *nemoguć*. Događaj se naziva *slučajan* ako se on može, a ne mora, pojaviti kao rezultat nekog opita. Sve pouzdane događaje obeležavamo slovom U, a sve nemoguće slovom V.

Zbir (unija) dva događaja A i B naziva se događaj $A+B$ (ili $A\cup B$), koji se sastoji u tome da se realizuje bilo koji od njih (tj. bilo A, bilo B, bilo A i B). Sa $A\circ B$ obeležavaćemo događaj koji se sastoji u realizaciji jednog i samo jednog od tih događaja. *Proizvod (presek)* AB (ili $A\cap B$) dva događaja naziva se događaj koji se sastoji u tome da se događaji A i B pojavljuju skupa. Ako se pojavom događaja B uvek realizuje i događaj A, onda se piše $A\subset B$ i čita, A povlači B, ili A je specijalan slučaj događaja B. Događaji A i B nazivaju se *nespojivi* ako je $AB=V$. Događaji A i $\bar{A}$ nazivaju se *suprotni (komplementarni)*, ako je $A\bar{A}=V$ i $A+\bar{A}=U$. Događaji $A_1, A_2, \ldots A_n$ obrazuju *potpunu grupu događaja* ako je $A_1+A_2+\cdots+A_n=U$ i $A_i A_j=V$; $i=1, 2, \ldots, n$; $j=1, 2, \ldots, n$ $(i\neq j)$.

Sem elementarnog postoji i aksiomatski prilaz uvedenim pojmovima. Neka je dat skup Ω nekih elemenata ω, koje ćemo zvati *elementarni događaji*. (Taj skup objekata uvek možemo predstaviti tačkama u Euklidovom prostoru koji ima potreban broj dimenzija.) Formirajmo kakav bilo skup B podskupova skupa Ω koji poseduje sledeća svojstva: 1° skup Ω je elemenat skupa B; 2° ako je $A\in B$, onda i skup $\bar{A}$, koji se sastoji od svih elemenata skupa Ω, koji ne pripadaju A, takođe pripada B; 3° ako je $A_1, A_2 \ldots, A_n, \ldots$ proizvoljan konačan ili prebrojiv niz skupova iz B, onda njihov zbir i proizvod (presek) takođe pripadaju B. Taj skup skupova B naziva se *borelovsko telo skupa*, ili σ-algebra skupa. Elementi A skupa B nazivaju se (slučajni) događaji. Tada se svi skupovi Ω smatraju pouzdanim događajem U, dok se prazan skup tretira kao nemoguć događaj V.

Verovatnoća slučajnog događaja A naziva se pozitivna vrednost potpune aditivne funkcije $P(A)$, koja je definisana na skupu B i jednaka 1 na skupu Ω. To znači, da je za proizvoljno $A\in B$, i za proizvoljni konačan ili prebrojiv skup disjunktnih skupova A_i iz B $P\left(\sum_i A_i\right)=\sum_i P\left(A_i\right)$.

Posledica: 1° $0\leq P(A)\leq 1$ za proizvoljno A; 2° $P(V)=0$; 3° $P(A)=1-P(\bar{A})$; 4° ako je $A\subset B$, onda je $P(A)\leq P(B)$.

Klasična definicija verovatnoće. Neka je kao rezultat opita moguća realizacija samo n nespojivih i jednako mogućih ishoda $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Neka događaj B predstavlja m između njih određenih događaja, tj. $B=A_{i1}+A_{i2}+\cdots+A_{in}$. Tada je $P(B)=\frac{m}{n}$.

Sem klasične *Laplaceove* definicije verovatnoće uvodi se još i statistička definicija verovatnoće.

4055. Neka su A, B i C slučajni događaji. Objasniti smisao jednakosti:
1° $ABC=A$; 2° $A+B+C=A$.

4056. Iz tablice slučajnih brojeva nasumice se ispisuju dva broja. Neka A označava događaj da je jedan od tih brojeva prost a B da je jedan od njih paran. Šta predstavljaju događaji AB i $A+B$?

4057. Dokazati da je: 1° $\overline{\bar{A}\,\bar{B}}=A+B$; 2° $\overline{\bar{C}+\bar{D}}=CD$.

4058. Odrediti slučajnu veličinu X polazeći od jednačine $AX=AB$.

4059. Šta predstavljaju događaji $A+A$ i AA?

4060. Meta se sastoji iz deset koncentričnih krugova čiji su poluprečnici r_k $(k=1, 2, \ldots, 10)$, pri čemu je $r_1<r_2<\cdots<r_{10}$. Događaj A_k označava pogodak u krug r_k $(k=1, 2, \ldots, r_{10})$. Šta znače događaji

$$B=\sum_{k=1}^{6} A_k \quad \text{i} \quad C=\prod_{k=5}^{10} A_k?$$

4061. Kvadrat D sadrži dve oblasti D_1 i D_2 čije su površine S_1 i S_2. U D je bačena tačka koja može da padne i u bilo koji deo kvadrata sa podjednakom verovatnoćom. Neka događaj A_k znači padanje tačke u oblast D_k $(k=1,2)$. Da li su jednako mogući događaji A_1 i A_2?

4062. Neka je jedan koji bilo od tri aparata koji se proveravaju neispravan i neka je to događaj A. Događaj B znači da je aparat ispravan. Šta predstavljaju događaji $A+B$ i AB?

4063. Iz tablice slučajnih brojeva uzet je nasumice jedan broj. Ako je izabrani broj deljiv sa 5 onda je to događaj A; ako se taj broj završava nulom onda je to događaj B. Šta znači događaj $A\backslash B$?

4064. Ako je bilo koji od četiri proizvoda škart onda je to događaj A, ako su ne manje od dva proizvoda škart onda je to događaj B. Šta znače suprotni događaji $\bar{A}$ i $\bar{B}$?

4065. Ako su A, B i C slučajni događaji uprostiti izraze:

1° $(A+B)(B+C)$; 2° $(A+B)(A+\bar{B})$; 3° $(A+B)(A+\bar{B})(\bar{A}+B)$.

4066. Kada su moguće jednakosti:

1° $A+B=\bar{A}$; 2° $AB=\bar{A}$; 3° $A+B=AB$?

4067. Naći slučajan događaj X, kada je

$$\overline{X+A}+\overline{X+\bar{A}}=B$$

4068. Dokazati da je $\bar{A}B+A\bar{B}+\bar{A}\bar{B}=\overline{AB}.$

4069. Proveriti ispravnost sledećih jednakosti:

1° $\overline{\bar{A}\bar{B}}=A+B$; 2° $\overline{\bar{A}+\bar{B}}=AB$; 3° $A+B=AB+A\circ B$;

4° $\overline{A\circ B}=AB+\bar{A}\bar{B}$; 5° $A\circ B=(\overline{A\bar{B}})\circ(\overline{\bar{A}B})$;

6° $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\bar{A}_i$; 7° $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\bar{A}_i$.

4070. Da li su spojivi događaji

$$A \text{ i } \overline{A+B+C}?$$

4071. Dokazati da događaji

$$A,\ \bar{A}B \text{ i } \overline{A+B}$$

obrazuju potpunu grupu događaja.

4072. Dvojica šahista igraju jednu partiju. Ako partiju dobije prvi igrač onda je to događaj A, ako nadigra drugi igrač to je događaj B. Kakav događaj treba dodati navedenom skupu događaja da bismo dobili potpunu grupu događaja?

4073. Odrediti slučajni događaj X ako je:

1° $A+X=A+B$; 2° $AB+X=(A+C)(B+C)$.

4074. Između studenata koji prisustvuju času iz teorije verovatnoće, izabiramo jednoga od njih nasumice. Neka događaj A znači da je izabrani student mladić. Dalje, neka događaj B znači da on ne puši, a događaj C da stanuje u studentskom domu.

1° Opisati događaj $AB\bar{C}$.

2° Pod kojim uslovima važi identitet $ABC=A$?

3° Kada će biti ispravna relacija $\bar{C}\subseteq B$?

4° Objasniti kada nastupa jednakost $\bar{A}=B$, i da li ona nastupa kada svi prisutni momci ne puše?

4075. Dokazati da su za proizvoljne događaje A i B relacije: $A\subset B$; $\bar{A}\supset\bar{B}$; $A+B=B$; $A\bar{B}=V$ ekvivalentne.

4076. Dokazati da iz $A\circ B=C\circ D$ sledi da je $A\circ C=B\circ D$.

4077. Pokazati da $\overline{(A+\bar{B})}\,C=\bar{A}C+\bar{B}C$ važi tada i samo tada kada je $AC=BC$.

4078. Neka je $A\subset B$. Uprostiti izraze:

1° AB; 2° $A+B$; 3° ABC; 4° $A+B+C$.

4079. Dokazati da su događaji

1° $(A+B)(A+\bar{B})+(\bar{A}+B)(\bar{A}+\bar{B})$ i 2° $(A+B)(\bar{A}+B)+(A+\bar{B})(\bar{A}+B)$ pouzdani.

4080. Pokazati da je događaj

$$(A+B)(A+\bar{B})(\bar{A}+B)(\bar{A}+\bar{B})$$

nemoguć.

4081. Dato je $p=P(A)$, $q=P(B)$, $r=P(A+B)$. Naći $P(A\circ B)$, $P(A\bar{B})$ i $P(\bar{A}\bar{B})$.

4082. Poznato je da je $P(AB)=P(A)P(B)$ (tj. događaji A i B su nezavisni), $C\supset AB$ i $\bar{C}\supset\bar{A}\bar{B}$. Dokazati da je $P(AC)>P(A)P(C)$.

4083. Poznato je da istovremeno nastupanje događaj A_1 i A_2 obavezno povlači pojavu događaj A; dokazati da je

$$P(A)>P(A_1)+P(A_2)-1.$$

4084. Dokazati, ako je $A_1A_2A_3\subset A$ da je

$$P(A)>P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-2.$$

4085. Radnik je proizveo n artikala. Uzmimo da događaj $A_i\,(i=1,2,\ldots,n)$ znači da je i-ti artikal koji je proizveo neispravan. Ispisati sledeće događaje:

1° da su svi proizvodi ispravni;

2° da je bilo koji proizvod neispravan;

3° da je samo jedan proizvod neispravan;

4° da su najviše dva proizvoda neispravna;

5° da su makar dva proizvoda bez defekta;

6° da su tačno dva proizvoda neispravna.

4086. Neka A_n označava događaj koji se sastoji u tome, da se posle n ponovljenih opita realizuje događaj A; $B_{n,m}$ označava događaj koji se sastoji u tome, da se u n prvih opita događaj A realizovao m puta.

1° Izraziti $B_{4,2}$ pomoću A_i;

2° kakav je smisao događaja

$$B_m=\bigcap_{n=1}^{\infty}\Big(\bigcup_{k=0}^{m}B_{n,k}\Big);$$

3° da li su ispravne relacije

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\subseteq\bar{B} \text{ i } \bigcap_{n=1}^{\infty}\bar{A}_n\subseteq B,$$

gde je $B=\bigcup_{m=1}^{\infty}B_m$.

4087. Na skupu ω tačaka E izdvojeno je n podskupova A_i $(i=1, 2, \ldots, n)$. Za proizvoljan ω-skup definišemo karakterističnu funkciju χ_c skupa C stavljajući $\chi_C(\omega)=1$, ako je $\omega \in C$ i $\chi_C(\omega)=0$ u suprotnom slučaju. Dokazati da se, koristeći A_i, mogu konstruisati takvi skupovi B_k $(k=1, 2, \ldots, 2^n)$, da se za proizvoljnu ograničenu funkciju

$$F(\omega)=F(\chi_{A_1}(\omega), \ldots, \chi_{A_n}(\omega))$$

mogu naći takve konstante C_k, da je

$$F(\omega)=\sum_k C_k \chi_{B_k}(\omega).$$

4088. U kutiji se nalazi deset kuglica: tri bele i sedam crnih. Iz kutije se nasumice izvlači jedna kuglica. Odrediti verovatnoću da će izvučena kuglica biti: 1° bela; 2° crna.

4089. Kocka, čije su sve površi obojene izdeljena je na hiljadu kocaka jednakih dimenzija. Tako dobijene kocke su dobro izmešane. Odrediti verovatnoću da će kocka, izvučena nasumice, imati dve površi obojene.

4090. Odrediti verovatnoću da su zadnje dve cifre trećeg stepena nasumice uzetog celog broja N jedinice.

4091. U partiji od n proizvoda ima k defektnih komada. Odrediti verovatnoću da će među m nasumice uzetih proizvoda l njih biti neispravno.

4092. Iz kompletnog skupa domina nasumice je uzeto pet komada. Naći verovatnoću da će među njima biti makar jedna sa šesticom.

4093. Puštena je u prodaju lutrija čija ukupna vrednost srećaka iznosi n dinara. Ceo iznos dobiti vezan je za m srećaka. Naći verovatnoću iznosa dobiti na jednu srećku, ako je cena jedne srećke r dinara.

4094. Iz jedne partije proizvoda, među kojima ima n ispravnih i m neispravnih, kontrole radi uzeto je s primeraka. Evidentiranjem je konstatovano da je prvih k od s uzetih primeraka ispravno. Odrediti verovatnoću da će i sledeći primerak biti ispravan.

4095. Odrediti verovatnoću da će se za nasumice uzet ceo broj N završavati jedinicom njegovi: 1° kvadrat; 2° četvrti stepen; 3° broj dobijen množenjem tog broja sa proizvoljnim celim brojem.

4096. Deset knjiga na nekoj polici poređano je nasumice. Naći verovatnoću da će se pri takvom razmeštanju tri određene knjige naći skupa.

4097. Dato je pet duži, čije su dužine respektivno, 1, 3, 5, 7 i 9. Naći verovatnoću da će se od tri nasumice uzete duži moći konstruisati trougao.

4098. Lutrija je pustila u prodaju $n+m$ srećaka od kojih samo n dobija. Ako je neko kupio k srećaka, naći verovatnoću da će među njima biti s komada koji dobijaju.

4099. U bloku od deset karata (ulaznica) ima pet karata po sto dinara, tri karte po tri stotine dinara i dve karte po pet stotina dinara. Ako se iz bloka izvuku na sreću tri karte, kolika je verovatnoća da će:

1° bar dve izvučene karte imati istu vrednost;

2° vrednost sve tri izvučene karte iznositi sedam stotina dinara.

4100. Iz kutije u kojoj se nalazi n novčanica izvučena je bar jedna novčanica. Odrediti verovatnoću da će biti izvučen paran broj novčanica, ako je podjednako moguće izvlačenje proizvoljnog broja novčanica iz datog skupa.

4101. Lutrija raspolaže sa n srećaka od kojih m njih dobijaju. Kolika je verovatnoća da će dobiti neko koji je kupio k srećaka?

4102. Iz špila od 36 karata nasumice su izvučene tri karte. Naći verovatnoću da će među njima biti tačno jedan as.

4103. Iz špila od 36 karata nasumice su uzete tri karte. Naći verovatnoću da će među njima biti makar jedan as.

4104. Iz špila od 52 karte nasumice se izvlače tri karte. Naći verovatnoću da će te tri karte biti trojka, sedmica i as.

4105. Špil od 36 karata nasumice se podeli na dva jednaka dela. Kolika je verovatnoća da će u oba dela biti isti broj crvenih i crnih karata?

4106. Špil od 52 karte razdvojen je na četiri grupe od po 13 karata. Pretpostavlja se da je špil brižljivo izmešan, tako da je verovatnoća izvlačenja bilo koje karte jednako verovatna. Pretpostavlja se, da je izvučeno šest karata. Opisati prostor elementarnih ishoda i:

1° Naći verovatnoću da će među izvučenim kartama biti kralj pik.

2° Naći verovatnoću da će među izvučenim kartama biti zastupljene sve boje.

3° Koliki je najmanji broj karata koji treba izvući iz špila, da bi verovatnoća, da će se među njima nalaziti koje bilo dve karte istog imena, bila veća od $\frac{1}{2}$?

4107. Naći verovatnoću da će pri podeli špila od 52 karte na četiri igrača prvi od njih dobiti tačno n parova ,,as-kralj iste boje".

4108. U ostavi se nalazi n pari cipela. Iz ostave se po zakonu slučaja uzima $2r$ cipela $(2r<n)$. Kolika je verovatnoća da među izabranim cipelama:

1° neće biti kompletan nijedan par;

2° da će biti tačno jedan kompletan par;

3° da će biti tačno dva kompletna para.

4109. U kutiji se nalazi tačno n belih i m crnih kuglica $(m<n)$. Jedna po jedna iz kutije se, bez vraćanja, vade sve kuglice. Neka $M(k)$ znači broj crnih kuglica izvučenih u k puta, a $N(k)$ broj belih kuglica takođe izvučenih u k puta. Naći verovatnoću p da za svako $k=1,2,\ldots, n+m$ bude $M(k)<N(k)$.

4110. Banachov zadatak. Neki matematičar nosi sa sobom dve kutije šibica. Svaki put, kada mu zatreba šibica on nasumice uzme jednu od kutija. Naći verovatnoću, da će kada prvi put potrefi praznu kutiju, u drugoj još biti r komada šibica ($r=1,2,\ldots, n$; gde je n broj šibica koji sadrži svaka od kutija na početku).

4111. Neka $\varphi(n)$ označava broj prirodnih brojeva $\le n$ i uzajamno prostih sa n. Dokazati da je

$$\varphi(n)=n\prod\left(1-\frac{1}{p}\right),$$

gde je proizvod uzet po svim brojevima p koji su delitelji broja n.

4112. Razmotrimo jedan fizički (mehanički) sistem koji se sastoji od r čestica koje se ne mogu razlikovati. U statističkoj mehanici obično se fazni prostor deli na veliki broj n manjih oblasti ili ćelija, tako da svaka od r čestica padne u jednu od ćelija. Na taj način, stanje celoga sistema opisuje se kao raspodela r čestica na n ćelija, pa se to stanje, prema tome, jednoznačno određuje slogom brojeva $0\le m_i\le r$ $(i=1,2\ldots, n)$; gde je m_i broj čestica u i-toj ćeliji. Fotoni, atomska jezgra i atomi, koji sadrže paran broj elementarnih čestica, pokoravaju se Bose-Einsteinovoj statistici, u kojoj se razmatraju samo različiti rasporedi i svakom od njih pripisuje se ista verovatnoća. Naći tu verovatnoću.

4113. Neka je r čestica raspoređeno u n ćelija, pri čemu važi statistika Bose-Einsteina (v. z. 4112).

1° Dokazati da verovatnoća, da se u n fiksiranih ćelija nalazi tačno k čestica, isnosi

$$q_k=C_{n+r-k-2}^{r-k}:C_{n+r-1}^{r}$$

2° Pokazati da je $q_0>q_1>q_2>\ldots$

3° Dokazati ako n i r neograničeno rastu, pri čemu srednji broj čestica $\frac{r}{n}$, koje pripadaju jednoj ćeliji, teži ka $\lambda<\infty$, onda $q_k\to\frac{\lambda^k}{(1+\lambda)^{k+1}}$ (desna strana je poznata pod imenom geometrijska raspodela).

4114. Dato je n čestica, od kojih se svaka može nalaziti sa jednakom verovatnoćom $\frac{1}{N}$ u svakoj od N $(N>n)$ ćelija. Naći verovatnoću da će:

1° u n određenih ćelija pasti po jedna čestica; 2° u nekim biti po jedna čestica.

4115. Snop koji se sastoji iz k čestica hvata se sa n poređanih brojača, koji registruju čestice. Svaka čestica sa jednakom verovatnoćom može pasti na bilo koji brojač. Kolika je verovatnoća da će prisustvo čestica registrovati tačno r brojača.

4116. Neka je $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ analitička funkcija od n promenljivih. Koliko ona ima različitih izvoda r-og reda?

4117. Pokazati da

$$\varrho(A, B)=P(A\circ B)$$

zadovoljava sve aksiome metričkog prostora, sem aksioma ekvivalentnosti, tj. $\varrho(A, B)=\varrho(B, A)$, i da je za proizvoljne događaje A, B, C uvek

$$\varrho(A, B)+\varrho(B, C)>\varrho(A, C).$$

4118. Dogovorimo se da za događaje (skupove) A_i, A_j, A_k, važi svojstvo b_{ijk} ako su ispunjena sledeća dva uslova:

1° $A_i\cap\overline{A_j}\cap A_k=V$;

2° $\overline{A_i}\cap A_j\cap\overline{A_k}=V$;

Dokazati:

1) ako važi osobina b_{ijk}, da je onda

$$\varrho(A_i, A_j)+\varrho(A_j, A_k)=\varrho(A_i, A_k)$$

2) ako iz $F(A)$ sledi, da je $A=V$, onda važi i obrnuto tvrđenje.

4119. Pokazati da uvek iz osobina b_{ijk} i b_{jkm} (v. preth. pr.) sledi b_{ijm}.

4120. Neka su $A^*=(A_1,\ldots, A_n)$ i $B^*=(B_1,\ldots, B_n)$ dva sistema skupova, kod kojih je $A_{j+1}\supseteq A_j$ i $B_{j+1}\supseteq B_j$ $(j=1, 2,\ldots, n-1)$, pri čemu je $A_n\cap B_n=V$, i neka je C takav skup, da je $A_n\cap C=B_n\cap C=V$, tada niz skupova

$$L^*=(L_1,\ldots, L_n),$$

gde je

$$L_i=A_i\cup B_{n-i+1}\cup C$$

nazivamo linearno uređen.

Dokazati, ako je $i<j<k$ onda za L_i, L_j, L_k važi b_{ijk}.

4121. Dokazati na osnovu zad. 4118 i 4120 da je:

$$\varrho(L_iL_j)+\varrho(L_jL_k)=\varrho(L_iL_k).$$

4122. Dokazati, ako je $R^*=(R_1,\ldots, R_n)$ takav niz skupova da pri svakom $i, j, k=1, 2,\ldots, n$ i $i<j<k$ za R_i, R_j, R_k važi svojstvo b_{ijk}, onda je R^* linearno uređen niz skupova.

§ 2. Geometrijska verovatnoća

Geometrijska definicija verovatnoće koristi se za izračunavanje verovatnoće realizacije događaja u onom slučaju kada se ishod opita definiše slučajnim položajem tačke u nekoj oblasti, pri čemu je proizvoljni položaj tačke u toj oblasti jednako moguć. Ako je dimenzija cele oblasti S, a S_p dimenzija dela te oblasti, čije se sve tačke smatraju povoljnim za ishod događaja, onda je verovatnoća događaja

$$p=\frac{S_p}{S}$$

Oblast S može imati proizvoljan broj dimenzija, otuda S_p i S mogu predstavljati duži, površine, zapremine itd.

4123. Na beskonačnu šahovsku tablu sa stranicama kvadrata veličine a baca se metalni novac prečnika $2r<a$. Naći verovatnoću:

1° da će ceo novčić pasti unutar jednog od kvadrata;

2° da će novčić seći samo jednu stranicu kvadrata.

4124. Na jednom delu magnetofonske trake dužine 200 m zapisana je informacija na intervalu od 20 m. Na nekom drugom intervalu, nezavisno od prve, zapisana je analogna informacija. Odrediti verovatnoću da će u intervalu od 60 do 80 m biti neprekidan zapis, ako su počeci obadve informacije jednako mogući u proizvoljnoj tački od 0 do 180 m.

4125. U svakom momentu vremena t jednako je moguće da u prijemnik stignu dva signala. Prijemnik će biti zapušen ako je razlika u vremenu između tih signala manja od τ. Odrediti verovatnoću da će prijemnik biti zapušen.

4126. Tačka je bačena nasumice unutar kruga poluprečnika r. Verovatnoća da tačka padne u proizvoljnu oblast unutar kruga proporcionalna je površini te oblasti. Odrediti verovatnoću:

1° da se tačka nalazi na rastojanju $d(d<r)$ od centra;

2° da manji ugao između zadatog pravca i prave koja spaja tačku sa koordinatnim početkom ne prevazilazi α.

4127. Kolika je verovatnoća da će zbir dva, nasumice uzeta, pozitivna prava razlomka biti veći od 1 a da njihov proizvod bude veći od $\frac{2}{9}$?

4128. U nekoj tački C telefonske linije AB dužine L došlo je do prekida. Naći verovatnoću da rastojanje tačke C od tačke A nije manje od l.

4129. U kvadrat sa temenima (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) nasumice je bačena tačka M. Neka su (u, v) koordinate te tačke. Pretpostavlja se da verovatnoća pada tačke u neku oblast, koja pripada kvadratu, zavisi samo od površine te oblasti i da je proporcionalna toj površini.

1° Dokazati da je za $0<x,\ y<1$

$$P(u<x;\ v<y)=P(u<x)\ P(v<y)=xy.$$

2° Naći za $0<z<1$

1) $P(|u-v|<z)$;

2) $P(uv<z)$;

3) $P(\min(uv)<z)$

4) $P(\max(u,\ v)<z)$;

5) $P\left[\frac{1}{2}(u+v)<z\right]$.

4130. U krugu poluprečnika r povučene su tetive paralelne zadatom pravcu. Koliko iznosi verovatnoća da dužina nasumice uzete tetive nije veća od r, ako su jednako mogući proizvoljni položaji presečne tačke tetive i prečnika koji je normalan na izabrani pravac.

4131. Na horizontalnu ravan izdeljenu paralelnim linijama koje su udaljene jedna od druge $2a$, nasumice se baca ispupčena kontura, čiji je najveći prečnik manji od $2a$. Naći verovatnoću da će kontura seći jednu od paralelnih pravih.

4132. Data je pravougla rešetka sa cilindričnim rupicama poluprečnika r. Rastojanja između osa cilindara su respektivno a i b. Odrediti verovatnoću da će kuglica poluprečnika d pasti u rupicu pri jednom bacanju bez nišanjenja, ako je trajektorija padanja kugle normalna na ravan rešetke.

4133. U pravougli trougao ABC sa katetama $AB=l$ i $BC=k$ baca se na sreću tačka M. Odrediti skupnu raspodelu dužine h normale, spuštene iz tačke M na AB, i ugla $\alpha=\widehat{MAB}$ (tj. za svako x i y naći verovatnoću da se istovremeno dese događaji $(h<x)$ i $(\alpha<y)$.

4134. U elipsi sa poluosama $a=100$ cm i $b=10$ cm postavljen je pravougaonik simetrično u odnosu na centar elipse, tako da mu je veća stranica paralelna sa osom a. Stranice pravougaonika su 10 i 3 cm. Sem toga, u elipsu su smeštena još četiri kruga poluprečnika 4,3 cm, koji ne seku ni elipsu ni pravougaonik, niti se pak seku među sobom. Odrediti verovatnoću:

1° da slučajno uzeta tačka, čiji je položaj jednako moguć unutar elipse, bude u jednom od krugova;

2° da krug poluprečnika 5 cm, opisan oko te tačke kao centra, seče bar jednu stranicu pravougaonika.

4135. Duž dužine l nasumice je podeljena na tri dela. Naći verovatnoću da će se od te tri duži moći konstruisati trougao.

4136. Na odsečku AB dužine l nasumice su uzete dve tačke L i M. Naći verovatnoću da će tačka L biti bliža tački M nego tački A.

4137. Na duži AB dužine l uzete su nasumice dve tačke M i N. Odrediti verovatnoću da dužine tako dobijenih duži neće biti veće od $a\left(l>a>\frac{l}{3}\right)$.

4138. Na krugu poluprečnika R, slučajno su fiksirane tri tačke A, B, C. Kolika je verovatnoća da će trougao ABC biti oštrougli?

4139. Kolika je verovatnoća da će se od tri nasumice uzete duži, čija dužina nije veća od l, moći konstruisati trougao?

4140. Dva broda moraju da stignu u jedno isto pristanište. Vreme dolaska obadva broda je nezavisno i jednako moguće u toku dana. Naći verovatnoću da će jedan od brodova morati čekati na oslobođenje pristaništa, ako je vreme zadržavanja prvog broda jedan, a drugog dva časa.

4141. Dva lica imaju iste mogućnosti da stignu na određeno mesto u proizvoljnom momentu nekog vremenskog intervala T. Odrediti verovatnoću da će jedno lice čekati drugo ne više od t.

4142. Na površi sfere poluprečnika R proizvoljno su izabrane dve tačke. Kolika je verovatnoća da će luk velikoga kruga, koji prolazi kroz te dve tačke obrazovati ugao manji od $\alpha\,(\alpha<\pi)$.

4143. Zemljin veštački satelit kreće se po orbiti koja se nalazi između 60° severne i 60° južne geografske širine. Pretpostavljajući da satelit sa istom verovatnoćom može pasti na površinu zemlje u bilo koju tačku između navedenih paralela, naći verovatnoću da će satelit pasti iznad 30° severne širine.

4144. Ravan je izdeljena paralelnim pravama čije međusobno rastojanje iznosi d. Naći verovatnoću da će nasumice bačena igla dužine $l\,(l<d)$ preseći koju bilo pravu (Bifonov problem).

4145. Odrediti verovatnoću da će koreni jednačina: 1° kvadratne $x^2+2ax+b=0$; 2° kubne $x^3+3bx+2b=0$, biti realni, ako koeficijenti sa istom verovatnoćom mogu pripadati pravougaoniku $|a|\leq n$, $|b|\leq m$. Kolika je verovatnoća da će uz navedene uslove koreni kvadratne jednačine biti pozitivni?

4146. U datoj ravni, nezavisno jedan od drugoga, pravolinijski se kreću tačka A i centar kruga B, čiji je poluprečnik R. Brzine tih tačaka su konstantne i jednake respektivno u i v. U određenom momentu rastojanje je $AB=r\,(r>R)$, a ugao između prave AB i vektora $\vec{v}$ je β. Polazeći od pretpostavke da je kretanje tačke A jednako moguće u svim pravcima naći verovatnoću da će se tačka A naći u krugu.

4147. Bertrandov paradoks. Između tetiva kruga na sreću se uzima jedna. Naći verovatnoću, da će njena dužina biti veća od dužine stranice upisanog ravnostranog trougla.

§ 3. Uslovna verovatnoća. Proizvod i zbir verovatnoća. Totalna verovatnoća

1° Sa $P(A/B)$ obeležavamo *uslovnu verovatnoću* događaja A pod uslovom da se desio događaj B. Za nezavisne događaje je $P(A/B)=P(A)$; $P(B/A)=P(B)$.

2° Za proizvoljna dva događaja A i B je

$$P(AB)=P(A)\cdot P(A/B)=P(B)\cdot P(A/B).$$

3° Za proizvoljna dva događaja A i B je

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

4° Ako je $B=BA_1+BA_2+\cdots+BA_n$, a parovi događaja BA_i su nespojivi onda je

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\cdot P(B/A_i).$$

Ova formula naziva se *formula totalne verovatnoće*. Pod istim uslovom važi i *Bayesova formula*

$$P(A_i/B)=\frac{P(A_i)\cdot P(B/A_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(A_k)P(B/A_k)}$$

4148. Pri povećanju napona za dva puta može, kao posledica, da dođe do prekida električnog kola usled ispadanja iz stroja jednog od tri uzastopno spojena elementa, respektivno sa verovatnoćama 0,3, 0,4 i 0,6. Odrediti verovatnoću da neće doći do prekida kola. Koliko će se izmeniti verovatnoća ako se ukloni prvi elemenat?

4149. Odrediti verovatnoću da će nasumice izabran proizvod biti prvoklasan, ako se zna, da su 4% proizvoda neispravna a samo 75% proizvoda zadovoljava uslove prvoklasnosti.

4150. Partija od stotinu proizvoda podvrgava se delimičnoj kontroli. Ako se pojavi makar jedan neispravan proizvod između pet proverenih onda se smatra da je cela partija proizvoda neupotrebljiva. Kolika je verovatnoća da će partija ispasti neupotrebljiva ako se zna da ona sadrži 5% neispravnih proizvoda?

4151. Lutrija raspolaže sa 1000 lozova; od svih lozova samo jedan dobija 500 hiljada, 10 lozova po 100 hilada, 50 lozova po 20 hiljada, 100 lozova po 5 hiljada dinara, dok ostali lozovi ne dobijaju. Ako je neko kupio jedan loz, kolika je verovatnoća da će dobiti najmanje 20 hiljada?

4152. Dva strelca, koji pogađaju metu respektivno sa verovatnoćama 0,7 i 0,8 ispaljuju po jedan metak. Odrediti verovatnoću da će cilj biti pogođen.

4153. Verovatnoća da će otkazati k-ti blok računske mašine u toku nekog vremena T iznosi $p_k (k=1, 2, \ldots, n)$. Odrediti verovatnoću da će za dati vremenski interval ispasti iz stroja makar jedan blok, ako blokovi nezavisno funkcionišu.

4154. Koliko se mora uzeti brojeva iz tablice slučajnih brojeva da bismo mogli biti ubeđeni sa verovatnoćom 0,9, da će se među njima nalaziti makar jedan paran broj?

4155. Čebiševljev problem. Naći verovatnoću da se nasumice napisan razlomak ne može skratiti.

4156. U kutiji se nalaze dve bele i tri crne kuglice. Iz kutije se izvlače uzastopice dve kuglice. Naći verovatnoću da će obe kuglice biti bele.

4157. Isti uslovi kao u prethodnom zadatku, ali se samo posle prvog vučenja kuglica vraća u kutiju.

4158. Pribor koji funkcioniše u toku vremena t sastavljen je iz tri dela, od kojih svaki, nezavisno jedan od drugoga, može da otkaže u navedenom vremenu. Ako otkaže bilo koji od tri dela onda ceo pribor prestaje da funkcioniše. Verovatnoće da u toku vremena t neće otkazati delovi iznose respektivno $p_1=0{,}8$, $p_2=0{,}9$, $p_3=0{,}7$. Naći pouzdanost celog pribora.

4159. Ako su događaji A i B nespojivi, da li iz toga proističe da su oni nezavisni?

4160. Pokazati, ako je uslovna verovatnoća $p(A/B)$ veća od bezuslovne verovatnoće $p(A)$, da je onda i uslovna verovatnoća $p(B/A)$ veća od bezuslovne verovatnoće $p(B)$.

4161. Student je izašao na ispit znajući samo 20 od mogućih 25 pitanja. Ispitivač je dao studentu tri pitanja. Koristeći pojam uslovne verovatnoće, naći verovatnoću da će student znati sva tri pitanja. Odrediti tu istu verovatnoću koristeći klasičnu definiciju verovatnoće.

4162. Da bi našao jednu knjigu student je rešio da obiđe tri biblioteke. Jednaka je verovatnoća da se u svakoj od tih biblioteka nalazi ili ne nalazi knjiga. Ako knjiga postoji, onda je jednako verovatno da je izdata odnosno neizdata drugim čitaocima. Šta je više verovatno — da student nađe ili ne nađe knjigu, ako je poznato da se biblioteke kompletiraju nezavisno jedna od druge?

4163. Bacaju se tri kocke. Kolika je verovatnoća da će se bar na jednoj od njih pojaviti indeks jedan, ako su sve tri kocke pale na različite strane. Pretpostavlja se da su strane svake od kocaka numerisane brojevima od jedan do šest.

4164. Poznato je da se prilikom bacanja 10 kocki pojavila bar jedna jedinica. Koliko iznosi verovatnoća da su se pojavile dve ili više jedinica?

4165. Pomoću 6 karata, na kojima je ispisano po jedno slovo, sastavljena je reč „kareta". Karte se promešaju a zatim se nasumice izvlači po jedna od njih. Kolika je verovatnoća da će uzastopno izvučena slova obrazovati reč raketa?

4166. Dva aviona jedan za drugim bombarduju jedan isti cilj, bacajući u svakom navratu po jednu bombu. Svaki avion ima po tri bombe. Verovatnoća da prvi avion, bacajući jednu bombu, pogodi cilj je $p_1=0{,}3$; verovatnoća za drugi avion je $p_2=0{,}4$. Ako cilj pogodi jedna bomba on će biti uništen i bombardovanje prestaje. Naći verovatnoću da će cilj biti uništen pre nego sve bombe, kojima raspolažu avioni, budu utrošene.

4167. Neka $A_1, A_2, \ldots, A_n$ čine među sobom nezavisan skup događaja. Da li su uvek dati događaji nezavisni u celini: tj. da li je uvek uslovna verovatnoća da se realizuje proizvoljni događaj, izračunata uz pretpostavku da su se kakvi bilo događaji iz tog skupa desili, jednaka bezuslovnoj verovatnoći tog događaja?

4168. U skupu od $2n$ lica nalazi se isti broj muškaraca i žena. Mesta za stolom zauzimaju se po zakonu slučaja. Odrediti verovatnoću da dva lica istog pola neće sesti jedno do drugoga.

4169. U kutiji se nalazi n kuglica sa oznakama od 1 do n. Kuglice se izvlače nasumice bez vraćanja u kutiju. Kolika je verovatnoća da će se u k prvih izvlačenja rednji broj kuglica poklapati sa rednim brojem izvlačenja.

4170. U kutiji se nalaze dve kuglice: bela i crna. Iz kutije se izvlači po jedna kuglica sve dotle dok se ne pojavi crna, pri čemu se bela kuglica, ako se izvuče, vraća u kutiju i sem toga se dodaju još dve bele kuglice. Naći verovatnoću da u prvih 50 opita crna kuglica neće biti izvučena.

4171. Prilikom biranja dva kandidata za prvog je u glasačku kutiju spušteno n listića a za drugoga m, pri čemu je $n>m$. Kolika je verovatnoća da će pri izvlačenju iz kutije jednog po jednog listića broj glasova dat za prvog kandidata stalno biti veći od broja glasova datih za drugog kandidata?

4172. U redu za ulaznice, koje koštaju po 5 dinara, čeka $n+m$ ljudi, od kojih n njih imaju novčanice od 5 dinara a ostalih $m<n-1$ od 10 dinara. Svako lice kupuje samo po jednu kartu. Kolika je verovatnoća da se ni za jednog od njih neće postaviti pitanje kusura?

4173. 1° Dokazati ako je $P(A)=0{,}9$; $P(B)=0{,}8$, da je $P(A/B)>0{,}875$

2° Dokazati da je $p(A_2/A_1)>1-\dfrac{p(\bar{A}_2)}{p(A_1)}$.

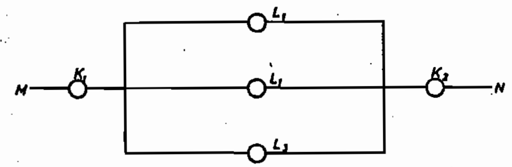
4174. Dokazati da iz nezavisnosti po parovima događaja A, B, C, ne sledi njihova nezavisnost kao celine.

4175. Koristeći formulu $p(B)=p(A)\,p(B/A)+p(\bar{A})\,p(B/\bar{A})$, pokazati da iz nezavisnosti slučajnih događaja A i B sledi nezavisnost slučajnih događaja $\bar{A}$ i B.

4176. Odrediti verovatnoću, da će partija od sto proizvoda, među kojima je pet neispravnih, biti primljena pri ispitivanju nasumice uzete polovine cele partije, ako uslov prijema dopušta najviše jedan neispravan primerak na pedeset primeraka.

4177. Bombarduju se tri skladišta municije, pri čemu se baca samo jedna bomba. Verovatnoća da ona padne na prvo skladište iznosi 0,01, na drugo 0,008, na treće 0,025. Ako bomba padne na jedno od skladišta onda ona uništava sva tri. Naći verovatnoću da će skladišta biti uništena.

4178. Električno kolo između tačaka M i N sastavljeno je po šemi datoj na sl.



sl. 35

Ispadanja iz stroja, za neko vreme T, različitih elemenata su nezavisni događaji koji imaju sledeće verovatnoće:

elementi	K_1	K_2	l_1	l_2	l_3
verovatnoća	0,6	0,5	0,4	0,7	0,9

Odrediti verovatnoću da će doći do prekida struje u toku datog vremenskog intervala, usled ispadanja iz stroja: 1° elemenata K_1 i K_2; 2° koga bilo od elemenata.

4179. Verovatnoća pojave događaja A, koji je jednako moguć u proizvoljnom intervalu T, iznosi p. Poznato je da se za vreme $t<T$ događaj nije desio. Odrediti verovatnoću $\mathbf{P}$ da će se događaj A desiti u ostatku vremenskog intervala.

4180. U jednu istu metu vrše se tri gađanja. Verovatnoće da će cilj biti pogođen pri prvom, drugom i trećem gađanju su respektivno $p_1=0{,}4$, $p_2=0{,}5$, $p_3=0{,}7$. Odrediti verovatnoću da će u tri gađanja biti samo jedan pogodak.

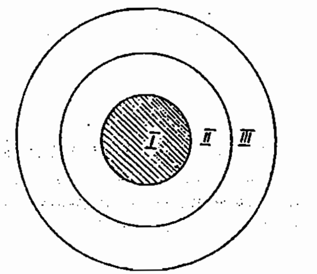
4181. Zadržavajući uslove prethodnog zadatka naći verovatnoću da će meta biti makar jedanput pogođena.

4182. Vodi se vazdušni dvoboj između lovca i bombardera. Prvi otvara vatru lovac, ispaljujući na bombardera jedan plotun, i obara ga sa verovatnoćom 0,2. Ako bombarder ne bude oboren on odgovara vatrom i obara lovca sa verovatnoćom 0,3. Ako lovac ne bude oboren, on nastavlja napad približavajuci se još više bombarderu i obara ga sa verovatnoćom 0,4. Naći verovatnoću da će u vazdušnom dvoboju biti oboren: 1° bombarder; 2° lovac.

4183. Avion koji je izložen gađanju sastoji se iz tri dela različitog stepena osetljivosti. Da bi avion bio uništen dovoljan je jedan pogodak u prvi deo, ili dva pogotka u drugi deo, ili tri pogodka u treći deo. Uslovna verovatnoća da bude pogođen ma koji deo, pod uslovom da je avion pogođen, proporcionalna je površini te oblasti. Prvi, drugi i treći deo zauzimaju respektivno 0,1, 0,2, 0,7 od ukupne površine aviona. Pretpostavimo da su avion pogodile dve granate. Naći verovatnoću da će avion biti uništen.

4184. Uz uslove iz prethodnog zadatka naći verovatnoću da će avion biti uništen ako je pogođen sa tri granate.

4185. Da bi avion bio uništen prilikom eksplozije granate na nekom rastojanju od njega, nephodno je da se parčadima granate unište oba motora ili da se uništi pilot. Ako granata eksplodira na rastojanju r od aviona onda verovatnoća da će oba motora biti uništena iznosi 0,2; verovatnoća da će biti uništen pilot iznosi 0,3. Naći verovatnoću da će prilikom eksplozije granate avion biti izbačen iz stroja.



Sl. 36

4186. Kružni cilj sl. 36 sastoji se iz tri zone: I, II i III. Verovatnoća da se pogodi prva zona, pri jednom gađanju, iznosi 0,15, druga 0,23 a treća 0,17. Naći verovatnoću promašaja.

4187. Radnik nadgleda tri razboja, koji rade nezavisno jedan od drugoga. Verovatnoća, da u toku jednog časa neće biti potreban nadzor razboja, iznosi za prvi razboj 0,9, za drugi 0,8 i za treći 0,7. Naći verovatnoću da bar jednom razboju, u toku jednog časa, neće biti potrebna kontrola radnika.

4188. Iz kutije koja sadrži n belih, m crnih i l crvenih kuglica, izvlače se na sreću jedna po jedna kuglica; 1° bez vraćanja; 2° sa vraćanjem posle svakog izvlačenja. Odrediti u oba slučaja verovatnoću da će bela kuglica biti izvučena pre crne kuglice.

4189. Neko je napisao n pisama različitim osobama, zapečatio koverte, a zatim nasumice ispisao na njima različite adrese. Odrediti verovatnoću da će bar jedno pismo biti ispavno adresirano.

4190. Kao rezultat opita mogu da nastupe četiri događaja, respektivno sa verovatnoćama 0,012; 0,010; 0,006 i 0,002. Odrediti verovatnoću da će se kao rezultat opita realizovati koji bilo od tih događaja.

4191. U kvadrat koji je izdeljen na n^2 jednakih kvadrata, bačena je kuglica. Verovatnoća da će kuglica pasti u mali kvadrat i-te horizontalne i j-te vertikalne trake iznosi $p_{i,j}\left(\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}=1\right)$. Odrediti verovatnoću da će kuglica pasti u k-tu horizontalnu traku.

4192. Kolika je verovatnoća da će iz špila od 52 karte biti izvučen kralj, dama ili žandarm proizvoljne boje ili karta pikove boje.

4193. Poznate su verovatnoće događaja A i AB. Naći verovatnoću događaja $A\bar{B}$.

4194. Dokazati da iz uslova

$$p(B/A)=p(B/\bar{A})$$

sledi nezavisnost događaja A i B.

4195. Događaj A je specijalan slučaj događaja B. Dokazati da je $p(A)<p(B)$.

4196. Odrediti verovatnoću, da nasumice izabran ceo broj neće biti deljiv 1° ni sa dva ni sa tri; 2° sa dva ili sa tri.

4197. Verovatnoća da se dobije numerisana karta, kod koje je jednak zbir prve i zadnje tri cifre, iznosi 0,05525. Kolika je verovatnoća da će se među dve karte nalaziti takva jedna karta, ako obe karte: 1° imaju uzastopne indekse; 2° nezavisne su jedna od druge.

4198. Dokazati da će za $p(A)=a$ i $p(B)=b$ biti $p(A/B)>\dfrac{a+b-1}{b}$

4199. Poznato je da je $p(x<10)=0,9$, $p(|y|<1)=0,95$. Dokazati da će, uz proizvoljnu zavisnost između x i y, za $z=x+y$ važiti nejednakosti $0,85<p(z<11)$; $p(z<9)<0,95$.

4200. Igrači a i b bacaju novčić. Prvi igrač dobija ako se pojavi grb pri prvom, drugom ili trećem bacanju. U protivnom slučaju dobija drugi igrač. Odrediti verovatnoću da će dobiti drugi igrač.

4201. Dva igrača bacaju naizmenično novčić. Dobija onaj kod koga se ranije pojavi grb. Odrediti verovatnoću da će dobiti prvi i verovatnoću da će dobiti drugi igrač.

4202. U kutiji se nalazi n belih i m crnih kuglica. Dva igrača uzimaju uzastopice po jednu kuglicu, vraćajući svaki put izvučenu kuglicu nazad. Igra se nastavlja sve dotle dok bilo koji igrač ne izvuče belu kuglicu. Naći verovatnoću da će igrač, koji prvi počinje izvlačenje, prvi izvući belu kuglicu.

Ako je $A_iA_j=V$ $(i\neq j)$ dokazati jednakosti:

4203. $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)=1-P\left(\sum_{k=1}^{n} \bar{A}_k\right)$.

4204. $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k)-\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n} P(A_k+A_j)+\sum_{k=1}^{n-2}\sum_{j=k+1}^{n-1}\sum_{l=j+1}^{n} P(A_k+A_j+A_l)-$

$-\cdots+(-1)^{n-1}P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right)$.

4205. $P(A_1\circ A_2\circ\cdots\circ A_n)=\sum_{k=1}^{n}(-2)^{k-1}\sum_{\nu_1<\nu_2<\cdots<\nu_k} P(A_{\nu_1}\cdots A_{\nu_k})$, $n>3$.

4206. U kutiji se nalazi n jednakih kuglica sa oznakom od 1 do n. Kuglice se izvlače jedna po jedna i ne vraćaju se u kutiju. Odrediti verovatnoću da će se bar jednom broj kuglice poklopiti sa brojem opita.

4207. Problem De Mere. Dva igrača su se dogovorila da igru dobija onaj koji dobije određeni broj partija. Igra je bila prekinuta u trenutku kada je prvom igraču preostalo do pobede m, a drugome n partija. Kako će igrači podeliti ulog, ako igrači sa istom verovatnoćom mogu dobiti koju bilo partiju?

4208. Problem četiri lažova. Između četiri lažova a, b, c, d jedan (a) koji je dobio informaciju u obliku signala „da" ili „ne" prenosi je drugome (b), drugi trećem (c), treći četvrtom (d), a četvrti objavljuje rezultat dobijene informacije na isti način kao i svi drugi. Poznata je da svaki od njih govori istinu samo u jednom od tri slučaja. Kolika je verovatnoća da je prvi od lažova rekao istinu, ako je četvrti kazao istinu?

4209. Skup od n igrača izvlači iz kutije n jednakih ceduljica od kojih $m\leq n$ njih dobija. Da li imaju iste šanse svi igrači? Kada je povoljnije izvlačiti ceduljice?

4210. Date su tri jednake kutije. U jednoj od njih nalaze se dve bele i jedna crna kuglica; u drugoj tri bele i jedna crna; u trećoj jedna crna i jedna bela. Neko izabira na sreću jednu od kutija i uzima iz nje jednu kuglicu. Naći verovatnoću da će izvučena kuglica biti bela.

4211. Obeležena kuglica može se nalaziti u jednoj od dve kutije sa verovatnoćama p i $1-p$. Verovatnoća da se izvuče kuglica iz bilo koje kutije iznosi $P(p\neq 1)$. Na koji način treba izvlačiti prvih n puta iz koje bilo kutije, da verovatnoća izvlačenja obeležene kuglice bude najveća, ako se posle svakog izvlačenja kuglica vraća u kutiju?

4212. Na avion se ispaljuju tri pojedinačna hitca. Verovatnoća da avion bude pogođen prvim hitcem iznosi 0,4, drugim 0,5, trećim 0,7. Da bi avion bio izbačen iz stroja potrebna su tri pogotka; u slučaju jednog pogotka avion će biti izbačen iz stroja sa verovatnoćom 0,2 a u slučaju dva pogotka sa verovatnoćom 0,6. Naći verovatnoću da će kao ishod toga gađanja avion biti izbačen iz stroja.

4213. Tri aviona, jedan koji ~~vodi i dva vođena, upućeni su da~~ bombarduju neki objekt. Radionavigacioni uređaj, bez koga je nemoguće stići na cilj, ima samo vodeći avion. Kada stignu na cilj avioni vrše bombardovanje nezavisno jedan od drugoga. Verovatnoća da će bilo koji od njih razrušiti objekat iznosi 0,3. Pred sam dolazak na cilj avioni prolaze kroz zonu vazdušne odbrane protivnika, kada svaki od njih može biti oboren sa verovatnoćom 0,2. Naći verovatnoću da će objekat biti uništen.

4214. Date su dve partije istih proizvoda. Jedna od njih sadrži 12 a druga 10 komada, pri čemu obadve partije sadrže po jedan neispravan proizvod. Nasumice je uzet jedan proizvod iz prve partije i prebačen u drugu, a posle toga opet na sreću uzet jedan proizvod iz druge partije. Odrediti verovatnoću da je izvučeni proizvod iz druge partije neispravan.

4215. Iz kompletnog skupa domina na sreću su uzeta dva komada. Odrediti verovatnoću da će se te dve domine moći nadovezati jedna na drugu.

4216. Dato je n kutija a u svakoj od njih nalazi se po m belih i k crnih kuglica. Iz prve kutije nasumice se uzima jedna kuglica i prebacuje u drugu. Dalje se iz druge kutije nasumice izvlači jedna kuglica i prebacuje u treću kutiju itd. Odrediti verovatnoću da će posle takvog prebacivanja iz zadnje kutije biti izvučena bela kuglica.

4217. Date su tri kutije u kojima se nalaze bele i crne kuglice. Verovatnoća, da se uzme crna kuglica iz prve kutije, iznosi 0,2, a iz druge i treće kutije 0,6. Iz kutije uzete nasumice izvučena je jedna kuglica. Naći verovatnoću da je ta kuglica bele boje. Odrediti verovatnoću da će biti dvaput izvučena bela kuglica iz jedne iste kutije, ako se posle svakog izvlačenja kuglica vraća u kutiju.

4218. Verovatnoća da će na telefonsku centralu prispeti k poziva za vreme t iznosi $P_t(k)$. Smatrajući da je broj telefonskih poziva u dva susedna vremenska intervala nezavisan, odrediti verovatnoću $P_{2t}(s)$ da za $2t$ prispe s poziva.

4219. Petnaest ispitnih ceduljica sadrže po dva pitanja koja se ne ponavljaju. Kandidat je naučio samo 25 pitanja. Odrediti verovatnoću da će kandidat položiti ako je za to dovoljan odgovor na dva pitanja sa jedne ceduljice ili na jedno pitanje sa prve izvučene ceduljice i na određeno dopunsko pitanje sa druge ceduljice.

4220. U kojim slučajevima je ispravna jednakost $p(A)=p(A/B)+p(A/\bar{B})$?

4221. U dve kutije, od kojih svaka sadrži po 10 kuglica, jedna kuglica je numerisana. Igrač ima pravo da uzastopno izvuče 20 kuglica iz proizvoljne kutije, vraćajući svaki put kuglicu nazad u istu kutiju iz koje je izvukao. Kako treba izvesti igru, da verovatnoća izvlačenja obeležene kuglice bude najveća, ako se numerisana kuglica nalazi u prvoj kutiji sa verovatnoćom $\frac{2}{3}$? Čemu je jednaka ta verovatnoća?

4222. Radi predaje poruka pomoću signala „tačka" i „crtica" koristi se telegrafski sistem. Statistička svojstva smetnji su takva, da se iskvare prosečno $\frac{2}{5}$ saopštenja „tačka" i $\frac{1}{3}$ saopštenja „crtica". Poznato je da je odnos predatih signala „tačka" i „crtica" 5 : 3. Naći verovatnoću da će biti primljen isti onaj signal koji je i predat.

4223. Neki pribor može da bude komponovan od visokokvalitetnih delova i od delova prosečnog kvaliteta. Ukupno oko 40% pribora komponovano je od visokokvalitetnih delova. Ako je pribor sastavljen od visokokvalitetnih delova, njegova pouzdanost u toku vremena t iznosi 0,95; ako je sastavljen iz delova prosečnog kvaliteta njegova pouzdanost iznosi 0,7. Pribor je u toku ispitivanja za vreme t ispravno fukcionisao. Kolika je verovatnoća da je on komponovan od visokokvalitetnih delova?

4224. Dva strelca nezavisno jedan od drugoga, gađaju jednu metu ispaljujući po jedan metak. Verovatnoća da će prvi strelac pogoditi iznosi 0,8 a drugi 0,4. Nakon izvedenog gađanja konstatovan je jedan pogodak u metu. Naći verovatnoću da je pogodio prvi strelac.

4225. Prilikom eksplozije granata se raspada na parčad od tri težinske kategorije: krupna, srednja i mala, pri čemu respektivno ta parčad čine 0,1, 0,3 i 0,6 od ukupnog broja parčadi. Prilikom udara u oklop krupno parče ga probija sa verovatnoćom 0,9, srednje sa verovatnoćom 0,2 i malo sa verovatnoćom 0,05. U momentu eksplozije na oklop je palo samo jedno parče i probilo ga. Naći verovatnoću da je oklop probijen krupnim, srednjim i malim parčetom.

4226. Date su dve partije proizvoda, pri čemu je poznato da u jednoj od njih svi proizvodi zadovoljavaju tehničke uslove, a u drugoj partiji $\frac{1}{4}$ artikala su neispravni. Artikal, uzet iz proizvoljne partije, je ispravan. Odrediti verovatnoću, da će drugi artikal uzet iz te iste partije biti neispravan, ako je prvi artikal nakon provere vraćen u partiju.

4227. Dato je deset jednakih kutija, od kojih se u devet nalaze po dve crne i po dve bele kuglice, a u jednoj pet belih i jedna crna. Iz kutije, uzete nasumice, izvučena je bela kuglica. Kolika je verovatnoća da je kuglica izvučena iz kutije koja sadrži pet belih kuglica?

4228. Dato je k_1 kutija a u svakoj od njih m_1 belih i n_1 crnih kuglica, i k_2 kutija koje sadrže po m_2 belih i n_2 crnih kuglica. Kuglica izvučena iz nasumice uzete kutije je bela. Kolika je verovatnoća da je kuglica uzeta iz prve grupe kutija?

4229. Odrediti verovatnoću, da među 1000 sijalica neće biti nijedna neispravna, ako je 100 sijalica uzetih nasumice ispravno. Pretpostavlja se da broj neispravnih sijalica od 1000 mogućih može biti svaki broj od 0 do 5 sa istom verovatnoćom.

4230. Radi dostavljanja signala koji treba da pokaže da režim rada automatske trake razboja odstupa od normalnog, koristi se indikator koji pripada sa verovatnoćama 0,2 0,3 i 0,5 jednom od tri tipa, koji pri nenormalnom uslovu fukcionisanja trake reagiju respektivno sa verovatnoćama 1, 0,75 i 0,4. Ako je od indikatora primljen signal ustanoviti kome tipu on najverovatnije pripada.

4231. Tri merna instrumenta imaju istu tačnost, koja se karakteriše srednjim odstupanjem E, međutim prvi instrumenat daje simetričnu grešku koja iznosi $-E$, drugi daje simetričnu grešku $+E$, a treći nema simetrične greške. Dva merenja etalona, izvedena nasumice uzetim instrumentom, dala su greške suprotnih znakova. Naći verovatnoću da je bio uzet prvi, drugi ili treći instrumenat.

4232. Tri lovca su istovremeno gađala vepra, koji je ubijen jednim kuršumom. Odrediti verovatnoću da je prvi, drugi, odnosno treći lovac ubio vepra ako su odgovarajuće verovatnoće pogodaka 0,2; 0,4; 0,6.

4233. Iz kutije u kojoj je bilo $m>3$ belih kuglica i n crnih izgubljena je jedna kuglica nepoznate boje. Da bi se odredio sastav kuglica u kutiji, iz nje su nasumice uzete dve kuglice. Naći verovatnoću da je izgubljena bela kuglica, ako je poznato da su izvučene kuglice bele boje.

4234. U kutiji se nalazi n kuglica, pri čemu su bela i crna boja kuglica jednako moguće. Uzastopno se izvlači k kuglica, tako da se svaki put izvučena kuglica vraća u kutiju. Kolika je verovatnoća, da kutija sadrži samo bele kuglice ako nije izvučena nijedna crna kuglica.

4235. U jednoj kutiji nalaze se 2 bele, 3 crvene i 20 crnih kuglica, a u drugoj 8 belih, 15 crvenih i 2 crne kuglice, Iz obadve kutije izvučena je po jedna kuglica, pri čemu je jedna izvučena kuglica crna a druga crvena. Pretpostavlja se da je pri tim izvlačenjima jednako moguć izbor kutije. Odrediti verovatnoću da je crvena kuglica izvučena iz prve kutije.

4236. Od dva blizanca jedan je dečak. Kolika je verovatnoća da je i drugi blizanac dečak, ako su uslovne verovatnoće da se rode dva dečaka odnosno dve devojčice respektivno a i b?

4237. Poznato je da je verovatnoća rađanja blizanaca istog pola dva puta veća nego blizanaca različitog pola. Verovatnoća da se rode dečaci iznosi 0,51, a devojčice 0,49. Pretpostavljajući da je jednako moguće da se rode blizanci različitog pola u proizvoljnom poretku, odrediti verovatnoću da i drugi blizanac bude dečak.

4238. Iz skupa od 20 studenata, pet njih zna 90% ispitnih pitanja iz svakog od tri dela kursa, 7 njih 70%, 4 studenta 60% i 4 njih 50%. Na ispitu jedan student iz tog skupa dao je tačan odgovor iz dva dela kursa a nije odgovorio na pitanje iz trećeg dela. Kolika je verovatnoća da je taj student znao 90, 70, 60 ili 50 programa?

4239. U nekoj školi ima n studenata, od kojih je n_k $(k=1, 2, 3)$ njih na k-oj godini. Između dva nasumice uzeta studenta pokazalo se da jedan od nih duže studira od drugog. Kolika je verovatnoća da je taj student na trećoj godini.

4240. Dobijena je partija od osam proizvoda istog tipa. Posle obavljene provere polovine partije pokazalo se da su tri proizvoda tehnički ispravna a jedan neispravan. Kolika je verovatnoća da će posle provere tri sledeća proizvoda jedan od njih biti ispravan a dva neispravna, ako je jednako moguće da u datoj partiji postoji proizvoljan broj neispravnih proizvoda?

4241. Verovatnoće jedinstveno mogućih i nespojivih hipoteza $A_1, A_2, \ldots, A_n$ o mogućnosti realizacije događaja β jednake su pre opita respektivno $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$; verovatnoće nastupanja događaja β, koje odgovaraju hipotezama, iznose $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Poznato je da je u n_i nezavisnih opita događaj β nastupio m_1 puta. Poznato je takođe da je u sledećoj seriji od n_2 opita događaj β nastupio m_2 puta. Dokazati sledeće svojstvo Bayesove formule: aposteriorne verovatnoće hipoteza, izračunate nakon druge serije opita uzimanjem u obzir verovatnoća tih hipoteza posle prve serije opita uvek su jednake verovatnoćama, izračunatim prosto za seriju n_1+m_2 opita, u kojima je događaj β nastupio m_1+m_2 puta.

4242. Koristeći teoriju verovatnoće dokazati sledeće identitete:

$$1^\circ\ 1+\frac{N-m}{N-1}+\frac{(N-m)(N-m-1)}{(N-1)(N-2)}+\cdots+\frac{(N-m)\cdots 2\cdot 1}{(N-1)\cdots(m+1)^m}=\frac{N}{m};$$

$$2^\circ\ 1+\frac{N-m}{N}\cdot\frac{m+1}{m}+\frac{(N-m)(N-m-1)}{N^2}\cdot\frac{m+2}{m}+\cdots+$$

$$+\frac{(N-m)\cdots 2\cdot 1}{N^N}\cdot\frac{N}{m}=\frac{N}{m};$$

$$3^\circ\ 1+\frac{N-m}{N+1}\cdot\frac{m+1}{m}+\frac{(N-m)^2}{(N+1)(N+2)}\cdot\frac{m+2}{m}+$$

$$+\frac{(N-m)^3}{(N+1)(N+2)(N+3)}\cdot\frac{m+3}{m}+\cdots=\frac{N}{m}\cdot(N>m>1).$$

4243. Dva igrača A i B produžavaju neku igru do potpunog poraza jednog ili drugog. Kapital prvog igrača je a, a drugog b. Verovatnoća da će igrač B dobiti svaku partiju iznosi p, a da će dobiti drugi q; $p+q=1$ (ne dolazi u obzir nerešen rezultat). U svakoj partiji dobitak jednog igrača, odnosno gubitak drugog, iznosi jednu novčanu jedinicu. Naći verovatnoću poraza svakog od igrača. Rezultati različitih partija su nezavisni.

4244. Dva igrača A i B, čiji je kapital respektivno a i b, igraju hazardnu igru, koja se sastoji iz odvojenih partija. Svaka partija završava se pobedom prvog igrača sa verovatnoćom $\frac{1}{2}$, a pobedom drugog takođe sa verovatnoćom $\frac{1}{2}$. Nakon svake partije, onaj koji izgubi, isplaćuje predviđenu sumu novca drugom igraču. Igra se produžava do potpunog poraza jednog od igrača. Naći verovatnoću da će biti poražen drugi igrač.

4245. Ako se pri bacanju kocke jave uzastopice tri jedinice tek posle B bacanja onda se to smatra kao događaj A. Odrediti broj B tako da verovatnoća događaja A bude približno $\frac{1}{2}$.

4246. Naći verovatnoću da razboj koji radi u trenutku t_0 neće stati do momenta t_0+t, ako je poznato da je: 1° verovatnoća zavisna samo od dužine vremenskog intervala (t_0, t_0+t), 2° verovatnoća da će razboj stati u toku vremenskog intervala Δt, proporcionalna je sa Δt, sa tačnošću do beskonačno malih višeg reda u odnosu na Δt, 3° događaji koji znače prestanak funkcionisanja razboja u diskretnim vremenskim intervalima, nezavisni su jedan od drugoga.

4247. Pri sastavljanju tablica smrtnosti često se polazi od sledećih pretpostavki: 1° verovatnoća da će neko lice umreti u toku vremena t do $t+\Delta t$ iznosi

$$p(t, t+\Delta t)=a(t)\Delta t+0(\Delta t),$$

gde je $a(t)$ pozitivna neprekidna funkcija;

2° smatra se da će neko lice umreti ili preživeti neki vremenski interval (t_1, t_2) nezavisno od toga šta se desilo do momenta t_1;

3° verovatnoća smrti u momentu rađanja je nula.

Polazeći od iskazanih pretpostavki, naći verovatnoću da će lice A umreti kad dostigne starost t.

4248. Verovatnoća, da će neki molekul, koji je imao sudar sa nekim molekulom u momentu $t=0$, a pre toga nije imao nikakvih sudara, imati sudar u intervalu od t do $t+\Delta t$ iznosi $\lambda\Delta t+0(\Delta t)$. Naći verovatnoću, da vreme slobodnog pomeranja, tj. vreme između dva uzastopna sudara, neće biti veće od t.

4249. Smatra se da je pri razmnožavanju bakterija deljenjem (na dve bakterije) verovatnoća, da se bakterija razdeli u vremenskom intervalu Δt, jednaka $a\Delta t+0(\Delta t)$ i da ne zavisi od broja bakterija i od broja prethodnih deljenja. Pretpostavlja se još da svaka bakterija, nezavisno od svoje predistorije i ukupnog broja bakterija, može uginuti sa verovatnoćom $b\Delta t+0(\Delta t)$. Sastaviti diferencijalnu jednačinu, koju zadovoljava verovatnoća $p_r(t)$ da će u momentu t postojati r bakterija.

4250. U savremenoj fizici jezgra za merenje intenziteta zračenja čestica koristi se Gajger-Mjulerov brojač. Prilikom pada čestice na brojač, nastaje pražnjenje, koje traje neko vreme τ, u toku koga brojač ne registruje čestice koje padnu na njega. Odrediti verovatnoću da će brojač registrovati sve čestice koje padnu na njega za vreme t, ako su ispunjeni sledeći uslovi:

1° verovatnoća da će sa vreme t pasti na brojač k čestica ne zavisi od toga koliko je čestica palo na brojač do početka toga intervala;

2° verovatnoća da je u vremenskom intervalu t_0 do t_0+t palo na brojač k čestica zadaje se formulom

$$p_k(t_0, t_0+t)=\frac{(at)^k e^{-at}}{k!}$$

gde je a pozitivna konstanta;

3° τ je konstantna vrednost.

§ 4. Izračunavanje verovatnoće pojave događaja pri ponavljanju nezavisnih opita

1° Pretpostavlja se da se u svakom od n nezavisnih ponavljanja opita može desiti događaj A. Neka μ znači stvarni broj pojavljivanja događaja A u toj seriji opita. Tada odnos $\frac{\mu}{n}$ nazivamo *učestanost* događaja A u seriji od n nezavisnih opita.

Neka je verovatnoća događaja A u svakom opitu p; $q=1-p$; a m broj svih mogućih pojavljivanja događaja A u toj seriji (do realizacije opita). Verovatnoća $P_n(m)$, da će se događaj A desiti tačno m puta u datoj seriji od n opita, iznosi

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Niz brojeva $P_n(m)$, $m=0, 1, 2, \ldots, n$ naziva se *binomni zakon raspodele verovatnoće.*

Broj od n opita, koje je nužno izvesti, da bi bilo moguće utvrditi sa verovatnoćom koja nije manja od P, da će se dati događaji desiti bar jedanput, nalazi se po formuli

$$n>\frac{\log(1-P)}{\log(1-p)},$$

gde je p verovatnoća pojavljivanja tog događaja u svakom opitu.

Ako je $np-q$ ceo broj, onda će $P_n(m)$ imat i najveću vrednost za $m=m_0=np-q$ i $m=m_0+1=p(n+1)$. Ako $np-q$ nije ceo broj, onda je $P_n(m)$ najveće za

$$m=m_0=[(n+1)p], \quad \sum_{m=0}^{n} P_n(m)=1$$

Verovatnoća $P_n(m)$ jednaka je koeficijentu uz x^m u razvoju po stepenima od x *funkcije generatrise*

$$\varphi_n(x)=\prod_{i=1}^{n}(q_i+p_ix), \text{ gde je } q_i=1-p_i.$$

Pretpostavimo da svi rezultati jednog ispitivanja $A_1, \ldots, A_k$ obrazuju potpunu grupu događaja $\left(P(A_i)=p_i; \sum_{i=1}^{k} p_i=1\right)$, i obeležimo sa $P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k$ verovatnoću da će se događaji $A_1, \ldots, A_k$ pojaviti respektivno $m_1, \ldots, m_k$ puta, u seriji od n nezavisnih ponavljanja datog opita. Tada je

$$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k)=\frac{n!}{m_1!\, m_2! \ldots m_k!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_k^{m_k}, \quad (m_1+\cdots+m_k=n).$$

Brojevi $P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k)$, pri čemu je $m_i\geq 0$ $(i=1, 2, \ldots, k)$, i $m_1+m_2+ +\cdots+m_k=n$, obrazuju *polinomijalnu raspodelu verovatnoće.*

Verovatnoća $P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ može da se dobije kao koeficijent uz $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_k^{m_k}$ u funkciji generatrisi $\varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_k)=(p_1 x_1+p_2 x_2+ +\cdots+p_k x_k)^n$.

2° Lokalna Moivre-Laplaceova teorema. Neka je data serija od n nezavisnih opita, i neka je $x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$; $0<p<1$, $q=1-p$. Ako veličina x ostane ograničena kada $n\to\infty$ i $m\to\infty$, onda je

$$P_n(m)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$$

gde znak $\sim$ označava da odnos leve i desne strane te „jednakosti" teži jedinici kada $n\to\infty$.

3° Integralna Moivre-Laplaceova teorema.

$$P\left\{a<\frac{m-np}{\sqrt{npq}}<b\right\}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx \text{ kada } n\to\infty, \text{ uniformno u odnosu na } a \text{ i}$$

$b\ (-\infty\leq a,\ b\leq\infty)$.

4° Poissonova teorema. Neka je $0<a<b<\infty$, $a_n=np$. Ako $p\to 0$ kada $n\to\infty$, i ako je $a<a_n<b$, onda je

$$P_n(m)\sim\frac{a_n^m}{m!}e^{-a_n}.$$

Specijalno ako $a_n\to a\ (0<a<\infty)$ kada $n\to\infty$, onda je

$$P_n(m)\sim\frac{a^m}{m!}e^{-a}.$$

Stavimo

$$P(m)=\frac{a^m}{m!}e^{-a},\quad \sum_{m=0}^{\infty}p(m)=1.$$

Niz brojeva $p(m)$ za $m=0, 1, 2, \ldots$ obrazuju *Poissonov zakon raspodele verovatnoće.*

4251. Izvedena su četiri gađanja na jedan isti cilj sa različitih rastojanja. Verovatnoće da se pri tome pogodi meta iznose respektivno $p_1=0{,}1$; $p_2=0{,}2$; $p_3=0{,}3$; $p_4=0{,}4$. Naći verovatnoće nijednog, jednog, dva, tri i četiri pogotka: $P_{0,4}$; $P_{1,4}$; $P_{2,4}$; $P_{3,4}$; $P_{4,4}$.

4252. Novac se baca pet puta. Naći verovatnoću da će se grb pojaviti jedanput.

4253. Izvršena su četiri nezavisna gađanja pod istim uslovima, pri čemu je verovatnoća pogotka aritmetička sredina verovatnoća iz zad. 4251:

$$p=\frac{1}{4}(p_1+p_2+p_3+p_4)=0{,}25.$$

Naći verovatnoće

$$P_{0,4};\ P_{1,4};\ P_{2,4};\ P_{3,4};\ P_{4,4}.$$

4254. Izračunati verovatnoću svih mogućih pojavljivanja grba ako se novčić baca pet puta. Konstruisati grafik odgovarajuće binomne raspodele verovatnoće.

4255. Izvedeno je pet nezavisnih gađanja na cilj čije su verovatnoće pogotka 0,2. Da bi cilj bio uništen dovoljna su tri pogotka. Naći verovatnoću da će cilj biti uništen.

4256. Kocka se baca pet puta. Naći verovatnoću da će se dva puta pojaviti broj koji se može skratiti sa tri.

4257. Vrši se deset nezavisnih gađanja cilja takvih da je verovatnoća pogotka pri jednom gađanju 0,1. Da bi cilj bio uništen dovoljan je jedan pogodak. Naći verovatnoću da će cilj biti uništen.

4258. Na neki cilj bacaju se pojedinačno šest bombi. Verovatnoća pogađanja cilja jednom bombom iznosi $p=0{,}3$. Naći verovatnoću da će cilj pogoditi četiri bombe.

4259. Vrši se osam nezavisnih gađanja rezervoara za gorivo, pri čemu prvi pogodak izaziva prosipanje goriva a drugi ga upaljuje. Verovatnoća da će cilj biti pogođen iznosi za svako gađanje 0,2. Naći verovatnoću da će rezervoar biti upaljen.

4260. Pretpostavljajući da su sve kombinacije polova dece jednako moguće, odrediti koliki približan deo familija sa šestoro dece čine familije sa tri dečaka i tri devojčice.

4261. Avion ispaljuje na drugi avion četiri nezavisna plotuna. Verovatnoća pogotka pri svakom plotunu iznosi 0,3. Da bi avion bio uništen dovoljna su dva pogotka; pri jednom pogotku avion će biti uništen sa verovatnoćom 0,6. Naći verovatnoću da će avion biti uništen.

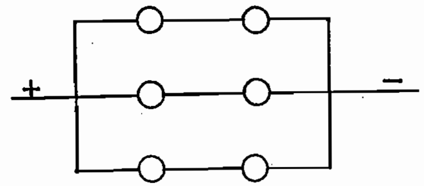
4262. Prilikom podele špila od 52 karte na četiri igrača jedan od njih tri puta uzastopce ne dobija ni jednog asa. Ima li taj igrač razloga da se žali zbog „baksuzluka"?

4263. Jedna partija proizvoda sadrži 5% neispravnih komada. Naći verovatnoću da među pet nasumice uzetih primeraka 1° neće biti nijedan neispravan; 2° da će biti neispravna dva komada.

4264. Koliko je potrebno uzeti slučajnih cifara da verovatnoća pojave među njima cifre 5 ne bude manja od 0,9?

4265. Šta je verovatnije dobiti uz pretpostavku da je protivnik jednako jak: 1° tri partije od četiri ili pet od osam; 2° najmanje tri partije od četiri ili najmanje pet partija od osam; 3° najviše n od $2n$ partija ili više od n iz istog broja partija; 4° najviše n od $2n+1$ partija ili više od n iz istog broja partija.

4266. Dato je šest potrošača električne struje, takvih da je verovatnoća havarisanja prvog od njih, pri određenim uslovima koji dovode do njegovog isključivanja, jednaka 0,6, drugoga 0,2, a četiri ostala 0,3. Odrediti verovatnoću da generator struje bude potpuno isključen: 1° ako su svi potrošači vezani serijski; 2° ako su vezani tako kako je pokazano na sl. 37.



Sl. 37

4267. Partija proizvoda sadrži jedan procenat škarta. Koliki mora biti opseg slučajnog izvlačenja pa da se među izvučenim proizvodima pojavi jedan neispravan primerak sa verovatnoćom koja nije manja od 0,95?

4268. U nekoj sredini nalazi se 1% daltonista. Koliki mora biti obim slučajnog izbora (sa vraćanjem), da bi se među izabranima nalazio bar jedan daltonista sa verovatnoćom koja nije manja od 0,95?

4269. Trgovina na veliko snabdeva deset magazina, tako da svaki od njih može dostaviti trebovanje dotičnog dana sa verovatnoćom 0,4, nezavisno od potražnje drugih magazina. Naći najverovatniji broj zahteva u toku dana i verovatnoću da se dobije toliki broj poziva.

4270. U nekoj porodici ima desetoro dece. Pretpostavljajući da je verovatnoća rađanja dečaka i devojčica jednaka, odrediti verovatnoću: 1° da u toj porodici ima pet dečaka; 2° da ima najmanje tri, a najviše osam dečaka.

4271. U nekoj biblioteci nalaze se samo tehničke i matematičke knjige. Verovatnoća da će neki čitalac uzeti tehničku knjigu iznosi 0,7, a matematičku 0,3. Naći verovatnoću da će pet čitalaca jedan iza drugoga uzeti samo tehničke ili samo matematičke knjige, uz pretpostavku da svaki od njih uzima samo po jednu knjigu.

4272. Odrediti verovatnoću da će se desiti događaj A u toku tri nezavisna opita, ako verovatnoća pojave događaja A u jednom opitu iznosi p.

4273. Izvode se četiri nezavisna opita tako da se u svakom od njih može pojaviti događaj A sa verovatnoćom 0,3. Događaj B nastupa sa verovatnoćom 1 ako se događaj A desi najmanje dva puta; ne može da nastupi ako se događaj A ne desi, a nastup sa verovatnoćom 0,6 ako se događaj A desio samo jedanput. Odrediti verovatnoću nastupanja događaja B.

4274. Meč između dva šahista odvija se po sledećim pravilima: 1° računaju se samo rešene partije; 2° pobednik je onaj koji prvi skupi četiri poena, pod uslovom da protivnik nema više od dva poena; 3° ako oba igrača imaju po tri poena onda dobija onaj koji prvi skupi pet poena. Odrediti verovatnoću dobijanja meča jednog i drugog igrača ako se njihove verovatnoće da će dobiti u svakoj partiji odnose kao 3 : 2.

4275. Verovatnoća nastupanja nekog događaja u svakom od osamnaest nezavisnih opita iznosi 0,2. Odrediti verovatnoću da će se taj događaj desiti bar tri puta.

4276. Punkt A je vezan za deset punktova B. Svaki od punktova B zauzima liniju 12 minuta u satu . Pozivi proizvoljna dva punkta iz skupa B su nezavisni. Odrediti minimalan broj kanala da bi u svakom momentu svi punktovi iz skupa B bili usluženi sa verovatnoćom 0,99.

4277. Koliko je potrebno uzeti brojeva iz tablice slučajnih brojeva, da se sa najvećom verovatnoćom obezbedimo da među njima budu tri broja koji se završavaju cifrom 7?

4278. Svaki košarkaš u toku nekog meča postiže koš sa verovatnoćom 0,4. Ako je poznato da je dato 10 koševa, naći najverovatniji broj pogodaka i odgovarajuću verovatnoću.

4279. Naći najverovatniji broj pozitivnih i negativnih odstupanja i odgovarajuće verovatnoće za četiri merenja, ako se u svakom merenju pozitivna greška javlja sa verovatnoćom $\frac{2}{3}$, a negativna sa verovatnoćom $\frac{1}{3}$.

4280. Problem John Smitha. John Smith je 1693. g. postavio sledeći problem: da li tri igrača imaju iste šanse ako jedan od njih u šest bacanja kocke treba da dobije bar jednu šesticu, drugi najmanje dve šestice u dvanaest bacanja, treći najmanje tri šestice u osamnaest bacanja. Problem su rešili Newton i Tollet i pokazali su da prvi igrač ima veće šanse od drugoga a drugi od trećega. Dokazati to tvrđenje.

4281. Da bi se doznalo koliko ima riba u jezeru ulovljeno je 1000 riba koje su markirane i ponovo vraćene u jezero. Koliko najverovatnije ima riba u jezeru ako je između 150 ponovo uhvaćenih riba bilo 10 markiranih?

4282. Pretpostavimo da telo ima s strana ($s \geqslant 2$), i da prilikom bacanja može sa istom verovatnoćom pasti na svaku od tih strana. Obeležimo sa $g(t, n)$ verovatnoću da će u t bacanja telo pasti na fiksiranu stranu manje od n puta. Dokazati:

1° $g(sn, n)$ opada kada s raste, za fiksirano n;

2° $g(sn, n) < \frac{1}{2}$;

3° $g(2n, n) \to \frac{1}{2}$ kada $n \to \infty$.

4283. Na duž AB dužine a bačene su nasumice, nezavisno jedna od druge, pet tačaka. Verovatnoća da tačka padne na koji bilo deo duži zavisi samo od njegove dužine i proporcionalna je toj dužini. Naći verovatnoću:

1° da će dve tačke biti udaljene manje od b od tačke A, a tri na rastojanju većem od b;

2° da će dve tačke biti udaljene manje od a od tačke A, jedna na rastojanju $a<r<b$, a tri tačke na rastojanju većem od b.

4284. Verovatnoće da je prečnik nekog dela mašine manji od dopuštenog, veći od dopuštenog i u dopuštenim granicama, iznose respektivno 0,05; 0,10 i 0,85. Iz ukupne partije tih delova uzima se nasumice 100 komada. Odrediti verovatnoću da će među njima biti po pet komada sa manjim i većim poluprečnikom.

4285. U svakom opitu verovatnoća nastupanja događaja iznosi p. Kolika je verovatnoća da će događaj nastupiti paran broj puta u n opita?

4286. Odrediti verovatnoću da će se dobiti srećka kod koje su zbirovi tri prve i tri zadnje cifre jednaki, ako su svi brojevi srećaka šestocifreni i pripadaju skupu brojeva od 000 000 do 999 999.

4287. U kutiji se nalaze tri kuglice: crna, crvena i bela. Iz kutije se izvlači, jedna po jedna, pet kuglica, pri čemu se svaki put izvučena kuglica vraća u kutiju. Naći verovatnoću da crna i bela kuglica budu izvučene bar po dva puta.

4288. Svaka od 9 kuglica može se sa jednakom verovatnoćom staviti u jednu od tri prazne kutije. Odrediti verovatnoću: 1° da će u svaku kutiju biti stavljene po 3 kuglice; 2° da su u jednu kutiju stavljene 4 kuglice, u drugu 3, a u preostalu 2 kuglice.

4289. Meta koja se sastoji od unutrašnjeg kruga i dva koncentrična prstena, gađa se 10 puta iz sportskog pištolja. Verovatnoće da budu pogođene navedene oblasti, u svakom gađanju, iznose respektivno 0,15; 0,22 i 0,13. Odrediti verovatnoću da će krug biti pogođen 6 puta, prvi prsten 3 puta i drugi prsten jedanput.

4290. Kutija sadrži l belih, m crnih i n crvenih kuglica. Izvedeno je $l_1+m_1+n_1$ izvlačenja kuglica, jedna po jedna, pri čemu se svaki put izvučena kuglica vraća u kutiju. Odrediti verovatnoću da će biti izvučeno: 1° na početku l_1 belih, zatim m_1 crnih i na kraju n_1 crvenih kuglica; 2° l_1 belih, m_1 crnih i n_1 crvenih kuglica, tako da su sve kuglice iste boje izvučene jedna iza druge pri čemu red boja može biti proizvoljan; 3° l_1 belih, m_1 crnih i n_1 crvenih kuglica, u proizvoljnom poretku.

4291. Odrediti verovatnoću da će se u n bacanja novčića grb pojaviti neparan broj puta.

4292. Dva jednako jaka protivnika igraju šah sve dotle dok jedan ne bude imao dve partije više od drugoga pri čemu se nerešene partije ne računaju. Kolika je verovatnoća da će biti igrano $2n$ partija?

4293. Dva igrača nastavljaju igru do potpunog poraza jednog od njih. Kapital prvog igrača iznosi n dinara, a drugog m dinara. Igrači dobijaju svaku od partija respektivno sa verovatnoćama p i q $(p+q=1)$. U svakoj partiji dobitak jednog igrača, odnosno gubitak drugog, iznosi jedan dinar. Odrediti verovatnoću da će oba igrača biti poražena.

4294. Odsečak AB podeljen je na $n+m$ jednakih delova. Tačka C može prelaziti sa jedne podeone tačke na susednu i to u pravcu tačke B sa verovatnoćom p, a u pravcu tačke A sa verovatnoćom $q=1-p$. Kada tačka C dospe u položaj tačke A ili B prestaje da se kreće dalje. Odrediti verovatnoću da će tačka C dospeti u tačku B, ako se početni položaj tačke C poklapao sa n-om tačkom podele duži.

4295. Na šahovskom turniru igraju $n+1$ jednako jaka igrača, pri čemu svaki od njih igra sa pobednikom iz prethodne partije. Igra se nastavlja sve

dotle dok jedan od igrača ne dobije redom svih n protivnika. Kolika je verovatnoća da će biti odigrano m različitih partija, pri čemu nerešeni rezultati ne dolaze u obzir?

4296. Meč između dva podjednako jaka šahista odvija se po sledećim pravilima: 1° računaju se samo dobijene partije; 2° pobednik je onaj koji prvi skupi šest poena, ako njegov protivnik nije skupio više od 4 poena; 3° ako jedan ima 6 a drugi 5 dobijenih partija, onda se igra nastavlja sve dotle dok se ne pojavi razlika od 2 poena. Odrediti verovatnoću da će: 1° biti odigrano najviše 10 partija; 2° tačno n partija.

4297. Verovatnoća pojavljivanja događaja u n opita je jednaka i iznosi p. Dokazati da funkcija generatrisa verovatnoće nastupanja događaja najmanje $n-m$ puta u n nezavisnih opita ima oblik

$$\varphi(x)=\frac{(p+qx)^n}{1-x}.$$

4298. Verovatnoća da se desi događaj u k-om opitu iznosi p_k $(k=1, 2, \ldots, n)$. Pokazati da funkcije generatrise verovatnoća, da će se događaj desiti najviše m i najmanje $n-m$ puta u n nezavisnih opita, imaju oblik

$$\varphi_1(x)=\frac{\prod_{k=1}^{n}(q_k+p_k x)}{1-x} \quad \text{i} \quad \varphi_2(x)=\frac{\prod_{k=1}^{n}(p_k+q_k x)}{1-x}.$$

4299. Da bi neko pobedio u meču za naziv šampiona sveta u šahu potrebno mu je $12\frac{1}{2}$ poena od 24 mogućih. Ako se desi da je ishod nerešen (12:12) zvanje šampiona zadržava onaj koji je dotle bio šampion. Pretpostavimo da su se na takvom meču srela dva protivnika iste snage, i da oba takmičara dobijaju svaku od partija sa verovatnoćom koja je dva puta veća nego nerešen rezultat. Odrediti: 1° verovatnoću da će šampion sveta i dalje ostati dotadašnji šampion; 2° verovatnoću da će biti odigrano 20 partija u meču.

4300. Odrediti verovatnoću da će pri bacanju n kocki broj poena biti: 1° jednak datom broju m; 2° najviše m. Naći te verovatnoće za $n=10$ i $m=20$.

4301. Odrediti verovatnoću da će se dobiti srećka kod koje zbir cifara broja srećke iznosi 21, ako su jednako mogući svi brojevi srećaka od 0 do 999 999.

4302. Bacaju se dva metalna novčića. Odrediti verovatnoću da će se grb pojaviti isti broj puta u n bacanja, ali ne i ranije.

4303. Na nekom fakultetu ima 730 studenata. Verovatnoća da je neki student rođen u datom danu iznosi $\frac{1}{365}$. Naći najverovatniji broj studenata koji su rođeni prvog januara, i verovatnoću da će postojati tri studenta koji su rođeni istog datuma.

4304. Radnik poslužuje 12 istotipnih razboja. Verovatnoća da će razboju biti potrebna intervencija radnika u toku vremena τ iznosi $\frac{1}{3}$. Naći verovatnoću da će za 4 razboja biti potrebna intervencija radnika u toku vremena τ.

4305. U zadatku 4270 primeniti integralnu Moivre-Laplaceovu teoremu.

4306. Pri prijemu partije od 1000 proizvoda uzima se na kontrolu 50 komada bez vraćanja. Naći verovatnoću da među uzetim proizvodima neće biti nijedan neispravan ako je poznato da cela partija sadrži 4 neispravna proizvoda. Uporediti tačnu vrednost te verovatnoće sa približnom, nađenom pomoću Poissonove formule.

4307. Poznato je da levorukih ima 1%. Kolika je verovatnoća da će među 200 ljudi biti: 1° tačno četiri levaka; 2° bar četiri levaka.

4308. Verovatnoća da će biti izrađen svrdao čija je lomljivost iznad normalne iznosi 0,02. U kutije se pakuje po 100 komada svrdlova. Naći verovatnoću: 1° da u kutiji neće biti neispravnih svrdlova; 2° da će ih biti najviše 3; 3° koliko je potrebno staviti svrdlova u kutiju da bi sa verovatnoćom 0,9 u njoj bilo najmanje 100 ispravnih.

4309. Telefonska stanica uslužuje N korisnika koji se koriste stanicom podjednako često i u toku jednog sata obavlja se n razgovora u prosečnom trajanju svakog od njih $\frac{1}{40}$ časa. Naći verovatnoću da će istovremeno voditi razgovor m korisnika. Naći graničnu raspodelu verovatnoće istovremenog razgovora tačno m korisnika, kada njihov broj $N \to \infty$. Primeri: 1° $n=120$. Naći verovatnoću da će istovremeno razgovarati najviše 7 korisnika. 2° $n=600$. Naći verovatnoću da će istovremeno razgovarati 1) najmanje tri korisnika; 2) najmanje 30 korisnika.

4310. Automatska telefonska centrala uslužuje N korisnika i svakom od njih može staviti na raspolaganje proizvoljnu od l linija ($l<N$), ako je slobodna. Svi korisnici podjednako često koriste telefon i svaki razgovor prosečno traje $\frac{1}{40}$ deo časa. Ako je jedan od korisnika nazvao centralu, kolika je verovatnoća da će sve linije biti zauzete? Naći asimptotsku formulu verovatnoće da korisnik neće moći dobiti vezu ako se ukupan broj korisnika povećava ($N \to \infty$, n je konstanta.) Primeri: 1° $n=120$, $t=\frac{1}{40}$, $l=10$. Naći verovatnoću da poziv neće uspeti. 2° Naći minimalan broj linija potrebnih da se obavi prosečno $n=240$ razgovora u toku jednog sata $\left(\text{za } t=\frac{1}{40}\right)$, da verovatnoća neuspeha poziva ne prelazi 1) 0,005; 2) 0,001; 3) 0,01. 3° Koliki je minimalan broj korisnika koje može uslužiti grupa od 10 linija, ako svaki korisnik poziva centralu prosečno tri puta u toku jednog sata, uz prosečno trajanje razgovora 1,5 minuta, i ako verovatnoća da poziv neće uspeti ne prelazi 0,001?

4311. Naći asimptotski izraz za verovatnoću da se događaj desi m puta u toku n nezavisnih opita, pri čemu verovatnoća toga događaja u svakom opitu iznosi $\frac{a}{\varphi(n)}$, gde je a konstanta a $\varphi(n)$ funkcija koja neograničeno raste kada $n \to \infty$ i zadovoljava graničnu relaciju $\frac{\varphi(n)}{n} \to c$. Ispitati slučajeve 1° $c=\infty$; 2° c je pozitivna konstanta; 3° $c=0$.

4312. Kod osiguravajućeg zavoda osigurano je 10000 lica istog uzrasta i iste socijalne grupacije. Verovatnoća da će umreti u toku godine iznosi za svako lice 0,006. Svaki osiguranik uplaćuje prvog januara 12 dinara za osiguranje, a u slučaju smrti njegova rodbina dobija od zavoda 1000 dinara. Naći verovatnoću: 1° da će zavod imati gubitak; 2° da će imati dobit najmanje 40000, 60000, 80000 dinara.

4313. Poznato je da verovatnoća nekog događaja u svakom od n opita iznosi p. Naći verovatnoću da će: 1° učestanost nastupanja događaja za $n=1500$ odstupiti od $p=0{,}4$ na jednu ili na drugu stranu manje od 0,02; 2° broj pojavljivanja biti između 1) 570 i 630, 2) 600 i 660, 3) 620 i 680, 4) 580 i 640. 3° U kojim granicama se nalazi ta učestanost događaja za $n=1200$, čija verovatnoća odstupanja od $p=\frac{2}{3}$ iznosi 0,985? 4° Koliko je neophodno izvesti opita, pa da verovatnoća da će odstupanje učestanosti od $p=\frac{3}{8}$ na jednu ili drugu stranu biti manje od 0,01, iznosi 0,995?

4314. U vodu (rezervoar) je pušteno 100 markiranih riba. Uskoro nakon toga, iz vode je ulovljeno 400 riba među kojima je bilo 5 markiranih. Odrediti ukupan broj riba u tom rezervoaru sa verovatnoćama: 1° 0,9; 2° 0,6.

4315. Obeležavajući sa $P_{i,n}$ verovatnoću da će se događaj A pojaviti i puta u n nezavisnih opita, ako su verovatnoće događaja A uzastopno $p_1, p_2, \ldots, p_n$, dokazati nejednakosti $\frac{P_{1,n}}{P_{0,n}} > \frac{P_{2,n}}{P_{1,n}} > \cdots > \frac{P_{n,n}}{P_{n-1,n}}$.

Primer: $p_1=\frac{1}{2}$, $p_2=\frac{1}{3}$, $p_3=\frac{1}{4}$, $p_4=\frac{1}{5}$, $p_5=\frac{1}{6}$.

§ 5. Slučajne veličine i njihove karakteristike

Aksiomatski prilaz. Neka je dat prostor elementarnih događaja $\Omega=\{\omega\}$ i borelovsko telo skupa $B=\{A\}$, konstruisano na Ω. Neka je dalje na B zadata raspodela verovatnoća, tj. neka je definisana takva nenegativna potpuno aditivna funkcija $P(A)$, da je $P(\Omega)=1$. Tada sve elemente iz B nazivamo *P-izmerljivi podskupovi* skupa Ω.

Slučajna veličina naziva se pozitivna P-izmerljiva funkcija definisana na B: $\xi=f(A)$. To znači da za proizvoljno realno x skup $A_x=\{\omega\}_x$, za koji je $f(A_x)<x$, ima određenu verovatnoću $P(\xi<x)=P(A_x)=F(x)$. Funkcija $F(x)$ naziva se *funkcija raspodele verovatnoće* slučajne veličine ξ.

Elementarni prilaz. 1° Neka veličina ξ, zavisno od slučaja uzima jednu od n mogućih vrednosti $a_1, a_2, \dots, a_n$ respektivno sa verovatnoćama $p_1, p_2, \dots, p_n$; $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Tada se ξ naziva *diskretna slučajna veličina sa konačnim skupom mogućih vrednosti.*

2° Ako je diskretna slučajna veličina ξ definisana na prebrojivom skupu

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\ ;\ p(\xi = a_i) = p_i;\ \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1,$$

onda se takva slučajna veličina naziva diskretna slučajna veličina sa prebrojivim skupom mogućih vrednosti.

3° Postoje slučajne veličine koje su definisane na neprebrojivom skupu mogućih vrednosti. Takve, a takođe i diskretne slučajne veličine, zadaju se pomoću *funkcije raspodele* $F(x)$:

$$F(x) = P(\xi < x).$$

Na taj način slučajna veličina je takva veličina koja se menja u zavisnosti od slučaja i za koju je definisana funkcija raspodele.

Funkcija raspodele svake slučajne veličine ima sledeća svojstva:

$$0 \leqslant F(x) \leqslant 1, \quad (-\infty \leqslant x \leqslant \infty),\ F(-\infty) = 0,\ F(\infty) = 1;$$

$F(x)$ je monotono rastuća na celoj realnoj osi, neprekidna sleva u svakoj tački i ima najviše prebrojivo mnogo prekida prvoga reda. Svaka funkcija sa takvim svojstvima je funkcija raspodele neke slučajne veličine. $P(a \leqslant \xi < b) = F(b) - F(a)$ za proizvoljno a i b.

Ako skoro svuda postoji

$$f(x) = F'(x),\ f(x) \geqslant 0,\ F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz,$$

onda se $f(x)$ naziva *gustina raspodele verovatnoće* veličine ξ ili *verovatnosna funkcija* te veličine, dok se veličina ξ i njen zakon raspodele nazivaju neprekidni. U tom slučaju je

$$P(a \leqslant \xi < b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx;\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

U opštem slučaju veličina ξ nije ni diskretna ni neprekidna. Tada je

$$P(a \leqslant \xi < b) = \int_{a}^{b} dF(x)$$

gde se integral uzima u Stieltjesovom smislu.

Uzmimo da se istovremeno razmatra n slučajnih veličina $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. One obrazuju *n-dimenzionu slučajnu veličinu* ili *n-dimenzioni slučajni vektor* (ili slučajnu tačku u n-dimenzionalnom prostoru), ako je zadata n-dimenziona funkcija raspodele

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n).$$

Ako je $x_k = -\infty$ a x_i proizvoljno $(i \neq k)$, onda je

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n);\ F(\infty, \infty, \dots, \infty) = 1.$$

Funkcija $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ monotono raste i neprekidna je sleva po svim argumentima i ima najviše prebrojivo mnogo prekida prvoga reda. Ako je G proizvoljni izmerljiv skup n-dimenzionalnog prostora, onda je

$$p\{(\xi_1, \dots, \xi_n) \in G\} = \int \cdots \int_G dF(x_1, \dots, x_n) \geqslant 0,$$

gde je na desnoj strani jednakosti n-tostruki Lebesgue-Stieltjesov integral. Ako skoro svuda postoji

$$\frac{\partial^n F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1, \dots, \partial x_n} = f(x_1, \dots, x_n) \geqslant 0,$$

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, \dots, u_n)\,du_1, \dots, du_n,$$

onda se $f(x_1, \dots, x_n)$ naziva *n-dimenziona gustina vektora* $(\xi_1, \dots, \xi_n)$. Njena svojstva su:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n)\,dx_1, \dots, dx_n = 1;$$

$$P\{(\xi_1, \dots, \xi_n) \in 0\} = \int \cdots \int_G f(x_1, \dots, x_n)\,dx_1, \dots, dx_n;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots x_n)\,dx_{i_1} \dots dx_{i_k} = f_{j_1, \dots, j_{n-k}}(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-k}}),$$

gde su svi indeksi j_ν različiti od $i_1, \dots, i_k$, a $f_{j_1}, \dots, {}_{j_{n-k}}(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-k}})$ je gustina vektora $(\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_{n-k}})$. Ako je u celom n-dimenzionalnom prostoru $F(x_1, x_2, \dots x_n) = F_1(x_1) \cdot F_2(x_2) \cdots F_n(x_n)$, gde je $f_i(x_i)$ funkcija raspodele, onda se komponente vektora $\xi_1, \dots, \xi_n$ nazivaju nezavisne slučajne veličine. U slučaju kada postoji gustina nezavisnih slučajnih veličina onda je

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1), f_2(x_2) \dots f_n(x_n)$$

u celom prostoru, pri čemu je $f_i(x_i)$ gustina veličine ξ_i (i obrnuto).

Matematičko očekivanje (ili *srednja vrednost*) slučajne veličine u opštem slučaju naziva se broj $M\xi = \bar{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dF(x)$ ako ovaj Stieltjesov integral apsolutno konvergira. Za neprekidnu slučajnu veličinu je $M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$. Za diskretnu slučajnu veličinu je $M\xi = \sum_i a_i p_i$ (u slučaju apsolutne konvergencije integrala i reda).

Pri izračunavanju matematičkog očekivanja koriste se sledeća njegova svojstva:

1° $Mc = c$, ako je c konstanta;

2° $M(\xi + \eta) = M(\xi) + M(\eta)$;

3° ako su ξ i η nezavisne slučajne veličine onda je $M(\xi\eta) = M\xi \cdot M\eta$.

4° $M(c\xi) = cM\xi$, ako je c konstanta.

Ako je $y = g(x)$ kakva bila jednoznačna funkcija, onda je $Mg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dF(x)$, ako ovaj integral apsolutno konvergira. Za neprekidnu slučajnu veličinu je

$$Mg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,f(x)\,dx,$$

Za diskretnu slučajnu veličinu je

$$Mg(\xi)=\sum_i g(a_i)\,p_i.$$

Disperzija $D\xi$ slučajne veličine ξ definišu se formulom

$$D\xi=M(\xi-M\xi)^2,$$

$$D\xi=M(\xi)^2-(M\xi)^2,$$

$$Dc=0.$$

ako je c konstanta. Ako su ξ i η nezavisni onda je $D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta$. U protivnom slučaju je $D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta+2[(\xi-M\xi)(\eta-M\eta)]$. Izraz $M[(\xi-M\xi)(\eta-M\eta)]=K_{\xi\eta}$ naziva se *drugi mešoviti centralni moment* slučajnih veličina ξ i η, ili njihov *korelacioni moment*. Ako je $K_{\xi\eta}=0$, a ξ i η nezavisni onda se naziva *nekorelacioni*. Iz nezavisnosti ξ i η sledi njihova nekorelativnost; obrnuto tvrđenje nije tačno. Ako ξ i η imaju *normalnu* ili *Gaussovu raspodelu*, tj. ako imaju gustine

$$f_\xi(x)=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2}},\quad f_\eta(y)=\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(y-b)^2}{2\sigma_2^2}},$$

gde su a i b proizvoljni a σ_1 i σ_2 pozitivni brojevi, onda se nekorelativnost slučajnih veličina poklapa sa njihovom nezavisnošću. U opštem slučaju je

$$D\xi=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M\xi)^2\,dF(x).$$

Za neprekidnu slučajnu veličinu je

$$D\xi=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M\xi)^2 f(x)\,dx,$$

a za diskretnu slučajnu veličinu je

$$D\xi=\sum_i (a_i-M\xi)^2 p_i.$$

Jedna od najviše upotrebljivih karakteristika mere zavisnosti, veze dveju slučajnih veličina ξ i η je *koeficijenat korelacije*

$$r=\frac{M[(\xi-M\xi)(\eta-M\eta)]}{\sqrt{D\xi D\eta}}$$

Osnovna njegova svojstva su:

1° $-1\leqslant r<1$:

2° ako su ξ i η nezavisni onda je $r=0$;

3° $|r|$ se ne menja u slučaju linearne veze slučajnih veličina;

4° $|r|=1$ tada i samo tada kada je jedna od slučajnih veličina linearna transformacija druge, tj. $\eta=a\xi+b$ pri čemu je $r=1$ ako je $a>0$ i $r=-1$ ako je $a<0$, i obrnuto.

Moment reda k veličine ξ naziva se

$$\alpha_k=\int_{-\infty}^{\infty}x^k\,dF(x)$$

Apsolutni moment reda k naziva se

$$\beta_k=\int_{-\infty}^{\infty}|x|^k\,dF(x).$$

Centralni moment reda k naziva se

$$\mu_k=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M\xi)^k\,dF(x).$$

Za neprekidne slučajne veličine je respektivno

$$\alpha_k=\int_{-\infty}^{\infty}x^k f(x)\,dx;\quad \beta_k=\int_{-\infty}^{\infty}|x|^k f(x)\,dx;\quad \mu_k=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M\xi)^k f(x)\,dx.$$

Za diskretne slučajne veličine je

$$\alpha_k=\sum_i a_i^k p_i;\quad \beta_k=\sum_i |a_i|^k p_i;\quad \mu_k=\sum_i (a_i-M\xi)^k p_i.$$

Iz egzistencije konačnog apsolutnog momenta reda k sledi egzistencija svih momenata manjeg reda. *Medijana* slučajne veličine ξ naziva se (proizvoljni) koren jednačine $F(x)=\frac{1}{2}$. *Moda* diskretne slučajne veličine ξ naziva se takva njena moguća vrednost a_M, da je $P(\xi=a_M)>p(\xi=a)$ za svako $i\neq M$. Moda neprekidne slučajne veličine ξ naziva se broj x_M, kome odgovara najveća vrednost gustine $f(x)$. Raspodela sa jednom modom naziva se *unimodalna* a raspodela sa više moda *multimodalna*.

Matematičko očekivanje slučajnog vektora $(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$ naziva se neslučajni vektor $(a_1, a_2, \dots a_n)$, gde je

$$a_i=M\xi_i,\; i=1, 2, \dots n.$$

Korelaciona matrica slučajnog vektora $(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$ naziva se kvadratna matrica n-og reda

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n}\\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn}\end{bmatrix}$$

čiji su elementi $k_{ij}=M[(\xi_i-a_i)(\xi_j-a_j)]$; $k_{ii}=D\xi_i$; $k_{ij}=k_{ji}$;

$$\begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1j}\\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2j}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ k_{j1} & k_{j2} & \dots & k_{jj}\end{vmatrix}>0,\; j=1, 2, \dots, n.$$

Ako je $y=g(x)$ realna funkcija a ξ slučajna veličina, tada je $\eta=g(\xi)$ takođe slučajna veličina, pri čemu je

$$F_\eta(y)=P(\eta<y)=\int_{g(x)<y}dF_\xi(x).$$

Ako slučajni vektor $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ ima gustinu $f(x_1, \ldots, x_n)$, a $y = g(x_1, \ldots, x_n)$ je neka funkcija, tada je $\eta = g(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ slučajna veličina i

$$F_\eta(y) = \int \cdots \int_{g(x_1, \ldots, x_n) < y} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1, \ldots, dx_n.$$

Karakteristična funkcija $E(u)$ slučajne veličine ξ naziva se matematičko očekivanje funkcije $e^{iu\xi}$, gde je u realna veličina a $i = \sqrt{-1}$:

$$E(u) = M e^{iu\xi}.$$

Za neprekidnu slučajnu veličinu je

$$E(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f(x)\, dx,$$

gde je $f(x)$ gustina verovatnoće slučajne veličine ξ.
Za diskretnu slučajnu veličinu je

$$E(u) = \sum_{k=1}^{l} p_k e^{iux_k}$$

gde je x_k neka od mogućih vrednosti slučajne veličine a $p_k = P(\xi = x_k)$ odgovarajuća verovatnoća. Karakteristična funkcija je uniformno neprekidna na celoj osi u; $E(0) = 1$; $|E(u)| \leq 1$, $-\infty < t < \infty$. Ako je $\eta = a\xi + b$ onda je $E_\eta(u) = E_\xi(au)\, e^{iub}$. Ako su ξ i η nezavisni i $\zeta = \xi + \eta$, onda je $E_\zeta(u) = E_\xi(u) + E_\eta(u)$; $E(-u) = \overline{E(u)}$. Ako postoji polarni moment slučajne veličine ξ onda se on izražava formulom

$$m_k = M\xi^k = \frac{1}{i^k} \left. \frac{d^k E(u)}{du^k} \right|_{u=0}.$$

Gustina verovatnoće $f(x)$ se jednoznačno izražava pomoću karakteristične funkcije formulom

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} E(u)\, du,$$

koja za neprekidne slučajne veličine daje neprekidnu funkciju a za diskretne slučajne veličine daje zbir delta-funkcija, i omogućava da se odrede sve moguće vrednosti slučajne veličine i njima odgovarajuće verovatnoće.

4316. Slučajna veličina ξ uzima vrednosti -1; 0 i 1 respektivno sa verovatnoćama $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{4}$. Ispisati izraz i konstruisati grafik funkcije raspodele veličine ξ.

4317. Slučajna veličina ξ ima sledeću raspodelu verovatnoće

ξ	-2	-1	0	1	2
p	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

Naći izraz i konstruisati grafik funkcije raspodele veličine ξ. Naći verovatnoću da će veličina ξ uzeti vrednost koja po apsolutnoj vrednosti nije veća od 1.

4318. Novčić se baca n puta. Naći funkciju raspodele: 1° broja pojavljivanja grbova; 2° odnosa broja pojavljivanja grba prema broju pojavljivanja pisma.

4319. Kocka se baca n puta. Naći funkciju raspodele broja pojavljivanja šestice.

4320. Snejperista puca na kamufliranog protivnika do prvog pogotka. Verovatnoća da će promašiti pri pojedinačnim gađanjima iznosi p. Naći funkciju raspodele broja promašaja.

4321. Novčić se baca sve dotle dok se ne pojavi pismo. Naći funkciju raspodele broja pojavljivanja grba.

4322. Slučajna veličina ξ ima sledeću raspodelu:

ξ	$-1,0$	$-0,5$	$-0,1$	0	0,1	0,2	0,5	1,0	1,5	2,0
p	0,005	0,012	0,074	0,102	0,148	0,231	0,171	0,160	0,081	0,016

Naći: 1° matematičko očekivanje i disperziju veličine ξ; 2° verovatnoće da će ξ uzimati vrednosti iz intervala $[-0,5; 0,5]$.

4323. Broj α-čestica koje registruje brojač u istom opitu je slučajna veličina, raspoređena po zakonu

α	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0,021	0,081	0,156	0,201	0,195	0,151	0,097	0,054	0,026	0,011	0,007

Naći matematičko očekivanje i disperziju broja čestica koje registruje brojač. Naći verovatnoću da će broj čestica koje registruje brojač biti najmanje četiri.

4324. Slučajna veličina raspoređena je po sledećem zakonu:

ξ	-1	0	1
p	0,2	0,3	0,5

Naći $M(\xi^4)$ i $D(\xi^4)$.

4325. Radiostanica vrši predaju informacija u toku 10 mksec. Njen rad se odvija uz prisustvo haotične impulsne smetnje, čiji je srednji broj impulsa u jednoj sekundi 10^4. Radi sprečavanja predaje dovoljno je da se pojavi jedan impuls smetnje u periodu rada stanice. Smatrajući da je broj impulsa smetnje, koji pada u dati vremenski interval, raspoređen po Poissonovom zakonu, naći verovatnoću sprečavanja (onemogućavanja) predaje informacije.

4326. Iz kutije, koja sadrži 2 bele i 4 crne kuglice, uzimaju se tri kuglice n i prebacuju u drugu kutiju, u kojoj se već nalazi 5 belih kuglica. Zatim se iz druge kutije prebacuju četiri kuglice u prvu. Naći matematičko očekivanje broja belih kuglica x_1 i x_2 u obadvema kuglicama.

4327. Data je funkcija $\eta=\sin\frac{\pi}{2}\xi$ slučajne veličine

1	2	3	....	n	...
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	....	$\frac{1}{2^n}$	...

Naći njenu tablicu raspodele.

4328. Naći matematičko očekivanje i disperziju. Broj poena pri jednom bacanju kocke i zbira poena kada se bacaju dve kocke.

4329. Partija od 100 artikala sadrži 10 neispravnih. Iz cele partije uzima se po zakonu slučaja, u svrhu provere kvaliteta, 5 proizvoda. Naći matematičko očekivanje broja defektnih artikala, koji se sadrže u slučajnom izboru.

4330. Pribor koji se ispituje sastoji se od pet elemenata male pouzdanosti. Otkazivanje elemenata je nezavisno, a njihove verovatnoće su

$$p_i=0{,}2+0{,}1\,(i-1).$$

Odrediti matematičko očekivanje i disperziju broja elemenata koji su otkazali.

4331. Lutrija sadrži m_1 dobitaka vrednosti $k_1, m_2 \ldots$ dobitaka vrednosti $k_2, \ldots, m_n$ dobitaka vrednosti k_n. Ukupan broj srećaka (lozova) je N. Matematičko očekivanje igrača na jedan loz jednako je polovini vrednosti loza. Odrediti vrednost loza.

4332. Prvi igrač baca 3, a drugi 2 jednaka novčića. Pobednik, koji dobija svih pet novčića, biće onaj kod koga se pojavi veći broj grbova. U slučaju nerešene igre ona se nastavlja dok se ne dobije određeni rezultat. Koliko je matematičko očekivanje za svakog od igrača?

4333. Automatska traka pri normalnoj organizaciji (uslovima) izbacuje neispravan proizvod sa verovatnoćom p. Promena trake vrši se odmah posle prvog izbacivanja neispravnog proizvoda. Naći srednji broj svih proizvoda (artikala), proizvedenih između dve uzastopne promene trake.

4334. Funkcija raspodele verovatnoće broja elemenata koji su otkazali, a nakon čega dolazi do prestanka rada pribora, ima oblik

$$F(m)=1-e^{-\alpha m}\ (\alpha>0)$$

Naći $M[M]$ i $D[M]$.

4335. Iz kutije koja sadrži m belih i n crnih kuglica izvlači se po jedna kuglica bez vraćanja do prve pojave bele kuglice. Naći matematičko očekivanje broja izvučenih crnih kuglica.

4336. Veliki broj N ljudi podvrgava se ispitivanju krvi. To ispitivanje može biti izvedeno na dva načina:

1° Krv svakog čoveka ispituje se posebno. U tom slučaju potrebno je N analiza.

2° Pomeša se krv uzeta od k ljudi i analizira se dobijena smesa. Ako su rezultati negativni, onda je takva jedna analiza dovoljna za k ljudi, ako je pak rezultat pozitivan, onda se krv svakog od tih ljudi ispituje ponaosob i u svemu potrebno je $k+1$ analiza na k ljudi. Pretpostavljajući da je verovatnoća pozitivnog rezultata jednaka za sve ljude (p) i da su rezultati analize nezavisni, naći: 1) verovatnoću da analiza smeše krvi od k ljudi bude pozitivna; 2) matematičko očekivanje analiza ξ, potrebnih pri drugom načinu organizacije ispitivanja (u praksi je taj metod 80% ekonomičniji).

4337. Novčić se baca do prve pojave grba. Naći srednji broj bacanja.

4338. Radnik nadgleda $m\cdot n$ razboja, raspoređenih u m redova od kojih svaki sadrži po n razboja. Rastojanje između redova razboja je b, a između razboja u istom redu a. Radnik kontroliše razboje onim redom kako se javlja potreba kontrolisanja. Naći srednju vrednost puta koji pređe radnik.

4339. Diskretna slučajna veličina ξ zadata je nizom raspodela $p_k=P(\xi=k)$; $k=1, 2, 3, \ldots$ funkcija $S(u)=p_0+p_1u+p_2u^2+\ldots$ naziva se funkcija generatrisa niza $\{p_k\}$. Izraziti matematičko očekivanje slučajne veličine ξ preko funkcije generatrise.

4340. Funkcija raspodele slučajne veličine ξ zadata je jednakošću

$$F(x)=\sum_{m<x} C_n^m\,(1-p)^{n-m}\,p^m\,.$$

Dokazati, ako je $\lim\limits_{n\to+\infty} np=a$, onda je $\lim\limits_{n\to+\infty} D\xi=a$.

4341. Igra se sastoji u tome što se novčić baca do pojave grba. Ako se grb pojavio pri k-om bacanju novčića, onda igrač A dobija od igrača B k dinara. Koliko je dinara dužan uplatiti igrač A igraču B pre početka igre, pa da bi igra bila naivna?

4342. Slučajna veličina ξ može uzeti proizvoljnu celu pozitivnu vrednost sa verovatnoćama, koje opadaju po geometrijskoj progresiji. Izabrati početni član i količnik progresije q tako, da bi matematičko očekivanje veličine ξ bilo jednako 10 i izračunati pri tim uslovima verovatnoću P_{10} da je $\xi<10$.

4343. Slučajna veličina ξ može uzeti koju bilo celu vrednost n sa verovatnoćom koja je proporcionalna sa $\frac{1}{3^n}$. Naći $M\xi$.

4344. Opit je organizovan tako, da slučajna veličina ξ uzima vrednosti $\frac{1}{n}$ sa verovatnoćom $\frac{1}{n}$, gde je n proizvoljan prirodan broj. Naći $M\xi$.

4345. Vezu sa nekom stanicom koja se kreće mogu održavati n radio stanica. U obostranu vezu stupa ona stanica koja prva primi poziv stanice u pokretu pri čemu je taj događaj jednako verovatan za svih n stanica i iznosi $p=\frac{1}{n}$. Stanica u pokretu uspostavlja vezu m puta. Odrediti verovatnoću da će radiostanica sa indeksom 1 stupiti u obostranu vezu k puta. Naći za to matematičko očekivanje i disperziju broj stupanja u obostranu (uzajamnu) vezu.

4346. Slučajna veličina ξ samo cele pozitivne vrednosti sa verovatnoćom $P(\xi=k)=\frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}$ $(a>0)$. (Pascalova raspodela). Naći matematičko očekivanje i disperziju.

4347. Neka je μ broj pojavljivanja događaja A u seriji od n nezavisnih opita. Verovatnoća pojave događaja A u k-om opitu iznosi p_k. Naći matematičko očekivanje i disperziju veličine μ.

4348. Kakve uslove moraju zadovoljavati slučajne veličine ξ i η da bi bilo $D(\xi\eta)=D\xi\cdot D\eta$.

4349. Slučajna veličina ξ uzima vrednosti $0, 1, 2, \ldots, n$, sa verovatnoćama koje opadaju po geometrijskoj progresiji. 1° Naći zavisnost između $M\xi$ i $D\xi$. 2° Poznato je da je $M\xi=a$. Naći $P(\xi=n)$.

4350. Fizički sistem može se nalaziti u jednom od stanja $E_1; E_2; \ldots$ Ako se sistem u momentu t nalazi u stanju E_i, onda će on u momentu $t+1$ biti u stanju E_j sa verovatnoćom $p_{ij}=C_i 2^{-|i-j|}$. Odrediti konstantu C_i i matematičko očekivanje skoka (tj. razlike indeksa stanja), ako se u momentu t sistem nalazi u stanju E_1.

4351. Pokazati da funkcija, definisana na sledeći način: $f(0,t)=0$, $f(n,t)=e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1}$, $n=1, 2, \ldots$; $\lambda t>0$, predstavlja zakon raspodele verovatnoće diskretne slučajne veličine ξ, koja uzima vrednosti $n=0, 1, 2, \ldots$ Naći $M\xi$ i $D\xi$.

4352. U kutiji se nalazi N kuglica među kojima je n belih. Iz kutije se uzima m kuglica. Neka je ξ broj belih kuglica koje se nalaze u m izvučenih $(m\leq n)$. Naći matematičko očekivanje i disperziju za ξ (hipergeometrijska raspodela).

4353. Opit uspeva sa verovatnoćom p a ne uspeva sa verovatnoćom $(1-p)$. Uslovna verovatnoća da bude dostignut naznačeni rezultat nakon m uspešnih opita $G(m)$ iznosi

$$G(m)=1-\left(1-\frac{1}{\omega}\right)^m$$

Naći matematičko očekivanje onog broja nezavisnih opita, koji je potreban da se dostigne naznačeni rezultat.

4354. Nezavisna ispitivanja nekog aparata obavljaju se sve dotle dok on ne otkaže. Verovatnoća otkaza od ispitivanja do ispitivanja ne menja se i iznosi p. Naći matematičko očekivanje i disperziju broja ispitivanja kod kojih nije došlo do otkaza.

4355. Dva igrača bacaju sve dotle novčić, dok se kod obadva ne pojavi isti broj grbova. Verovatnoća da će nakon $2n$ bacanja jedan i drugi imati isti broj grbova iznosi $p_n=\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}n!\,(n-1)!}$. Odrediti matematičko očekivanje broja bacanja.

4356. Iz kutije koja sadrži N kuglica, među kojima je M belih izvlači se: 1° n kuglica sa vraćanjem; 2° n kuglica bez vraćanja. Naći srednju vrednost broja izvučenih belih kuglica u jednom i drugom slučaju. U kom slučaju je jednako odstupanje od srednjeg verovatnije?

4357. Date su dve kutije od kojih prva sadrži a belih i b crnih kuglica, a druga b belih i a crnih kuglica.

1° Iz obe kutije vrši se N izvlačenja kuglica sa vraćanjem svaki put nazad u kutiju.

2° Sve kuglice se sasipaju u jednu kutiju, iz nje se vrši $2N$ izvlačenja sa vraćanjem.

Naći matematičko očekivanje i disperziju broja izvučenih belih kuglica u prvom i drugom slučaju. U kom opitu je verovatnije da će se broj izvučenih belih kuglica nalaziti u granicama $N-K$, $N+K$, gde je K malo u poređenju sa N?

4358. Slučajna veličina ξ uzima cele pozitivne vrednosti. Dokazati da je

1° $M\xi=\sum_{m\geq 1} p_m$

gde je $p_m=P(\xi>m)$

2° $D\xi=2\sum_{m\geq 1} mp_m-M\xi(M\xi+1)$

4359. Slučajna veličina ξ može uzimati samo sledeće vrednosti: $-2; -1; 0; 1; 2$, respektivno sa verovatnoćama $p_{-2}; p_{-1}; p_0; p_1; p_2$.

Naći te verovatnoće ako je

1° $M\xi=M\xi^3=0$, $M\xi^2=1$, $M\xi^4=2$

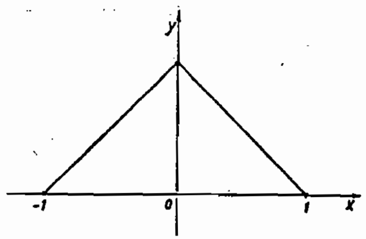
2° $M\xi=M\xi^3=0$, $M\xi^2=2$, $M\xi^4=6$

3° $M\xi=M\xi^3=0$, $M\xi^2=a$, $M\xi^4=b$.

Da li se u tom slučaju mogu uzeti proizvoljne vrednosti za a i b?

4360. Slučajna veličina ξ_n uzima prvih n članova niza $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sa verovatnoćama $p_{n1}, p_{n2}, \ldots, p_{nn}$. Dokazati da je dovoljno da $\lim_{n\to\infty} p_{nk}=0$, za fiksno k, pa da iz $\lim_{n\to\infty} x_n=a$ sledi $\lim_{n\to\infty} M\xi_n=a$.

4361. Gustina slučajne veličine ξ ima grafik dat na sl. 38 (Simpsonov zakon). Napisati izraze za gustinu i funkciju raspodele te slučajne veličine; naći njeno matematičko očekivanje i disperziju.



Sl. 38

4362. Funkcija raspodele slučajne veličine ξ ima oblik:

$$F(x)=\begin{cases} 1 & \text{za } x>a \\ A+B\arcsin\dfrac{x}{a} & \text{za } -a<x<a \\ 0 & \text{za } x<-a \end{cases}$$

Odrediti: 1° za koje je vrednosti A i B funkcija raspodele neprekidna;

2° verovatnoću da će slučajna veličina ostati (biti) u intervalu $\left(-\dfrac{a}{2};\ \dfrac{a}{2}\right)$;

3° gustinu verovatnoće $f(x)$ slučajne veličine.

4363. Gustina verovatnoće slučajne veličine ξ iznosi

$f(x)=Ax^2e^{-kx}$ $(k>0,\ 0<x<\infty)$

1° odrediti koeficijenat A;

2° odrediti verovatnoću da će slučajna veličina ξ (biti u intervalu $\left(0,\ \dfrac{1}{k}\right)$;

3° naći funkciju raspodele slučajne veličine ξ.

4364. Slučajna veličina ξ ima gustinu $f(x)=\dfrac{A}{1+x^2}$ (Cauchyev zakon).

1° Naći koeficijenat A i funkciju raspodele ξ.

2° Naći verovatnoću nejednačine $-1<\xi<1$.

3° Kakvi su matematičko očekivanje, moduo i medijana te raspodele.

4365. Slučajna veličina ξ ravnomerno je raspoređena, $M\xi=4$, $D\xi=3$. Naći gustinu veličine ξ.

4366. Funkcija raspodele slučajne veličine ξ ima oblik:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{za } x<-1 \\ a+b\arcsin x & \text{za } -1<x<1 \\ 1 & \text{za } 1<x \end{cases}$$

Odrediti konstante a i b. Naći $M\xi$ i $D\xi$.

4367. Slučajna veličina ξ ima gustinu verovatnoće

$$f(x)=\begin{cases} Ax^{\alpha}e^{-\frac{x}{\beta}} & \text{za } x>0 \\ 0 & \text{za } x<0 \quad \text{(gama raspodela)} \end{cases}$$

Odrediti parametar A, matematičko očekivanje i disperziju slučajne veličine ξ.

4368. Slučajna veličina ξ ima gustinu

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\cos^2 x & \text{za } |x|<\dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \text{za } |x|>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Naći matematičko očekivanje i disperziju.

4369. Gustina verovatnoće slučajne veličine ξ ima oblik:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\dfrac{\varrho}{E}e^{-\varrho^2\frac{x^2}{E^2}} & \text{za } x>0, \\ 0 & \text{za } x<0 \end{cases}$$

Odrediti matematičko očekivanje i disperziju slučajne veličine ξ.

4370. Gustina verovatnoće slučajne veličine ξ ima oblik

$$f(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} \quad (-a<x<a)$$

Odrediti disperziju i srednje odstupanje.

4371. Gustina verovatnoće slučajnih amplituda A bočnih gibanja broda određuje se po formuli

$$f(a)=\frac{a}{\sigma^2}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}$$

Da li se jednako pojavljuju amplitude manje i veće od srednje?

4372 Gustina verovatnoće slučajne veličine ξ zadata je u obliku

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{za } x<0 \\ \dfrac{x^m}{m!}e^{-x} & \text{za } x>0 \end{cases}$$

Odrediti $M\xi$ i $D\xi$.

4373. Funkcija raspodele verovatnoće ima oblik

$$F(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x_0^3}{x^3} & \text{za } x>x_0\\ 0 & \text{za } x<x_0\end{cases}\qquad \text{(stepeni raspodele)}$$

Naći $M\xi$ i $D\xi$.

4374. Slučajna veličina ξ ima gustinu verovatnoće oblika (beta-raspodela)

$$f(x)=\begin{cases}Ax^{a-1}(1-x)^{b-1} & \text{za } 0<x<1\\ 0 & \text{za } x<0 \text{ i } x>1\end{cases},$$

$(a>0)$ $(B<0)$

Odrediti parametar A, matematičko očekivanje i disperziju slučajne veličine ξ.

4375. Slučajna veličina ξ ima gustinu verovatnoće

$$f(x)=A(1+x^2)^{-\frac{n+1}{2}}$$

gde $n\in N$. Odrediti konstantu A, matematičko očekivanje i disperziju slučajne veličine ξ.

4376. Gustina verovatnoće pozitivne slučajne veličine ξ ima oblik

$$f(x)=Ax^{n-2}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

gde $n\in N$. Odrediti konstantu A, matematičko očekivanje i raspodelu slučajne veličine ξ.

4377. Slučajna veličina ξ ima funkciju raspodele

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{za } x<0\\ \dfrac{x^2}{4} & \text{za } 0<x<2\\ 1 & \text{za } x>0\end{cases}$$

1° Konstruisati grafik funkcije gustine.

2° Naći moduo, medijanu i srednju vrednost za ξ.

3° Izračunati verovatnoću $P(0{,}5\leq\xi\leq 1{,}5)$.

4378. Gustina verovatnoće slučajnih amplituda bočnog ljuljanja broda ima oblik

$$f(x)=\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\quad (x>0)$$

Odrediti:

1° Matematičko očekivanje $M\xi$;

2° Disperziju $D\xi$ i srednje kvadratno odstupanje σ;

3° Centralne momente trećeg i četvrtog reda μ_3 i μ_4.

4379. Slučajna veličina ξ raspoređena je po Laplaceovom zakonu, tj. njena gustina je $f(x)=\dfrac{1}{2\alpha}e^{-\frac{|x-a|}{a}}$ gde je a proizvoljan realan broj, $\alpha>0$. Naći matematičko očekivanje i disperziju ξ.

4380. Intenzitet vektora brzine molekula gasa je slučajna veličina rasprostrta po Maxwellovom zakonu, tj. ima gustinu

$f(v)=\dfrac{4h^3}{\sqrt{\pi}}v^2e^{-h^2v^2}$ za $v>0$ i $f(x)=0$ za $v<0$. Naći srednju brzinu i disperziju veličine brzina molekula.

4381. Verovatnoća da razboj koji radi u momentu t_0 neće stati do momenta t_0+t, daje se formulom $p(t)=e^{-\alpha t}$. Naći matematičko očekivanje i disperziju radnog perioda razboja (između dva uzastopna zastoja).

4382. Naći medijanu i moduo raspodele verovatnoće, čija je gustina zadata formulom

$$f(x)=\frac{ak(x-x_0)^{a-1}}{[1+k(x-x_0)^a]^2},\ k>0,\ a>1,\ x_0<x<\infty.$$

4383. Slučajna veličina ξ raspoređena je po Relejevom zakonu, tj. ima gustinu

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{za } x<0\\ Axe^{-h^2x^2} & \text{za } x>0.\end{cases}$$

Naći koeficijenat A, medijanu, moduo, matematičko očekivanje i disperziju veličine ξ.

4384. Slučajna veličina ξ raspoređena je normalno logaritamski, tj. njena gustina je

$$f(x)=0\quad x<0\quad \text{i}\quad f(x)=\frac{1}{x\beta\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\beta^2}(\ln x-\alpha)^2}$$

za $x>0$, gde je $\alpha\in R$, β pozitivan broj (raspodela čestica pri raspadanju). Naći $M\xi$ i $D\xi$.

4385. Slučajna veličina ξ raspoređena je po normalnom zakonu sa parametrima $(0,\sigma)$. Pri kojoj će disperziji σ^2 verovatnoća pripadanja intervalu $0<a<\xi<b$ biti najveća?

4386. Slučajna veličina ξ raspoređena je po normalnom zakonu. Naći $M|\xi-M\xi$.

4387. Funkcija raspodele slučajne veličine, koja ima konačno matematičko očekivanje, je $F(x)$. Dokazati da je

$$M\xi=-\int_{-\infty} F(x)\,dx+\int_0^1[1-F(x)]\,dx.$$

4388. Kakvo je matematičko očekivanje dužine tetive, koja spaja zadatu tačku kruga radijusa R sa proizvoljnom tačkom kruga?

4389. Tačka je bačena nasumice unutar kruga poluprečnika r. Verovatnoća da će tačka pasti u proizvoljnu oblast, sadržanu u krugu, proporcionalna je površini te oblasti. Naći funkciju raspodele, matematičko očekivanje i disperziju rastojanja tačke od centra kruga.

4390. Materijalna tačka pod dejstvom centralne sile opisuje projektoriju. Poznata je veličina osa a elipse i njena ekscentričnost. Pretpostavljajući, da je sa istom verovatnoćom moguće posmatranje pokretne tačke u svakom trenutku, odrediti matematičko očekivanje i disperziju daljine u momentu posmatranja, ako se posmatrač nalazi u centru gravitacije, koji se nalazi u jednoj od žiža elipse.

4391. Slučajna veličina ξ ima gustinu

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2(b+x)}{b(a+b)} & \text{za } -b<x<0\\[2mm] \dfrac{2(a-x)}{a(a+b)} & \text{za } 0<x<a\end{cases}$$

Naći moduo, medijanu i srednju vrednost veličine ξ.

4392. Slučajna veličina ξ ima gustinu

$$f(x)=y_0\left(1+\frac{ax}{2}\right)^{\frac{4}{a^2}-1} e^{-\frac{2x}{a}} \quad -\frac{2}{a}<x<\infty.$$

Naći konstantu y_0 i prva četiri centralna momenta veličine ξ.

4393. Slučajna veličina ξ raspodeljena je po zakonu

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{za } x<0\\ e^{-x^{-a}} & \text{za } x>0 \quad (a>0)\end{cases}$$

Naći funkciju raspodele slučajne veličine $\eta=-\dfrac{1}{\xi}$.

4394. Slučajna veličina ξ ima gustinu $f(x)$ a $y=g(x)$ je strogo monotona neprekidna diferencijabilna funkcija. Naći gustinu slučajne veličine $\eta=g(\xi)$.

4395. Slučajna veličina ξ ima gustinu

$$P_\xi(x)=\begin{cases}f(x) & \text{za } 0<x<\infty\\ 0 & \text{za } -\infty<x<0\end{cases}$$

Naći gustinu sledećih slučajnih veličina:

1° $\eta=\xi^3$; 2° $\eta=\dfrac{1}{\xi}$; 3° $\eta=\sqrt{\xi}$;

4° $\eta=e^{\xi}$ 5° $\eta=e^{-\xi}$; 6° $\eta=\ln\xi$.

4396. Slučajna veličina ξ je raspodeljena po normalnom zakonu; $M\xi=0$. Naći raspodelu veličine $\eta=\xi^3$.

4397. Naći zakon raspodele kradrata slučajne veličine, raspodeljene po normalnom zakonu.

4398. Dvodimenziona slučajna veličina (ξ,η) ima sledeću raspodelu verovatnoće:

η \ ξ	0	1
−1	0,1	0,2
0	0,2	0,3
1	0	0,2

Naći matematičko očekivanje i disperziju veličine.

4399. Slučajna tačka u ravni raspodeljena je po sledećem zakonu:

η \ ξ	0	1
−1	0,10	0,15
0	0,15	0,25
1	0,20	0,15

Naći brojne karakteristike veličine (ξ,η).

4400. Dati su slučajni vektor (ξ,η), $M\xi=0$, $M\eta=2$, $D\xi=2$, $D\eta=1$ i koeficijenat korelacije $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Naći matematičko očekivanje i disperziju slučajne veličine $\zeta=2\xi-3\eta$.

4401. Neka veličina odstupa od svoje srednje vrednosti pod dejstvom dvaju slučajnih faktora A i B. Srednja kvadratna odstupanja, izazvana faktorima A i B iznose respektivno 1,2 i 1,1. Koeficijenat korelacije između tih odstupanja je $r=\dfrac{1}{3}$. Naći srednje kvadratno odstupanje te veličine izazvano skupnim dejstvom oba ta faktora.

4402. Neka su ξ i η proizvoljne korelativne slučajne veličine sa koeficijentom korelacije $r\neq\pm1$. Dokazati da uvek jednu od tih veličina, na primer η, možemo predstaviti u obliku zbira dva nekorelativna sabirka, i to jednog koji je nekorelativan sa ξ i drugog koji je proporcionalan sa ξ (tj. ima sa ξ koeficijenat korelacije ±1).

4403. Dat je slučajni vektor (ξ,η); $M\xi=M\eta=0$; $D\xi=100$; $D\eta=25$; $M(\xi\eta)=16$. Koristeći linearnu tranformaciju $\xi=x$, $\eta=ax+y$, prevesti dati vektor na vektor (x,y) sa nekorelativnim komponentama. Naći brojne kara kteristike za x i y.

4404. Slučajne veličine ξ i η imaju matematička očekivanja $M\xi=a$, $M\eta=b$, disperzije $D\xi=\sigma_1^2$; $D\eta=\sigma_2^2$ i koeficijent korelacije r. Naći matematičko očekivanje i disperziju veličine $\xi=a\xi+\beta\eta+\gamma$, gde su a, β i γ konstante.

4405. Slučajne veličine ξ i η su nezavisne i imaju normalnu raspodelu $M\xi=a$, $M\eta=b$, $D\xi=D\eta=\sigma^2$. Naći poluprečnik kruga sa centrom u tački (a, b), u koji slučajna tačka (ξ, η) pada sa verovatnoćom 0,997.

4406. Slučajni vektor (ξ, η) je ravnomerno raspoređen u krugu poluprečnika a sa centrom u koordinatnom početku. Naći matematičko očekivanje i disperziju rastojanja tačke (ξ, η) od koordinatnog početka.

4407. Dvodimenziona slučajna veličina (ξ, η) ima sledeću diskretnu raspodelu verovatnoće:

$$P\{\xi=k,\ \eta=m\xi\zeta=\frac{n!}{k!m!(n-k-m)!}p^k q^m (1-p-q)^{n-k-m}$$

$m,k=0, 1, 2, \ldots, n$; $k+m<n$. Naći matematičko očekivanje, disperziju i koeficijenat korelacije za ξ i η.

4408. Slučajni vektor (ξ, η) ravnomerno je raspodeljen u kvadratu sa stranama a i dijagonalama koje se poklapaju sa koordinatnim osama.

1° Napisati izraz za gustinu vektora (ξ, η) i svaku od njegovih komponenata.

2° Ispitati zavisnost i korelativnost ξ i η.

4409. Data je gustina dvodimenzionog slučajnog vektora (ξ, η):

$$f(x, y)=\frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+2xy+5y^2)}$$

Naći 1° gustinu veličine ξ i η; 2° gustinu $\xi=\xi+\eta$; 3° gustinu vektora (u, v) ako je $u=\xi+\eta$, a $v=\xi-\eta$.

4410. Gustina slučajnog vektora (ξ, η, ζ) je

$$f(x, y, z)=\begin{cases}\dfrac{6}{(1+x+y+z)^4} & \text{za } x>0,\ y>0,\ z>0\\ 0 & \text{u ostalim slučajevima.}\end{cases}$$

Naći raspodelu veličine $\xi+\eta+\zeta$.

4411. Gustine nezavisnih slučajnih veličina ξ i η su:

1° $f_\xi(x)=f_\eta(x)=\begin{cases}0 & \text{za } x<0\\ ae^{-ax} & \text{za } x>0\ (a>0)\end{cases}$

2° $f_\xi(x)=f_\eta(x)=\begin{cases}0 & \text{za } x\le 0 \text{ i } x>a\\ \dfrac{1}{a} & \text{za } 0<x\le a\end{cases}$

Naći gustinu raspodele veličine $\zeta=\dfrac{\xi}{\eta}$.

4412. Neka su ξ i η nezavisne slučajne veličine pri čemu je ξ raspoređena po normalnom zakonu sa gustinom

$$f_\xi(x)=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\,e^{-\frac{nx^2}{2}}$$

a veličina η ima gustinu

$$f_\eta(y)=\frac{\sqrt{2n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{y\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}e^{-\frac{n}{2}y^2},\quad y>0.$$

Naći gustinu raspodele veličine $\zeta=\dfrac{\xi}{\eta}$.

4413. Slučajne veličine ξ, η i ζ su nezavisne i imaju normalnu raspodelu: $M\zeta=a$, $M\eta=b$, $M\xi=C$, $D\zeta=D\eta=D\xi=\sigma^2$. Naći raspodelu rastojanja slučajne tačke (ξ, η, ζ) od centra raspodele (a, b, c).

4414. Slučajne veličine ξ η su nezavisne i raspoređene su po normalnom zakonu sa parametrima (a, σ) i (b, σ). Naći gustinu raspodele rastojanja tačke (ξ, η) od koordinatnog početka.

4415. Slučajna veličina ξ raspodeljena je po normalnom zakonu sa parametrima a i σ, dok je veličina η ravnomerno raspodeljena na intervalu $[-\pi, \pi]$, pri čemu su ξ i η nezavisne veličine. Naći gustinu raspodele veličine $\zeta=\xi\sin\eta$.

4416. U partiji od n proizvoda ima n defektnih. Radi provere kvaliteta uzima se r proizvoda bez vraćanja $(m<r<n-m)$. Naći karakterističnu funkciju broja defektnih proizvoda koji su se pojavili pri proveri.

4417. Naći karakterističnu funkciju slučajne veličine ξ, čija je gustina verovatnoće

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$$

4418. Slučajna veličina ξ ima karakterističnu funkciju

$$E(u)=\frac{1}{1+u^2}$$

Naći gustinu verovatnoće $f(x)$ te slučajne veličine.

4419. Naći momente slučajne veličine ξ čija je karakteristična funkcija

$$E(u)=\frac{1}{1+u^2}.$$

4420. Verovatnoća pojave događaja pri jednom ispitivanju je p. Naći karakterističnu funkciju broja pojavljivanja događaja pri jednom ispitivanju.

4421. Naći karakterističnu funkciju $E(u)$ binomne raspodele i odrediti pomoću te funkcije matematičko očekivanje i disperziju slučajne veličine ξ, koja je potčinjena binomnoj raspodeli.

4422. Naći karakterističnu funkciju diskretne slučajne veličine ξ, koja je potčinjena Pascalovom zakonu raspodele

$$P(\xi=m)=\frac{a^m}{(1+a)^{m+1}} \quad a>0$$

a pomoću nje naći $M\xi$ i $D\xi$.

4423. Slučajna veličina ξ diskretnog tipa potčinjena je Poissonovom zakonu raspodele

$$P(\xi=m)=\frac{a^m}{m!}e^{-a}$$

Naći: 1° karakterističnu funkciju $E(u)$; 2° koristeći $E(u)$ naći $M\xi$ i $D\xi$.

4424. Normalno raspodeljena slučajna veličina ξ ima gustinu verovatnoće

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

Naći karakterističnu funkciju.

4425. Naći karakterističnu funkciju i polarni moment neprekidne slučajne veličine, koja je gustina verovatnoće

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x} & \text{za } x>0 \\ 0 & \text{za } x<0 \end{cases}$$

4426. Naći karakterističnu funkciju slučajne veličine, koja je ravnomerno raspodeljena u intervalu (a, b), i sve njene polarne momente.

4427. Slučajna veličina ξ ima gustinu verovatnoće

$$f(x)=2h^2xe^{-h^2x^2} \quad (x>0)$$

Naći karakterističnu funkciju slučajne veličine ξ.

4428. Slučajna veličina ξ ima gustinu verovatnoće

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)}x^{\lambda-1}e^{-\alpha x} & \text{za } x>0 \\ 0 & \text{za } x<0 \end{cases}$$

$(\alpha,\ \lambda>0)$.

Naći karakterističnu funkciju i polarne momente.

4429. Naći karakterističnu funkciju slučajne veličine ξ čija je gustina verovatnoće

$$f(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} \quad (|x|<a)$$

4430. Slučajna veličina ξ potčinjena je Cauchyevom zakonu

$$f(x)=\frac{a}{\pi}\,\frac{1}{(x-\bar{x})^2+a^2}$$

Naći karakterističnu funkciju slučajne veličine ξ.

4431. Karakteristična funkcija neprekidne slučajne veličine ξ zadata je u obliku

$$E(u)=e^{-a|u|} \quad (a>0)$$

Odrediti gustinu verovatnoće.

4432. Date su karakteristične funkcije

$$E_1(u)=\frac{1+iu}{1+u^2}; \quad E_2(u)=\frac{1-iu}{1+u^2}.$$

Odrediti odgovarajuće gustine verovatnoće.

4433. Pokazati da je funkcija

$$E(u)=\frac{1-\beta}{1+\alpha}\cdot\frac{1+\alpha e^{-iu}}{1-\beta e^{-iu}} \quad 0<\alpha<\beta<1$$

karakteristična, i naći njen zakon raspodele.

4434. Dokazati da funkcije

$$1^\circ\ e^{-i|u|};\quad 2^\circ\ \frac{1}{1-i|u|};\quad 3^\circ\ E(u)=\begin{cases}1-u^2 & \text{za } |u|<1 \\ 0 & \text{za } |u|>1\end{cases};\quad 4^\circ\ e^{-u^2(\pi-\operatorname{arc\,tg} u)}$$

nisu karakteristične.

4435. Dokazati da svaka realna karakteristika funkcija ima sledeću osobinu:

$$1-E(2u)<4\{1-E(u)\}$$

za proizvoljno u.

4436. Dokazati sledeće svojstvo proizvoljne realne karakteristične funkcije

$$|E(u)|<\sqrt{\frac{1+E(2u)}{2}}$$

4437. Dokazati sledeće svojstvo karakteristične funkcije

$$|E(u+h)-E(u)|\le\sqrt{2[1-R_e E(h)]}.$$

4438. Ako je $E(u)$ karakteristična funkcija, dokazati da je $E(u)=\frac{1}{u}\int_0^u E(z)\,dz$

takođe karakteristična funkcija.

REZULTATI

Glava I

1. $S_n = q+q^2+\cdots+q^n = \dfrac{q(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{q}{1-q} - \dfrac{q^{n+1}}{1-q}$ $(q \neq 1)$.

Za $|q|<1 \Rightarrow S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{q}{1-q}$ pa red konvergira. Za $q>1$ red određeno divergira jer je $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$. Za $q\leqslant -1$ red divergira jer $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ ne postoji. **2.** $S=2/3$.

3. $S_n = \dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)} = \left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right) = 1-\dfrac{1}{n+1}$; $S=1$.

4. $S_n = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{n+k+1}$; $S = \dfrac{1}{k}$. **5.** $S_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$; $S=1$.

6. $S_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^k}$; $S = \begin{cases} 1, & k>0 \\ 0, & k=0 \\ -\infty, & k<0. \end{cases}$ **7.** $S_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} [\ln(k+1) - \ln k] = \ln(n+1)$; $S=\infty$.

8. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sqrt[k]{a} - \sqrt[k+1]{a}\right) = a - \sqrt[n+1]{a}$; $S = a-1$. **9.** $S_n = \dfrac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$; $S=\infty$.

10. Koristeći jednakost $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{2n^2} = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2n} - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2n+1}$ dobija se

$S_n = \operatorname{arc\,tg} 1 - \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{2n+1}$ odakle je $S = \dfrac{\pi}{4}$.

11. Neka je $S_n' = \sum\limits_{k=1}^{n} q^k \sin kx$ i $S_n'' = \sum\limits_{k=1}^{n} q^k \cos kx$. Tada je

$S_n'' + i S_n' = \sum\limits_{k=1}^{n} q^k (\cos kx + i \sin kx) = \sum\limits_{k=1}^{n} q^k e^{kxi} = q e^{xi} \dfrac{1-q^n e^{nxi}}{1-q e^{xi}}$. Odavde je

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n' = \dfrac{q \sin x}{1-2q\cos x+q^2}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} S_n'' = \dfrac{q\cos x - q^2}{1-2q\cos x+q^2}$.

12. $\dfrac{\pi e^{2\pi}}{3(e^{2\pi}-1)}$. **13.** $a_n = \dfrac{n}{n+1}$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. **14.** $a_n = \sin n\alpha$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ne postoji.

15. Ne postoji $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. **16.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e$. **17.** Divergira jer je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

18. Na osnovu Stolzove teoreme $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$ $(b_n \to \infty,\ b_{n+1} > b_n)$ sledi da je

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}(1+e^{-1}+e^{-2}+\cdots+e^{-n}) = 0$. **19.** ∞ (videti prethodni zadatak).

20. $\dfrac{1}{1+a}$ (uputstvo: kao u prethodnom zadatku). **21.** $|A_{n+1}-A_n| = |a_{P_{n+2}-1} - a_{P_n}|$.

Pošto je $P_{n+2}-1>P_n$ za svako n i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, to je za dovoljno veliko n ispunjeno $|a_{P_{n+2}-1} - a_{P_n}| < \varepsilon$ za proizvoljno ε. Za te vrednosti n je $|A_{n+1}-A_n|<\varepsilon$.

26. Uputstvo: Koristiti na primer $|S_{2n}-S_n| = \dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n} > n\cdot\dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2}$.

27. $\dfrac{1}{2n-1} \sim \dfrac{1}{2n}$ za $n\to\infty$. Kako je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ divergentan, to je divergentan i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n-1}$. **28.** Konvergentan.

29. Za $a<1$ je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ pa red divergira. Za $a>1$ je $a_n < \dfrac{1}{a^n}$ i kako je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a^n}$ konvergentan to je i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+a^n}$ konvergentan.

30. $\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}} \sim \dfrac{1}{n^{3/2}}$. Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ konvergira pa konvergira i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}$.

31. Divergira. **32.** Divergira. **33.** Konvergira za $p>1$ a divergira za $p<1$.

34. Divergira. Uputstvo: $\sqrt[n]{a}-1 \sim \dfrac{\ln a}{n}$. **35.** $a^{\frac{1}{n}} + a^{-\frac{1}{n}} - 2 = \dfrac{\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)^2}{a^{1/n}} \sim \dfrac{\ln^2 a}{n^2}$.

Konvergira za $a>0$. **36.** Konvergira. Uputstvo: $\ln\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right) \sim \dfrac{2}{n-1}$.

37. Konvergira. **38.** Divergira. $\left(\sin\dfrac{x}{n} \sim \dfrac{x}{n}\right)$. **39.** Divergira.

40. Konvergira za $p>1$. **41.** Konvergira. $\left(2^n \sin\dfrac{1}{3^n} \sim \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)$.

42. Konvergira za $\alpha>0$. **43.** Konvergira jer je $\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \dfrac{1}{n^{\ln(\ln n)}} < \dfrac{1}{n^2}$ za dovoljno veliko n.

44. Divergira za $\alpha < 1$ jer je, u tom slučaju, za dovoljno veliko n $\frac{1}{(\ln n)^\alpha} > \frac{1}{n}$.

45. Divergira. **46.** Konvergira $\left(a_n < \frac{1}{n^2}\right)$. **47.** Divergira $\left(a_n > \frac{1}{n}\right)$.

48. Konvergira za $p > 1$. **49.** $a_n \sim \frac{n^n}{n^n e^{-n}} = e^n$. Pošto red $\sum_{n=1}^{\infty} e^n$ divergira i dati red divergira. **50.** Divergira. **51.** Divergira. **52.** Divergira.

53. $a_n = \frac{1}{a_1 + (n-1)d} \sim \frac{1}{nd}\ (n \to \infty)$. **54.** $a_n = \frac{1}{a_1 q^{n-1}}$. Konvergira za $q > 1$.

55. Iz $a_n \to 0$, kad $n \to \infty$, sledi da je $a_n^2 < a_n$ za n dovoljno veliko, pa iz konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sledi konvergencija reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$. Obrnuto nije tačno. Primer: red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je konvergentan a red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergentan. **58.** $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$ pa red konvergira. **59.** $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$, sledi da red divergira. **60.** Konvergira.

61. Konvergira. **62.** Konvergira. **63.** Konvergira za $0 < x < e$ a divergira za $x > e$. Za $x = e$ koristeći Stirlingovu formulu, može se pokazati da divergira.

64. Konvergira za $x < 1$ i za $x = 1$ ako je $y > 1$. **65.** Konvergira.

66. Konvergira. **67.** 1° Konvergira. 2° Divergira. **69.** Uputstvo: Pokazati da je $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ za svako α i svako x.

70. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{a^n}} = \frac{1}{a} < 1$. Red konvergira. **71.** Konvergira. **72.** Konvergira.

73. Za $x < a$ konvergira. **74.** Konvergira. **75.** Konvergira za $a < 1$.

76. Konvergira za $a > 1$. **77.** Konvergira.

81. $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{a}$ pa red konvergira. **82.** Konvergira. **83.** Konvergira.

84. Konvergira za $\max(|x|, |y|) < 1$.

85. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{a+n+1}$. D'Alembertov test ne rešava pitanje konvergencije. $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n+1} = a$. Prema tome red konvergira za $a > 1$ a divergira za $a < 1$. Za $a = 1$ red se svodi na $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ koji divergira.

86. Konvergira. **87.** $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \gamma - \alpha - \beta + 1$ pa red konvergira za $\gamma - \alpha - \beta > 0$ i divergira za $\gamma - \alpha - \beta < 0$.

88. Konvergira. **89.** Divergira. **90.** Konvergira za $\alpha > a$. **91.** Divergira.

92. Konvergira za $p > 2$. $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{2n} + \frac{p(p+1)}{2(2n)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

93. $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{q+n}{p+n}\right)^\alpha = \left(1 + \frac{q-p}{p+n}\right)^\alpha \sim 1 + \alpha\frac{q-p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) (n \to \infty)$ pa red konvergira za $\alpha(q-p) > 1$.

94. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha - 1}, & \alpha > 1 \\ \infty, & \alpha < 1. \end{cases}$ Prema tome red konvergira za $\alpha > 1$ a divergira za $\alpha < 1$.

95. Konvergira. **96.** 1° Konvergira; 2° divergira. **99.** Konvergira za $\alpha > \frac{1}{2}$.

100. Divergira. **101.** Konvergira. **102.** Konvergira za $c = 0$ i $\frac{a}{d} < -1$.

103. Ovde je $b_n = \frac{1}{n^\alpha}$ a $b_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^\alpha}$ pa je $b_n > b_{n+1}$. Osim toga je $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ pa red konvergira.

104. Konvergira. **106.** Ne postoji $\lim_{n\to\infty} a_n$ pa red divergira. **107.** Konvergira.

108. Konvergira. **109.** Za $|\alpha| > 1$ konvergira apsolutno. Za $|\alpha| = 1$ konvergira uslovno.

110. Ne. Red divergira. **111.** $\frac{1}{2} \ln 2$.

112. $a_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$, $b_n = \frac{1}{n}$. Ovde je $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| < 5$ i b_n monotono teži nuli. Konvergira.

113. Konvergira.

114. $\left|\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha\right| < \frac{1}{\left|2\sin\frac{\alpha}{2}\right|}$ za $\alpha \neq 2k\pi$. Niz $\frac{1}{\ln n}$ monotono teži nuli pa red konvergira

Za $\alpha = 2k\pi$ svi članovi su jednaki nuli pa i u tom slučaju red konvergira.

115. Konvergira za $\alpha \neq 2k\pi$ gde je k ceo broj.

118. Red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$ konvergira (zadatak 107) a niz $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ je monotono ograničen.

119. Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ konvergira a niz $\frac{\sqrt{n}}{n+a}$ monotono teži nuli.

121. 0,96. Odrediti prvo broj sabiraka iz uslova $b_{n+1}<0{,}01$. 122. 0,04.

123. 10^6. 124. $132\cdot 10^{14}$.

126. Apsolutno konvergira za $-1<a<2$. Za ostale vrednosti divergira.

127. Apsolutno konvergira.

128. Apsolutno konvergira za $|x-\pi k|<\frac{\pi}{4}$ (k ceo broj), uslovno konvergira za $x=\pi k\pm\frac{\pi}{4}$.

129. Konvergira uslovno.

130. Konvergira apsolutno za $a>2$, konvergira uslovno za $0<a\leqslant 2$.

131. Apsolutno konvergira za $|a|<1$ i za $|a|>1$, $b>|a|$. Uslovno konvergira za $a=-1$ i $0<b<1$.

132. Apsolutno konvergira za $a>1$. Za $0<a\leqslant 1$ konvergira uslovno.

133. $a>1$ apsolutno konvergira. Za $0<a\leqslant 1$ uslovno konvergira.

134. Apsolutno konvergira za $a>1$. Uslovno konvergira za $1/2<a\leqslant 1$.

135. Apsolutno konvergira za $a>2$, a uslovno za $1<a\leqslant 2$.

136. Može. 137. Ne. 139. Konvergira apsolutno. 140. 1/6. 141. 0.

142. $-\frac{2}{7}$.

143. $\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{2^\nu}\right)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{2^\nu}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{2^\nu}\cdot\frac{1}{2^{n-\nu}}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{2^n}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}=$

$=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}=2\cdot 2\cdot\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}=1.$

144. Red $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ konvergira po Leibnizovom testu. $\sum_{n=0}^{\infty}c_n=$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{(n-\nu+1)(\nu+1)}}\cdot\ \lim_{n\to\infty}c_n>1.$

145. Uputstvo: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)}{2^{n-2}}=4\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{2}-2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}$.

147. Konvergira za $p>1$ i $q>1$.

149. $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{m^k}=\frac{1}{m(m-1)}$, $\sum_{m=2}^{n}\frac{1}{m(m-1)}=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}=1-\frac{1}{n}$ pa je

$\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{m^k}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1.$

158. Uputstvo: Koristiti nejednakost $\int_0^1(x_0+x_1t+x_2t^2+\cdots)^2\,dt>0$.

163. $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|2x|$. Za $|x|<\frac{1}{2}$ red konvergira apsolutno. Za $x=\frac{1}{2}$ red konvergira uslovno.

164. Konvergira apsolutno za $|x|>1$. 165. Apsolutno konvergira za $|x|>3$.

166. Apsolutno konvergira za $x\in(-\infty,-3)\cup(-1,\infty)$. Za $x=-3$ konvergira uslovno.

167. Apsolutno konvergira za $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$.

168. Apsolutno konvergira za $x\in\left(\frac{1}{e},e\right)$. Uslovno konvergira za $x=\frac{1}{e}$.

169. Apsolutno konvergira za $x\in(-\infty,\infty)$.

170. Apsolutno konvergira za $|x|\neq 1$ i uslovno za $x=-1$.

171. Apsolutno konvergira za $|x|\neq 1$. 172. Apsolutno konvergira za $x>0$.

173. Apsolutno konvergira za $|x|<1$.

174. Apsolutno konvergira za $|x-\pi k|<\frac{\pi}{6}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$.

175. Apsolutno konvergira za $x>0$.

176. 1° $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,1]\\ 1, & x=1\end{cases}$. 2° Neka je $\varepsilon>0$. Tada iz (1) $|x^n-\varphi(x)|<\varepsilon$, gde je $\varphi(x)$ granična funkcija, sledi $x^n<\varepsilon$ za $x\in[0,1)$. Odavde je $n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln x}$ odakle se vidi da ne postoji N takvo da je za $n>N$ ispunjena nejednakost (1) za svako $x\in[0,1)$. Jer, ako se x uzme dovoljno blisko jedinici n mora biti veće od bilo kojeg unapred datog broja da bi nejednakost (1) bila zadovoljena. 3° Za $x\in[0,a]$ je $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$.

Za proizvoljno $\varepsilon>0$ iz $|x^n-0|<\varepsilon$ sledi $n<\frac{\ln\varepsilon}{\ln a}$ pa je $N=N(\varepsilon)=\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln a}\right]$.

177. Konvergira ali ne uniformno jer je $\lim_{n\to\infty}\sup_x|n(1-x)x^{n-1}|=\frac{1}{e}$.

178. Konvergira uniformno. 179. Konvergira uniformno. 180. Konvergira uniformno.

181. Konvergira obično. 182. Konvergira obično.

183. 1° Konvergira uniformno. 2° Konvergira neuniformno.

184. a) $\left|\sum_{\nu=n+1}^{n+p}u_\nu(x)\right|=|x^{n+1}+x^{n+2}+\cdots+x^{n+p}|=|x^{n+1}|\ |1+x+x^2+\cdots+x^{p-1}|<q^{n+1}\cdot p.$

Neka je $\varepsilon>0$ proizvoljno mali broj. Postoji $N=N(\varepsilon)$ takvo da je za $n>N$ $q^{n+1}p<\varepsilon$.

Naravno da je za te vrednosti n uspunjena nejednakost $\left|\sum_{\nu=n+1}^{n+p} x^\nu\right|<\varepsilon$. b) Za $x\in(-1, 1)$ izraz $\sum_{\nu=n+1}^{n+p} x^\nu$ može proizvoljno da se približi broju p (recimo kad $x\to 1$) pa za proizvoljno $\varepsilon>0$ nije $\left|\sum_{\nu=n+1}^{n+p} x^\nu\right|<\varepsilon$.

185. Konvergira uniformno.

186. Konvergira uniformno. **187.** Konvergira neuniformno.

188. Konvergira uniformno.

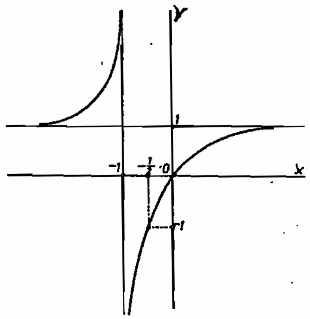
192. 1° Za $x\in(-\infty, \infty)$ imamo $\left|\frac{\cos nx}{n^\alpha}\right|<\frac{1}{n^\alpha}$ a red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ konvergira.

201. Konvergira uniformno. **202.** Konvergira uniformno.

203. Konvergira uniformno. **206.** Definisana za $|x|<\infty$ i prekidna za $x=0$.

207. Definisana i neprekidna za $|x|<1$. **208.** Definisana i neprekidna za $x\in(-\infty,\infty)$.

209. Neka je $\left(\frac{x}{x+1}\right)^\alpha=t$. Red $\sum_{n=1}^{\infty} t^n$ apsolutno konvergira ako i samo ako je $-1<t<1$. Sa grafika funkcije $y=\frac{x}{x+1}$ (sl. 39) vidimo da će funkcija $t=\left(\frac{x}{1+x}\right)^\alpha=y^\alpha$ biti definisana za $x\in(-\infty, -1)\cup[0, \infty)$ i svaki realni broj α. Za $x\in(-1, 0)$ y je negativno pa je u tom intervalu funkcija $t=\left(\frac{x}{1+x}\right)^\alpha$ definisana jedino ako je $\alpha=\frac{p}{2q+1}$ gde su p i q celi brojevi. Iz monotonosti funkcije $y=\frac{x}{1+x}$ sledi monotonost funkcije $t=\left(\frac{x}{1+x}\right)^\alpha$ za svako α za koje je funkcija definisana. Prema tome je: 1° $0<\left(\frac{x}{1+x}\right)^\alpha<1$ za $x\in[0, \infty)$ i svako $\alpha\in R$, tj. red apsolutno konvergira za $x\in[0, \infty)$ i $\alpha\in R$. 2° $1<\frac{x}{1+x}$



Sl. 39

za $x\in(-\infty, -1)$ pa je $0<\left(\frac{x}{1+x}\right)^\alpha<1$ za $\alpha<0$ i $x\in(-\infty, -1)$, tj. red apsolutno konvergira za $x\in(-\infty, -1)$ i $\alpha<0$. 3° Za $x\in\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ je $\left|\left(\frac{x}{1+x}\right)^\alpha\right|<1$, ukoliko je $\alpha=\frac{p}{2q+1}<0$ pa za $x\in\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ i $\alpha=\frac{p}{2q+1}<0$ red apsolutno konvergira. 4° Za $x\in\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ je $\left|\left(\frac{x}{x+1}\right)^\alpha\right|<1$ ukoliko je $\alpha=\frac{p}{2q+1}>0$ pa je red apsolutno konvergentan za $x\in\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ i $\alpha=\frac{p}{2q+1}>0$.

Red uslovno ne konvergira ni u jednoj tački. Uniformno konvergira u svakom zatvorenom intervalu koji je sav sadržan u intervalu apsolutne konvergencije.

210. Ne, jer diferencirani red ne konvergira.

211. 1° $\frac{1}{(1-x)^2}$; 2° $\frac{1}{(1-x)^3}$. **212.** $\frac{1}{2}\ln 2$. **213.** 1. **214.** 2. **215.** 1.

216. Ne, jer diferencirani red ne konvergira.

217. Da. Diferencirani red uniformno konvergira u datom intervalu.

218. Da. **219.** Da. **220.** Da. **221.** $\pi^3/12$. **222.** $2°\ln\frac{4}{3}$.

223. $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$. Interval konvergencije je $(-1, 1)$. Za $x=1$ i $x=-1$ red divergira jer mu opšti član ne teži nuli kad $n\to\infty$.

224. $R=\infty$, $(-\infty, \infty)$. **225.** $R=1$, $[-1, 1)$. **226.** $R=1$, $[-1, 1]$.

227. $[-1, 1]$. **228.** $(-1, 1]$. **229.** $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **230.** $[-a, a)$.

231. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. **232.** $[-1, 1)$. **233.** $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$. **234.** $R=\max(a, b)$, $(-R, R)$.

235. $R=\infty$ za $(a<1\land p>0)\lor(a>1\land p<0)$. $R=0$ za $(a<1\land p<0)$ $\lor(a>1\land p>0)$.

236. 1° $R>\min(R_1, R_2)$; 2° $R>R_1R_2$. **237.** $(-1, 1)$.

238. $R=1$. Za $x=-1$ konvergira apsolutno ako je $\gamma-\alpha-\beta>0$, i uslovno ako je $-1<\gamma-\alpha-\beta<0$. Za $x=1$ konvergira apsolutno ako je $\gamma-\alpha-\beta>0$. **239.** $(-1, \infty)$.

240. $[-1, \infty)$. **241.** $|x-k\pi|<\frac{\pi}{2}$, k ceo broj.

242. $x\neq(2k+1)\pi$. Za $p>2$ konvergira apsolutno i za $x=(2k+1)\pi$. Za $0<p<2$ konvergira uslovno za $x=(2k+1)\pi$.

243. $(-\infty, 0)\cup(1, \infty)$.

244. $f(x)=x^3-2x^2+5x-7$, $f'(x)=3x^2-4x+5$, $f''(x)=6x-4$, $f'''(x)=6$, $f^{IV}(x)=0$.

$$f(1)=-3,\ f'(1)=4,\ f''(1)=2,\ f'''(1)=6,\ f^{IV}(1)=0,\ldots$$

$$f(x)\equiv-3+4(x-1)+(x-1)^2+(x-1)^3.$$

245. $f(x)\equiv 81\ (x-1)^3+270\ (x-1)^4+342\ (x-1)^5+330\ (x-1)^6+186\ (x-1)^7+63\ (x-1)^8+12(x-1)^9+(x-1)^{10}$.

246. 1° $\frac{1}{a-x}=\frac{1}{a}\,\frac{1}{1-x/a}=\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{a^n}$, $|x|<|a|$; 2° $\frac{1}{a-x}=\frac{1}{a-b-(x-b)}=$

$=\frac{1}{a-b}\,\frac{1}{1-(x-b)/(a-b)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-b)^n}{(a-b)^{n+1}}$, $|x-b|<|a-b|$; 3° $\frac{1}{a-x}=-\frac{1}{x}\,\frac{1}{1-a/x}=-$

$-\sum_{n=0}^{\infty}a^n\left(\frac{1}{x}\right)^{n+1}$, $(|x|>|a|)$.

247. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{kn}$, $|x|<1$.   **248.** $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x+1)^n$, $(-2<x<0)$.

249. $e^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}$, $(-\infty<x<\infty)$.   **250.** $\ln x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}$, $(0<x\le 2)$.

251. $\cos^2 x=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{n-1}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!}$, $(|x|<\infty)$.

252. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$, $(|x|<\infty)$.   **253.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $|x|<\infty$.

254. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n a}{n!}x^n$, $(|x|<\infty)$.   **255.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{4^{n+1}}$, $(|x|<\sqrt{2})$.

256. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(1-4n)x^{n-1}$, $(|x|<1)$.   **257.** $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2^n}\sin\frac{n\pi}{4}\frac{x^n}{n!}$, $(|x|<\infty)$.

258. $x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $(|x|<1)$.   **259.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{3n}}{n!}$, $(|x|<\infty)$.

260. $\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{6^n}\right]x^n$, $(|x|<1)$.   **261.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(1+2^n)\frac{x^n}{n}$, $\left(-\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{2}\right)$.

262. $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\cos n\alpha$, $|x|<1$.   **263.** $\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sin n\alpha$, $(|x|<1)$.

264. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2}$, $(x|\le 1)$.   **265.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$, $(|x|\le 1)$.

266. $c+\ln|x|+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)\,(2n)!}$, $(x\ne 0)$.   **267.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $(|x|\le 1)$

268. $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $(|x|<1)$.   **269.** $x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $(|x|\le 1)$.

270. $2|x|\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n}}{2n+1}\right)$, $(|x|<1)$.

271. $x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n+1}}{(2n)!}$, $(|x|<\infty)$.   **272.** $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $(|x|<1)$.

273. $x+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{(4n^2-1)}$, $(|x|\le 1)$.   **274.** $4+\sum_{n=1}^{\infty}(2+2^n)\frac{x^n}{n!}$, $(|x|<\infty)$.

275. $2\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}$, $(|x|<1)$.   **276.** $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\cdots$

277. $e\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{4x^4}{4!}-\frac{31x^6}{6!}+\cdots\right)$ **278.** $1+x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{5x^4}{6}-\cdots$

279. Red je konvergentan po Leibnizovom testu. Greška po apsolutnoj vrednosti nije veća od prvog izostavljenog člana. Prema tome je $|R_{100}|<\frac{1}{101}$.

280. $R_n=\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots=\frac{x^n}{n!}\left(1+\frac{x}{n+1}+\frac{x^2}{(n+1)(n+2)}+\cdots\right)<\frac{x^n}{n!}\left(1+\frac{x}{x+1}+\frac{x^2}{(n+1)^2}+\frac{x^3}{(n+1)^3}+\cdots\right)=\frac{x^n}{n!}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{n+1}}$. $\left(\text{Ako se } n \text{ izabere tako da bude } \frac{x}{n+1}<1\right)$.

282. Za $x=1$ dobijamo $\pi=4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}$. Da bismo imali pet tačnih cifara mora bit $|R_n|<0{,}000005$. Iz toga sledi da je $n>400000$, što je praktično nemoguće sve sabrati Niz sporo konvergira ka π ($\pi=3{,}14159\ldots$).

283. 1° 0.9848; 2° 0,0175; 3° 0,7071; 4° 1,5708; 5° 0,1973; 6° 1,6487.

284. 0,94608.   **285.** 0,7468.   **286.** 0,1571.   **287.** 0,487.   **288.** 0,0214

289. ln 2. Uputstvo: u jednakosti $\ln(1+x)=\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ $(-1<x\le 1)$ staviti $x=1$.

290. $\frac{\pi^2}{6}-2\ln 2$. Uputstvo: $\frac{n-1}{n^2(2n-1)}=\frac{1}{n^2}-2\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$ pa iskoristiti još $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

291. $2e$. Uputstvo: koristiti jednakost $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $(|x|<\infty)$.

292. $3e^2$. Uputstvo: koristiti razvoj funkcije e^{2x} u stepeni red po x.

293. $-\ln(1-x)$.   **294.** $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x+\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}$ $(|x|<1)$.

295. $\operatorname{arc\,tg}\frac{2-2x}{1+4x}-\operatorname{arc\,tg} 2$ $\left(-\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}\right)$.   **296.** $x\operatorname{arc\,tg} x-\ln\sqrt{1+x^2}$, $(|x|<1)$.

297. $\frac{1+x}{(1-x)^3}$, $(|x|<1)$.   **298.** $(3+2x^2)e^{x^2}$ **299.** $e^x-2\frac{e^x}{x}+2\frac{e^x-1}{x^2}$.

300. $\pi^2/12$.   **301.** $\pi^2/6$.   **302.** $\pi^2/4$. Uputstvo: pokazati da je $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

303. $2-\frac{\pi^2}{6}$.   **304.** $\frac{\pi\ln a}{2a}$.   **306.** 2° $I(a)=\ln\frac{\operatorname{sh}\pi a}{\pi a}$.

307. $$I=\int_0^\infty\left[\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sum_0^\infty(-1)^n\frac{(ax)^{2n}}{(2n)!}\right]dx=\int_0^\infty\left(\sum_0^\infty(-1)^n\frac{e^{-\alpha x}-e^{\beta x}}{x}\frac{a^{2n}x^{2n}}{(2n)!}\right)dx=$$

$$=\underbrace{\int_0^\infty\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx}_{J_1}+\underbrace{\int_0^\infty\left(\sum(-1)^n\frac{(e^{-\alpha x}-e^{-\beta x})\,x^{2n-1}}{(2n)!}\right)dx.}_{J_2}$$

Jasno je da je za $x>0$:

$$\sum_1^\infty\frac{a^{2n}e^{-\alpha x}}{(2n)!}x^{2n-1}=\frac{1}{x}\sum_1^\infty\frac{e^{-\alpha x}(ax)^{2n}}{(2n)!},\quad S_n=\frac{1}{x}\sum_1^n\frac{e^{-\alpha x}(ax)^{2k}}{(2k)!}<\frac{1}{x}\sum_1^n\frac{(ax)^{2k}}{(2k)!}<$$

$<\frac{1}{x}(\operatorname{ch}ax-1)$. Kako je još $\sum_1^\infty\frac{e^{-\alpha x}a^{2n}x^{2n-1}}{(2n)!}=\frac{1}{x}\sum_1^\infty e^{-\alpha x}\frac{(ax)^{2n}}{(2n)!}$ (za $x>0$) a ovaj red po Dirichletovom testu uniformno konvergira po x $\left(\sum_1^\infty e^{-\alpha x}\right.$ uniformno konvergira po x a $\left.\frac{1}{x}\sum_{n=1}^\infty\frac{(ax)^{2k}}{(2k)!}<\frac{1}{x}(\operatorname{ch}ax-1).\right)$ Prema tome je

$$\int_0^\infty\sum_1^\infty(-1)^n\frac{a^{2n}e^{-\alpha x}}{(2n)!}x^{2n-1}dx-\int_0^\infty\sum_1^\infty(-1)^n\frac{a^{2n}e^{-\beta x}}{(2n)!}x^{2n-1}dx=$$

$$=\sum_1^\infty\frac{a^{2n}(-1)^n}{(2n)!}\int_0^\infty x^{2n-1}e^{-\alpha x}dx-\sum_1^\infty\frac{a^{2n}(-1)^n}{(2n)!}\int_0^\infty e^{-\beta x}x^{2n-1}dx.$$

Osim toga je $\int_0^\infty e^{-\alpha x}x^{2n-1}dx=e^{-\alpha x}\left[-\frac{x^{2n-1}}{\alpha}-\frac{(n-1)x^{2n-2}}{\alpha^2}-\cdots-\right.$

$$\left.-\frac{(2n-1)!}{\alpha^{2n}}\right]_0^\infty=\frac{(2n-1)!}{\alpha^{2n}}\text{ pa je }I_2=\sum_1^\infty\frac{(-1)^n a^{2n}}{(2n)!}\frac{(2n-1)}{\alpha^{2n}}-\sum_1^\infty\frac{a^{2n}(-1)^n(2n-1)!}{(2n)!\,\beta^{2n}}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_1^\infty\frac{(-1)^n\left(\frac{a^2}{\alpha^2}\right)^n}{n}-\frac{1}{2}\sum_1^\infty\frac{(-1)^n\left(\frac{a^2}{\beta^2}\right)^n}{n}=-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{a^2}{\alpha^2}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{a^2}{\beta^2}\right)=-$$

$$-\frac{1}{2}\ln\frac{\beta^2(a^2+\alpha^2)}{\alpha^2(a^2+\beta^2)}=-\frac{1}{2}\ln\frac{a^2+\alpha^2}{a^2+\beta^2}-\ln\frac{\beta}{\alpha}=\frac{1}{2}\ln\frac{\beta^2+a^2}{\alpha^2+a^2}-\ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

Kako je još $I_1=\int_0^\infty\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx=\ln\frac{\beta}{\alpha}$ (Froulanyev integral), to je za $-\min(\alpha,\beta)<a<\min(\alpha,\beta)$ $I=\frac{1}{2}\ln\frac{\beta^2+a^2}{\alpha^2+a^2}$.

308. Pošto je $\frac{4}{7}=0{,}5714285714285\cdots$ red ima oblik $\sum_{n=1}^\infty a_nx^n=5x+7x^2+x^3+4x^4+2x^5+$ $+8x^6+5x^7+7x^8+x^9+4x^{10}+2x^{11}+8x^{12}+5x^{13}+\cdots$

Kako je $1<a_n<8$ to je $R=\frac{1}{\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}=1$. Za $x=\pm1$ red divergira jer mu opšti član ne teži nuli. Članovi reda su oblika $5x^{1+6k}$, $7x^{2+6k}$, x^{3+6k}, $4x^{4+6k}$, $2x^{5+6k}$, $8x^{6+6k}$ $(k=0,1,2,\ldots)$ pa se delimična suma S_n može napisati u obliku $S_n=5x\frac{1-x^{6k_1}}{1-x^6}+7x^2\frac{1-x^{6k_2}}{1-x^6}+$ $+x^3\frac{1-x^{6k_3}}{1-x^6}+4x^4\frac{1-x^{6k_4}}{1-x^6}+2x^5\frac{1-x^{6k_5}}{1-x^6}+8x^6\frac{1-x^{6k_6}}{1-x^6}$, gde se $k_i\,(i=1,2,\ldots6)$ najviše mogu razlikovati za 1 i svi teže beskonačnosti kad $n\to\infty$. Prema tome je za $|x|<1$.

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{1-x^6}(5x+7x^2+x^3+4x^4+2x^5+8x^6)=\sum_{n=1}^\infty a_nx^n.$$

309. 1° $R=1$. Za $\lambda<-1$ red konvergira i kada je $x=1$. Za $\lambda<0$ red konvergira i kada je $x=-1$.

310. 1° Apsolutno konvergira za $|x|<1$ i svako α. Takođe, apsolutno konvergira, i za $x=\pm1$ ako je $\alpha<2$. Za $x=-1$ i $2<\alpha<3$ red uslovno konvergira. Uniformno konvergira u $[-1,1]$ za $\alpha<2$. 2° $S_n=\sum_{k=1}^n\frac{3k+2}{k(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^n\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}-\frac{2}{k+2}\right)=$ $=2-\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+2}$ pa je $S=2$.

311. 1° $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+a^n}{2^{n+1}+a^{n+1}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-\alpha n}(n+1)^{1-\alpha}$.

Kako za $n\to\infty$ imamo: $\frac{2^n+a^n}{2^{n+1}+a^{n+1}}\to\begin{cases}\frac{1}{2}, & |a|<2\\ \frac{1}{a}, & |a|>2\end{cases}$; $\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-\alpha}\to\frac{1}{e^\alpha}$;

$$(n+1)^{1-\alpha}\to\begin{cases}\infty, & \alpha<1\\ 1, & \alpha=1,\\ 0, & \alpha>1\end{cases}\text{ to je } R=\begin{cases}\infty, & \alpha<1\\ 0, & \alpha>1\\ \frac{1}{2e}, & \alpha=1,\ |a|<2\\ \frac{1}{|a|e}, & \alpha=1,\ |a|>2.\end{cases}$$

2° Za $\alpha=1$ i $a>2$ dobijamo poluprečnik $R=\frac{1}{ae}$. Ispitajmo konvergenciju redova:

$$S_+=\sum_{n=1}^\infty\frac{(2^n+a^n)n^n}{n!}\frac{1}{a^ne^n}\text{ i }S_-=\sum_{n=1}^\infty\frac{(2^n+a^n)n^n}{n!}\frac{(-1)^n}{a^ne^n}.$$

Koristeći $n! \sim n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}$ $(n\to\infty)$ imamo $\frac{(2^n+a^n)\,n^n}{n!}\,\frac{1}{a^n e^n} \sim$

$$\sim \frac{(2^n+a^n)\,n^n}{n^n n^{\frac{1}{2}} e^{-n}\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{a^n e^n} = \frac{2^n+a^n}{a^n}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,n^{1/2}} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n^{1/2}}}.$$

Pošto red $\sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,n^{1/2}}$ divergira, divergira i red S_+.

Za S_- primenimo Leibnizov test:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2^n+a^n}{2^{n+1}+a^{n+1}}\,\frac{ae}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > \frac{2^n+a^n}{2^{n+1}+a^{n+1}}\,\frac{ae}{e},$$

$\left(\text{jer je } \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e \text{ za } n>3\right)$. Kako je $a>2$ to je

$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{a\,2^n+a^{n+1}}{2^{n+1}+a^{n+1}} > 1.$ Pošto je još $a_n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,n^{1/2}}$ $(n\to\infty)$

sledi da a_n monotono teži nuli pa je S_- konvergentan.

3° Za $a=0$ i $a=-\frac{1}{3}$ dobijamo $f(x) = \sum_1^\infty \frac{2^n+\frac{(-1)^n}{3^n}}{n!}\,x^n = \sum_1^\infty \frac{2^n x^n}{n!} + \sum_1^\infty \frac{(-1/3)^n x^n}{n!} =$

$$= \sum_1^\infty \frac{(2x)^n}{n!} + \sum_1^\infty \frac{(-x/3)^n}{n!} = e^{2x}-1+e^{-\frac{x}{3}}-1 = e^{2x}+e^{-\frac{x}{3}}-2.$$

4° Za $\alpha=0$ dobijamo $\sum_1^\infty \frac{2^n+a^n}{n!}\,x^n = \sum_1^\infty \frac{(2x)^n}{n!} + \sum_1^\infty \frac{(ax)^n}{n!} = e^{2x}+e^{ax}-2.$

Stavljajući u zadnjoj jednakosti $a=-2$, nalazimo

$$\sum_1^\infty \frac{2^n+(-2)^n}{n!}\,x^n = \sum_1^\infty \frac{2\,2^{2k} x^{2k}}{(2k)!} = e^{2x}+e^{-2x}-2,$$

odakle je $\sum_1^\infty \frac{2^{2k}}{(2k)!}\,x^{2k} = \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2} - 1 = \operatorname{ch} 2x - 1.$

312. 1° $R = \lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \begin{cases} \infty, & \alpha > -1 \\ \frac{1}{3e}, & \alpha = -1 \\ 0, & \alpha < -1. \end{cases}$ 2° Za $x = \frac{1}{3e}$ red postaje $\sum_1^\infty \frac{3^n+n}{n!}\left(\frac{n}{3e}\right)^n.$

Kako je $a_n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,n^{1/2}}$, to ovaj red divergira. Za $x = -\frac{1}{3e}$ red postaje

$\sum_1^\infty \frac{(-1)^n (3^n+n)}{n!\,n^{-n}(3e)^n}$. Pošto je

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{3^n+n}{3^{n+1}+n+1}\,\frac{3e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > \frac{3^{n+1}+3^n}{3^{n+1}+n+1} > 1 \quad \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e\right),$$

i red je naizmeničnih znakova, on konvergira. 3° $f(x) = e^{3x}+xe^x-1.$

313. 1° ako se stavi $\frac{x-1}{x+1} = t$ dobija se stepeni red $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\,t^{2n+1}$ čiji je poluprečnik konvergencije $R=1$. Prema tome je funkcija $f(x)$ definisana za $0<x<\infty$. 2° $F(t) =$

$$= \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\,t^{2n+1} = \frac{1}{2}\left[t^2 \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}\,t^{2n-1}}{2n-1} - \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}\,t^{2n+1}}{2n+1}\right].$$

Označimo prvu sigmu sa $\varphi(t)$ a drugu sa $\psi(t)$. Tada je

$$\varphi'(t) = \sum_1^\infty (-1)^{n+1}\,t^{2n-2} = \frac{1}{1+t^2} \quad \text{odakle je } \varphi(t) = \operatorname{arc\,tg} t$$

$$\text{i } \psi'(t) = \sum_1^\infty (-1)^{n+1}\,t^{2n} = -\left[\frac{1}{1+t^2}-1\right] \quad \text{odakle je } \psi(t) = -\operatorname{arc\,tg} t + t.$$

Prema tome je $F(t) = \frac{1}{2}\left[t^2 \operatorname{arc\,tg} t + \operatorname{arc\,tg} t - t\right]$ i konačno

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{x+1} + \operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{x+1} - \frac{x-1}{x+1}\right].$$

3° Stavljajući $x = \frac{1}{2}$ u dokazanu jednakost:

$$-\frac{x-1}{x+1}\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{4n^2-1}\left[\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2\right]^n = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 \operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{x+1} + \operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{x+1} - \frac{x-1}{x+1}\right] \text{ dobijamo}$$

$$\frac{1}{3}\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{(4n^2-1)\,9^n} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{9}\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) + \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\right] \text{ odakle je}$$

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{(4n^2-1)\,9^n} = \frac{3}{2}\left[\frac{1}{3} - \frac{10}{9}\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right].$$

314. $R = \frac{1}{\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\operatorname{sh}(n+1)\,a|}} = \frac{1}{\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|e^{(n+1)a}-e^{-(n+1)a}|}{2}}} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{n+1}{n}a}}{\sqrt[n]{e^{2(n+1)a}-1}} = e^{-a}.$

Za $x = {}^{-a}$ opšti član reda je $a_n = \operatorname{sh}(n+1)\, a \cdot e^{-a} = \dfrac{e^a - e^{-(2n+1)a}}{2}$, odakle se vidi da ne teži nuli kad $n \to \infty$, pa red divergira na krajevima intervala konvergencije. 2° $x^2 - 2\operatorname{ch} ax + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = e^a\ x_2 = e^{-a}$.

$$\frac{1}{x^2 - 2\operatorname{ch} a x + 1} = \frac{1}{(x-x_1)\,(x-x_2)} = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x_2 - x} - \frac{1}{x_1 - x}\right) = \frac{1}{e^a - e^{-a}}\left[\frac{1}{e^{-a}}\cdot\frac{1}{1 - xe^a} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{e^a}\cdot\frac{1}{1 - xe^{-a}}\right] = \frac{1}{2\operatorname{sh} a}\left[e^a \sum_{n=0}^{\infty} e^{na} x^n - e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-na} x^n\right] = \frac{1}{2\operatorname{sh} a} \sum_{n=0}^{\infty} [e^{(n+1)a} -$$

$$- e^{-(n+1)a}]\, x^n = \frac{1}{2\operatorname{sh} a} \sum_{0}^{\infty} 2\operatorname{sh}(n+1)\, a x^n = \frac{1}{\operatorname{sh} a} \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sh}(n+1)\, a x^n.$$

315. 1° Cauchyevim testom nalazimo: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|r^n \cos n\theta|} = |r|$.

Prema tome prvi red konvergira apsolutno za $|r| < 1$ i $-\infty < \theta < \infty$. U ostalim tačkama red divergira. Slično se pokazuje da red $\varphi(r, \theta)$ apsolutno konvergira za $|r| < 1$ i

$-\infty < \theta < \infty$. 2° $f(r, \theta) + i\varphi(r, \theta) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} r^k (\cos k\theta + i \sin k\theta) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} r^k e^{k\theta i} =$

$$= \frac{1}{1 - re^{\theta i}} = \frac{1}{1 - r\cos\theta - ri\sin\theta} = \frac{1 - r\cos\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} + i\frac{r\sin\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}.$$

316. Jednakost sledi na osnovu geometrijskog značenja integrala $\int\limits_0^{\infty} \sin x^2\, dx$. Neka je, dalje, $J_k = \int\limits_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} |\sin x^2|\, dx\ (k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Tada je $J_{k+1} = \int\limits_{\sqrt{(k+1)\pi}}^{\sqrt{(k+2)\pi}} |\sin x^2|\, dx$. Smenom $x^2 = t^2 + \pi$ dobijamo

$$J_{k+1} = \int\limits_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} |\sin t^2| \frac{t}{\sqrt{t^2 + \pi}}\, dt < \int\limits_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} |\sin t^2|\, dt$$

tj. $J_{k+1} < J_k\ (k = 0, 1, 2, \ldots)$. Na osnovu Leibnizovog testa sledi da red

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int\limits_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} |\sin x^2|\, dx$ konvergira, tj. integral $\int\limits_0^{\infty} \sin x^2\, dx$ konvergira. Ovaj primer pokazuje da iz konvergencije integrala $\int\limits_a^{\infty} f(x)\, dx$ ne sledi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

317. Kao u prethodnom zadatku. **318.** Pokazati prvo da je $\int\limits_0^{\infty} (-1)^{E(x^2)}\, dx =$

$= \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \dfrac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$ a dalje kao u prethodnom zadatku.

319. $\int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} \dfrac{\sin^2 x}{x}\, dx = \pi \dfrac{\sin^2 \xi_k}{\xi_k}\ (k\pi < \xi_k < (k+1)\pi,\ k = 0, 1, 2, \ldots)$ ili $\xi_k = k\pi + \theta_k \pi$ gde je

$0 < \theta_k < 1$. Tada je

$$\int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx = \pi \frac{\sin^2 (k\pi + \theta_k \pi)}{k\pi + \theta_k \pi} = \frac{\sin^2 \theta_k \pi}{k\pi + \theta_k \pi} > \frac{\sin^2 \theta_k \pi}{k+1} > \frac{\sin^2 \theta_0 \pi}{k+1}.$$

(Može se pokazati da je $\theta_0 > \theta_1 > \theta_2 > \cdots$). Prema tome je

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx > \sin^2 \theta_0 \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}.$$

Kako zadnji red divergira, to i polazni integral divergira.

320. Uslovno konvergira. Apsolutno divergira. **323.** Ne.

324. 1° Funkcija ispunjava uslove za razvoj u Fourierov red u intervalu $(-\pi, \pi)$.

Po obrascu (2) imamo $a_n = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} x \cos nx\, dx = 0$ (Podintegralna funkcija je neparna).

Po obrascu (3) imamo: $b_n = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} x \sin nx\, dx = (-1)^{n+1} \dfrac{2}{n}$.

Prema obrascu (1) je $f(x) = 2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$.

2° Za $x \in (-\pi, \pi)$ važi $x = 2 \sum\limits_{1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{\sin nx}{n}$. 3° Na osnovu 2° sledi da je

$$\frac{\pi}{2} = 2 \sum_{1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} \qquad \left(\text{za } x = \frac{\pi}{2}\right).$$

Za $n = 2k\ (k = 1, 2, \ldots)$ svi članovi datog reda su jednaki nuli. Za $n = 2k-1$ opšti član reda postaje $(-1)^{2k} \dfrac{\sin\left(k\pi - \dfrac{\pi}{2}\right)}{2k-1} = \dfrac{-\cos k\pi}{2k-1} = (-1)^{k+1} \dfrac{1}{2k-1}$. Ovo važi za svako $k = 1, 2, 3, \ldots$ Prema tome je $\dfrac{\pi}{2} = 2 \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$.

325. 1° $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\pi.\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=$

$$=\frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}0, & n \text{ parno}\\ -\dfrac{4}{\pi n^2}, & n \text{ neparno.}\end{cases}$$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\sin nx\,dx=0$. Za $x\in(-\pi,\pi)$ važi $|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_0^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$

2° Za $x=0$ sledi $\sum_1^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

326. 1° $a_0=\frac{2\pi^2}{3}$, $a_n=\frac{4}{\pi n^2}\pi\cos n\pi=\frac{4(-1)^n}{n^2}$. $b_n=0$. Za $x\in[-\pi,\pi]$ važi

$x^2=\frac{\pi^2}{3}-4\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx$. 2° a) Za $x=\pi$ sledi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$; b) za $x=0$ sledi

$\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

327. 2° Na osnovu 1° imamo $a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos nx\,dx=0$, i $b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\,dx=\frac{1}{n}$.

Prema tome je $f(x)=\sum_1^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$. **328.** $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$ $x\in(0,2\pi)$.

329. $f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$ $x\in(0,2\pi)$. **330.** $\frac{a-b}{4}-\frac{2(a-b)}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}+$

$+(a+b)\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k}$. **331.** $\cos 3x$

332. $\frac{2\sin\pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n\sin nx}{n^2-a^2}$.

333. $\frac{e^l-e^{-l}}{2l}+l(e^l-e^{-l})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\frac{n\pi x}{l}}{l^2+n^2\pi^2}+\pi(e^l-e^{-l})\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n\sin\frac{n\pi x}{l}}{l^2+n^2\pi^2}$.

334. $\frac{2\,\mathrm{sh}\,a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a\cos nx}{a^2+n^2}\right]$. **335.** $\sum_{i=1}^{n}(a_i\cos ix+b_i\sin ix)$.

336. $\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx$. **337.** $\frac{36}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{25-36n^2}\sin nx$.

338. $\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n^2}$. **339.** $\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}$.

340. $\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\sin(2k+1)\pi}{(2k+1)^2}$.

Uputstvo: Pored razvoja funkcije arc sin (sin x) u intervalu $(-\pi,\pi)$ naći razvoj ove funkcije u intervalu $(-\pi/2,\pi/2)$.

341. $\frac{8}{15}\pi^4+48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}\cos nx$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}=\frac{7\pi^4}{720}$.

342. $a_0=\frac{2}{l}\int_0^l x^2\,dx=\frac{2l^2}{3}$. $a_k=\frac{4l^2(-1)^k}{k^2\pi^2}$, $b_k=0$.

$$f(x)=\frac{l^2}{3}+\frac{4l^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos\frac{k\pi x}{l}.$$

Za $x=l\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$. Za $x=0\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}=\frac{\pi^2}{12}$. **344.** $-\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$.

345. $-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}$. **346.** $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\sin nx$ $(|\alpha|<1)$.

347. $1+2\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\cos nx$ $|\alpha|<1)$. **348.** $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\cos nx$ $(|\alpha|<1)$.

349. 1° $\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2}}{(2n+1)^2}$; 2° $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$.

Uputstvo: pod 1° $f(x)$ neparno produžiti na interval $(-2,2)$ a pod 2° ($f(x)$ parno produžiti na interval $(-2,2)$.

350. $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n\sin nx}{4n^2-1}$. **351.** $-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)\sin(2n-1)x}{4-(2n-1)^2}$.

352. $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left\{\frac{\pi^2}{n}+\frac{2}{n^3}[(-1)^n-1]\right\}\sin nx$.

353. $1-\frac{\cos x}{2}+2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n^2-1}$. **354.** $\frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}\right]$.

355. $\frac{e^{a\pi}-1}{a\pi}+\frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(-1)^n e^{a\pi}-1]\cos nx}{a^2+n^2}$.

356. $\frac{2}{3}-\frac{9}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi x}{n^2}$.

357. $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos nx}{n}$; $x^3 = 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} + 12\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin nx}{n^3}$;

$$x^4 = \frac{1}{5}\pi^4 + 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} + 48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}\cos nx.$$

359. 1° Pođimo od $e^{x\operatorname{ctg} a}(\cos x + i\sin x) = e^{x(i+\operatorname{ctg} a)} = F(x)$.

Kako je $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\operatorname{ctg} a + i)^n}{n!}x^n$ i $(\operatorname{ctg} a + i)^n = \frac{\cos na + i\sin na}{\sin^n a}$

dobijamo: (1) $e^{x\operatorname{ctg} a}\sin x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin ka}{k!\sin^k a}x^k$; (2) $e^{x\operatorname{ctg} a}\cos x = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos ka}{k!\sin^k a}x^k$.

2° Za $x = \sin ax$ iz (2) sledi $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos ka}{k!} = e^{\cos a}\cos\sin a - 1$, a iz (1)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin ka}{k!} = e^{\cos a}\sin\sin a.$$

3° Iz 2° sledi $e^{\cos x}\cos\sin x = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k!}$ i $e^{\cos x}\sin\sin x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k!}$.

360. $P_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)(1 - 1/3^2)(1 - 1/4^2)\cdots(1 - 1/n^2) = (1 - 1/2)(1 + 1/2)(1 - 1/3)$

$$(1 + 1/3)\cdots(1 - 1/n)(1 + 1/n) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}.$$

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\,\frac{n+1}{n} = 1/2.$$ 368. [illegible]

370. Divergira. 371. Konvergira za [illegible] vergira.

373. Konvergira za $|x| < 3$. [illegible]

375. Divergira jer je $\lim_{n\to\infty}$ [illegible] $= e \neq 1$. 376. Konvergira.

377. Konvergira za $a > \frac{1}{2}$. 378. Konvergira za $|a| < 1$.

379. Konvergira uslovno. [illegible] apsolutno za [illegible] uslovno za $\frac{1}{2} < a < 1$. 381. Divergira. 382. Divergira.

387. Uputstvo: pokazati da je $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \Big/ \left(1 + \frac{x}{n}\right) \sim 1 + \frac{x(x-1)}{2n^2}$ i primeniti zadatak 384.

388. Da.

Glava II

399. $\|x \pm y\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(\xi_i \pm \eta_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\eta_i^2 \pm 2\sum_{i=1}^{n}\xi_i\eta_i$.

Prema tome je $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\sum_{i=1}^{n}\xi_i\eta_i$.

401. Iz $x_k \to x$ sledi da za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji N takvo da je $d(x_k, x) < \varepsilon$ čim je $k > N$ tj. $(\xi_1^k - \xi_1)^2 + (\xi_2^k - \xi_2)^2 + \cdots + (\xi_n^k - \xi_n)^2 < \varepsilon^2$ za $k > N$. Odavde sledi da je

(1) $$(\xi_i^k - \xi_i)^2 < \varepsilon^2 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

kad god je $k > N$. Neka je sada ispunjen uslov (1) tj. neka za proizvoljno $\varepsilon > 0$ i svako i postoji N_i tako da je (1) ispunjen čim je $k > N_i$. Iz (1) sledi

$$(\xi_1^k - \xi_1)^2 + \cdots + (\xi_n^k - \xi_n)^2 < n\varepsilon^2$$

čim je $k > \max(N_1, N_2, \ldots, N_n)$ odnosno (2) $d(x_k, x) < \varepsilon\sqrt{n}$. Ako se u (1) umesto ε stavi $\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ na desnoj strani u (2) imaćemo samo ε, tj. za bilo koje $\varepsilon > 0$ postoji N tako da je $d(x_k, x) < \varepsilon$ čim je $k > N$.

407. $y > -x$. 408. Krug $x^2 + y^2 < 4$. 409. $|x| < 1 \wedge |y| > 1$.

410. $x < y < x + 1$ i $x < 0$ ili $x + 1 < y < \infty$ i $x > 0$. 411. $x^2 + y^2 = R^2$. 412. $xy > 0$.

413. Skup prstena $2n < x^2 + y^2 < 2n + 1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. 414. $|x| < |y|$ $(y \neq 0)$.

415. Spoljašnjost konusa $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ zajedno sa granicama izuzev koordinatnog početka.

416. Prostor sa jedne strane ravni $x + y + z - 1 > 0$. 417. $x \neq a$, $y \neq b$, $z \neq c \wedge x > 0$.

418. Unutrašnjost sfere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. 419. Familija paralelnih pravih $ax + by - c = 0$.

420. Familija elipsa $\frac{x^2}{a^2 c} + \frac{y^2}{b^2 c} = 1$ $(c > 0)$ i koordinatni početak za $c = 0$.

421. $\frac{x^2}{a^2 c} - \frac{y^2}{b^2 c} = 1$, $c \neq 0$; $(0, 0)$, $c = 0$. 422. Familija kvadrata $|x| + |y| = c$.

423. Familija hiperbola $xy = c$ $(c > 0)$. 424. Familija krugova $x^2 + y^2 = \operatorname{Arc}\sin c$.

425. Prvi i treći kvadrant, drugi i četvrti kvadrant i koordinatne ose.

426. $(x-c)^2+y^2=c^2$ $(c\neq 0)$.

427. Familija kvadrata čije su stranice paralelne osama i čiji centar je koordinatni početak za $z>0$. Za $z=0$ tačka $(0, 0)$.

428. Koncentrični krugovi čiji je centar koordinatni početak.

429. Prave koje prolaze kroz koordinatni početak.

430. Familija ravni $ax+by+cz+d-k$ gde je k parametar.

431. Familija elipsoida $\dfrac{x^2}{a^2k}+\dfrac{y^2}{b^2k}+\dfrac{z^2}{c^2k}=1$ za $k>0$ i tačka $(0, 0, 0)$ za $k=0$.

432. Zavisno od znakova brojeva a, b, c nivo površi mogu biti elipsoidi ili hiperboloidi

433. Familija površi oktaedara čiji je centar tačka $(0, 0, 0)$ i temena na koordinatnim osama

434. Rotaciona površ nastala rotacijom krive $z=f(x)$, $y=0$ oko z-ose.

435. Rotaciona površ nastala rotacijom krive $y=f^{-1}(z^2)$, $x=0$ oko y-ose.

436. Cilindrična površ čija je direktrisa kriva $z=f(y)$, $x=0$ a izvodnica paralelna pravo $y=-\dfrac{a}{b}x$, $z=0$.

437. Konusna površ sa vrhom u tački $(1, 0, 1)$ i direktrisom $z=f(y)$, $x=0$.

438. Konoidna površ čije su direktorne krive z-osa i $z=f(y)$, $x=1$ a direktorna ravan $z=0$

439. $f(t)=-t$. 440. 1° $z=-\ln(\cos x\cos y)$; 2° $\cos x\cos y=c$.

441. 1° -1; 2° 1.

442. Neka se tačka (x, y) približava tački $(0, 0)$ po pravoj $y=kx$ gde je k data konstanta. Tada je $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\dfrac{1-k^2}{1+k^2}$. Odavde se vidi da za različite vrednosti konstante k imamo različite vrednosti $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

443. Ne. Primer: $f(x, y)=(x+y)\cdot\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ gde je $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x, y)=0$ ali ni jedan ponovljeni limes ne postoji.

445. Ne postoji 446. 0. 447. 1° Ne postoji; 2° 0. 448. a.

449. $\dfrac{1}{2a}$. 450. Ne postoji. 451. e. 452. 1° 0; 2° Ne postoji.

453. $|y|>|x|$. 454. Neprekidna za $-\infty<x<\infty$, $-\infty<y<\infty$.

455. Neprekidna za $y\neq x$. 456. Prekidna je u tački $(0, 0)$ i na krugu $x^2+y^2=1$.

457. Otklonjivi prekidi u tačkama gde je $y=-x$ i $x\neq 0$. Prekidna u tački $(0, 0)$.

458. Prekidna u tački $(0, 0, 0)$.

459. Prekidna u tačkama koordinatnih ravni: $z=0$, $x=0$, $y=0$. 460. Neprekidna svuda.

461. Prekidna u tački $(0, 0)$. 462. Skup tačaka sa celobrojnim koordinatama.

463. Neka su $M'(x', y')$ i $M''(x'', y'')$ takve da je $d(M', M'')<\delta$ tj. $(x'-x'')^2+(y'-y'')^2<\delta^2$ i $\delta=\varepsilon/(|a|+|b|)$, $\varepsilon>0$ proizvoljno. Tada je $|f(x', y')-f(x'', y'')|=|a(x'-x'')+b(y'-y'')|<|a|\,|x'-x''|+|b|\,|y'-y''|<|a|\delta+|b|\delta=(|a|+|b|)\delta=\varepsilon$.

464. Uniformno neprekidna u svakoj oblasti $r^2<x^2+y^2<R^2$, ali nije uniformno neprekidna u oblasti $0<x^2+y^2<R^2$.

465. Neprekidna ali nije uniformno neprekidna.

468. $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Za $x=1$ i $y=1$ dobijamo $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

470. Ne. Primer: funkcija $f(x, y)=\sqrt{xy}$ u tački $(0, 0)$ ima $f_x'(0, 0)=0$ i $f_y'(0, 0)=0$.

471. Ne postoji i funkcija nije diferencijabilna u tački $(0, 0, 0)$.

472. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x-4xy^2$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=2y-4x^2y$. 473. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{y}-\dfrac{y}{x^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{y^2}$.

474. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{x+y^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{2y}{x+y^2}$. 475. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=yx^{y-1}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^y\ln x$.

476. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x^2+y^2-2x}{(x^2+y^2)^2+(x+y)^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{x^2+y^2-2y}{(x^2+y^2)^2+(x+y)^2}$.

477. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{2x}{x^2+y^2+z^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{2y}{x^2+y^2+z^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{2z}{x^2+y^2+z^2}$.

478. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{z}{x}\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{z}{x}\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=\left(\dfrac{x}{y}\right)^z\ln\dfrac{x}{y}$.

479. $\dfrac{\partial u}{\partial \xi_k}=\dfrac{\prod\limits_{i=1}^{n}\xi_i}{\xi_k}$ $(k=1, 2, \ldots n)$.

480. $\dfrac{\partial u}{\partial \xi_k}=u\prod\limits_{i=1}^{n}\xi_i\left(\dfrac{\ln\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i}{\xi_k}+\dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i}\right)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$.

481. 1° $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2-4y^2$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\cancel{2x}-8xy$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2-4x^2$;

2° $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y^2e^{xy}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=(1+xy)e^{xy}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2e^{xy}$;

3° $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$;

4° $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=e^{x+y}(\cos e^{x+y}-e^{x+y}\sin e^{x+y})$.

482. $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=24,\ \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y}=0,\ \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}=-16.$

483. $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}=e^{xyz}(1+3xyz+x^2y^2z^2).$ 484. $p!\,q!\,r!.$

485. $\frac{(k+1)(k+2)\cdots(k+n-1)}{n-1}.$ 500. $du=2xy\,dx+x^2\,dy.$

501. $du=\frac{1}{(x-y)^2}(x^2\,dx-y^2\,dy).$ 502. $du=(ydx+xdy)\cos xy.$

503. $du=\frac{x}{x^2+y^2}(xdy-ydx).$ 504. $du=\frac{(x^2+y^2)\,dz-2z\,(xdx+ydy)}{(x^2+y^2)^2}.$

505. $du=\prod_{i=1}^{n}\xi_i \sum_{i=1}^{n}\frac{d\xi_i}{\xi_i}.$ 506. 1,32. 507. 0,01. 508. 1,05.

510. Neka je $x=\varrho\cos\theta,\ y=\varrho\sin\theta$. Za $(x,y)\to(0,0)$ sledi $\varrho\to 0$ za proizvoljno θ pa je $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{\varrho\to 0}\varrho\sin\theta\cos\theta=0$. Prema tome je $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$, $f_x'(0,0)=$ $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$. Takođe je $f_y'(0,0)=0$. $\Delta f(0,0)=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=$ $=\frac{\Delta x\,\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0\,dx+0\,dy+\gamma$. Međutim je $\lim\limits_{\varrho\to 0}\frac{\gamma}{\varrho}=\lim\limits_{\varrho\to 0}\frac{\varrho^2\sin\theta\cos\theta}{\varrho^2}=\sin\theta\cos\theta$ pa γ nije jednako $o(\varrho)$. 511. Ne.

512. $d^2u=d(du)=d[(3x^2-6xy+3y^2)\,dx+(3y^2-3x^2+6xy)\,dy]=$
$=(6x-6y)(dx)^2+(6y-6x)\,dxdy+(6y-6x)\,dxdy+(6x+6y)(dy)^2=$
$=(6x-6y)(dx)^2+2(6y-6x)\,dxdy+(6x+6y)(dy)^2=$
$=6[(x-y)(dx)^2+2(y-x)\,dxdy+(x+y)(dy)^2.$

513. $d^3u=d(d^2u)=6[(dx)^3-(dx)^2dy-2(dx)^2dy+2dx(dy)^2+dx(dy)^2+(dy)^3]=$
$=6[dx^3-3dx^2dy+3dxdy^2+dy^3].$

514. $d^3u=\left(dx\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(3)} f(x,y)=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}dx\,dy^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3.$

515. $d^4u=\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}(\sin x)^{(4-k)}(\cos y)^{(k)}\,dx^{4-k}\,dy^k.$

516. $d^n u=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\varphi^{(n-k)}_{(x)}\psi^{(k)}_{(y)}\,dx^{n-k}\,dy^k.$

519. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{v}{wy}(3x+2w\ln w);\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2xv}{wy^2}(y+w\ln w).$

520. $du=f'(t)\,dt=f'(t)\,d(ax+by)=f'(t)\,(adx+bdy),$
$d^2u=f''(t)\,dt^2=f''(t)\,(adx+bdy)^2,\ t=ax+by.$

521. $du=\left(\sin y\cos z+x\cos y\cos z\frac{2x}{x^2+1}-x\sin y\sin z\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx,$
$d^2u=\left(x\sin\ln(x^2+1)\cos\sqrt{1-x^2}\right)''\,dx^2.$

522. $du=2\cos(u,v,w)\ (2xdx+ydx+xdy),$
$d^2u=-4\sin(u,v,w)[4x^2dx^2+y^2dx^2+2xydxdy+x^2dy^2+$
$+4x^2ydxdy+4xydx^2]+4\cos(u,v,w)(dx^2+dxdy).$

524. $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ \frac{v}{a} & \frac{u}{a}\end{vmatrix}=\frac{u-v}{a}.$

525. $4(u^2+v^2).$ 526. 2. 527. ϱ. 528. $\frac{1}{u(u+v)}.$ 529. $\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,h)}=r.$

530. $r^2\cos\varphi.$ 531. $\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)}=\alpha\beta abcr^2\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\psi\cos^{2\beta-1}\psi\sin^{\beta-1}\psi.$

533. Jeste. 534. $\{(u,v):\ a-\alpha<u<b-\alpha,\ c-\beta<v<a-\beta\}.$

535. $\{(\varrho,\theta):\ 1<\varrho<2,\ 0<\theta<2\pi\}.$

536. $\left\{(\varrho,\theta):\ \varrho\in[0,a\sqrt{\sin 2\theta}]\wedge\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]\right\}.$

537. $\{(\varrho,\theta):\ \varrho\in[0,\ a\sqrt{\sin^4\theta+\cos^4\theta})\wedge\theta\in(0,\ 2\pi]\}.$

538. $\{(\varrho,\theta):\ \varrho\in[0,1]\wedge\theta\in[0,\ 2\pi]\}$

539. $\left\{(r,\varphi,\psi):\ r\in[0,R]\wedge\varphi\in[0,\ 2\pi]\wedge\psi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right\}.$

540. $\left\{(r,\varphi,\psi):\ r\in[0,R]\wedge\varphi\in[0,\ 2\pi]\wedge\psi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right\}.$

541. 1° U tački (1, 2, 0, 0) funkcija $F_1(x,y,u,v)=xe^{u+v}+2uv-1$, i $F_2(x,y,u,v)=ye^{u-v}-$ $-2x-\frac{u}{1+v}$ se anuliraju;

2° u tački (1, 2, 0, 0) egzistiraju dF_1 i dF_2;

3° $\frac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v}\\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}xe^{u+v}+2v & ye^{u-v}-\frac{1}{1+v}\\ xe^{u+v}+2u & -ye^{u-v}+\frac{u}{(1+v)^2}\end{vmatrix}.$

Za $x=1,\ y=2,\ u=0,\ v=0$ dobijamo $\frac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-2\neq 0.$

542. Da. 543. 1° $-\frac{b^2x}{a^2y}$; 2° $\frac{y^x\ln y-yx^{y-1}}{x^y\ln x-xy^{x-1}}$; 3° $-\frac{y}{x}$.

546. $-\frac{c^2}{u}\left(\frac{x\,dx}{a^2}+\frac{y\,dy}{b^2}\right)$. 547. $\frac{u(y\,dx+u\,dy)}{y(x+u)}$.

548. $-\frac{1}{\sin 2x}(\sin 2x\,dx+\sin 2y\,dy)$. 549. $-\frac{u^2(dx+dy)-z^2\,dz}{u[2(x+y)-u]}$.

550. $du=\frac{(\sin v+x\cos v)\,dx-(\sin u-x\cos v)\,dy}{x\cos v+y\cos u}$,

$$dv=-\frac{(\sin v-y\cos u)\,dx}{x\cos v+y\cos u}+\frac{(\sin u+y\cos u)\,dy}{x\cos v+y\cos u}.$$

551. $du=\frac{1}{2}(dx+dy)$, $dv=\frac{\pi}{4}dy-\frac{1}{2}(dx-dy)$. 552. $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{a}{c}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{b}{c}$. 553. Da.

554. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sin v}{e^u(\sin v-\cos v)+1}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-\cos v}{e^u(\sin v-\cos v)+1}$,

$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\cos v-e^u}{u[u(\sin v-\cos v)+1]}$, $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\sin v+e^u}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]}$. 555. $y'=\frac{(u-x)(x-z)}{(z-y)(u-y)}$.

559. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{I_2}{I_1}\frac{\partial g}{\partial y}$, $I_1=\frac{D(g,h)}{D(z,t)}$, $I_2=\frac{D(h,f)}{D(z,t)}$.

560. $y_z'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{x^2}y_t'=-t^2y_t'$. $y_z''=\frac{dy_z'}{dx}=\frac{d(-t^2y_t')}{dt}\frac{dt}{dx}=(2ty_t'+t^2y_t'')t^2$.
Uvođenjem ovih izraza u jednačinu ona postaje $y''+t=0$.

561. $y''-(\alpha+\beta)y'+\alpha\beta y=0$. 562. $x^{IV}=0$. 563. $u''+8u(u')^3=0$.

565. $K=\frac{|\varrho^2+2\varrho'^2-\varrho\varrho''|}{(\varrho^2+\varrho'^2)^{3/2}}$. 567. $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial v}$. 568. $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{1}{2}$. 573. $\frac{\partial w}{\partial v}=0$.

574. $\frac{\partial w}{\partial u}=e^{2u}\left(1-\frac{\partial w}{\partial v}\cos^2 v\right)$. 575. $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0$. 576. $\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}=0$.

579. $w_1=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2$, $w_2=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$.

581. $\frac{\partial f}{\partial x}=2Ax+Cy+E$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2A$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=C$, $\frac{\partial f}{\partial y}=2By+Cx+F$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2B$.

582. $T_2(x,y)=1+2(x-1)-(y-1)-8(x-1)^2+10(x-1)(y-1)-3(y-1)^2$.

583. $f(x,y)=1+x+y-\frac{1}{2}x^2-xy-\frac{1}{2}y^2+R_2(x,y)$.

584. $f(x,y)=1-\frac{1}{2}(x^2+y^2)-\frac{1}{8}(x^2+y^2)^2$.

585. $f(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^m(y-1)^n}{m!\,n!}$ $(|x|<\infty,\ |y|<\infty)$.

586. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}-y^{2n-1}}{2n-1}$. 587. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+y)^n-x^n-y^n}{n}$. 591. (1/2, −1). 592. (6, 4, 10).

593. $\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-6y$. $\frac{\partial u}{\partial y}=24y^2-6x$. Iz $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ i $\frac{\partial u}{\partial y}=0\Rightarrow x_1=0,\ y_1=0;\ \ x_2=1, y_2=\frac{1}{2}$.
Kako je još, za tačku (0, 0) $A=0$, $B=-6$, $C=0$, $D<0$ to u tački (0, 0) nema ekstremuma. Za tačku $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ je $A=6$, $D>0$ pa je u tački $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ minimum funkcije koji iznosi $u\left(1,\frac{1}{2}\right)=4$.

594. Za $c>0$: $\max u=u\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right)=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Za $c<0$: $\min u=u\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right)=-\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

595. Nema ekstremuma. 596. $\max u=u(4,4)=15$.

597. $\min u=u(0,-2)=-\frac{2}{e}$. 598. $\max u=u(6,4)=5\ln 2$.

599. Nema ekstremuma. 600. $\min u=u\left(\frac{1}{2},1,1\right)=4$.

601. $\min u=-\sqrt{a^2+b^2}$ za $x=-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y=\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$;

$\max u=\sqrt{a^2+b^2}$ za $x=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

602. $\min u=u\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)=-3$; $\max u=u\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=3$.

603. $\max u=u(2,4)=32$; $\min u=u(0,0)=0$.

604. $\max u=u(4,0)=u(0,4)=91$; $\min u=u(3,3)=0$.

605. $B(1,0)$, $C(0,1)$. 607. Sabirci su jednaki.

608. Ivice paralelepipeda su $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, $\frac{2b}{\sqrt{3}}$, $\frac{2c}{\sqrt{3}}$.

609. Ivice paralelepipeda su $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. 612. $\left(9,\frac{1}{8},\frac{3}{8}\right)$; $\left(-9,-\frac{1}{8},-\frac{3}{8}\right)$.

613. $f(x,y)=ax^2+x^3-y^2$. Iz $f_x'\equiv 2ax+3x^2=0$, $f_y'\equiv -2y=0$ sledi $x_1=0$, $y_1=0$; $x_2=-\frac{2}{3}a$, $y_2=0$. Druga tačka ne pripada datoj krivoj pa je jedina singularna tačka $O(0,0)$. U toj tački je $A=2a$, $B=0$, $C=-2$, $D=-4a$. Prema tome je tačka (0, 0): Za $a>0$ dvostruka tačka, za $a<0$ izolovana tačka i za $a=0$ povratna tačka prve vrste.

614. (0, 0) izolovana tačka.

615. (0, 0) povratna tačka druge vrste.

616. $(0, a)$ povratna tačka prve vrste.

617. (0, 0) izolovana tačka

618. $(-a, 0)$ dvostruka tačka.

619. (0, 0) dvostruka tačka

620. (0, 0) dvostruka tačka.

621. i **622.** (0, 0) dvostruka tačka.

623. (a, a^2) povratna tačka.

624. (0, 0) povratna tačka druge vrste.

625. Ako između a, b i c nema jednakih, tada nema singularnih tačaka. Ako je $a<b=c$, tada je $(b, 0)$ dvostruka tačka; ako je $a=b=c$ tada je $(a, 0)$ povratna tačka prve vrste, ako je $a=b<c$ tada je $(a, 0)$ izolovana tačka.

Glava III

626. $I(m)$ je neprekidna za $m=0$. **627.** 1° $\frac{\pi}{4}$; 2° $\frac{8}{3}$; 3° 1; 4° $\ln \frac{2e}{1+e}$.

629. Ne može. **630.** Kako je $\int\limits_0^\pi \cos mx\,dx = \frac{1}{m}\sin mx\Big|_0^\pi = \frac{1}{m}\sin m\pi$, to je $\left(\frac{1}{m}\sin m\pi\right)'_m = -\frac{1}{m^2}\sin m\pi + \frac{\pi}{m}\cos m\pi$. S druge strane je $(\cos mx)'_m = -x\sin mx$, pa je $\int\limits_0^\pi (-x\sin mx)\,dx = \left(\frac{x}{m}\cos mx - \frac{1}{m^2}\sin mx\right)\Big|_0^\pi = \frac{\pi}{m}\cos m\pi - \frac{1}{m^2}\sin m\pi$, što je i trebalo dokazati. **631.** Ne može. **632.** $I'(x) = 2xe^{-x^5} - e^{-x^3} - \int\limits_x^{x^2} y^2 e^{-xy^2}dy$.

633. 1° $-(e^{a|\sin a|}\sin a + e^{a|\cos a|}\cos a) + \int\limits_{\sin a}^{\cos a} \sqrt{1-x^2}\, e^{a\sqrt{1-x^2}}dx$; 2° $\frac{2}{a}\ln(1+a^2)$;

3° $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+a}\right)\sin a(b+a) - \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+a}\right)\sin a(a+a)$; 4° $f(a, -a) + 2\int\limits_0^a f'_u(u, v)\,dx$, gde je $u=x+a$ i $v=x-a$; 5° $2a\int\limits_{a^2-a}^{a^2+a} \sin(y^2+a^4-a^2)\,dy + 2\int\limits_0^{a^2} \sin 2x^2\cdot\cos 2ax\,dx -$

$-2a\int\limits_0^a dx \int\limits_{x-a}^{x+a} \cos(x^2+y^2-a^2)\,dy$. **634.** $I''(x) = 3f(x) + 2xf'(x)$.

635. $I''(x) = 2f(x)$, ako $x\in(a, b)$ i $I''(x) = 0$, ako $x\overline{\in}(a, b)$ **636.** $I''(x) = \frac{\Delta^2 f(x)}{h^2}$, gde je $\Delta^2 f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h)$. **637.** $I^{(n)}(x) = (n-1)!\,f(x)$.

638. Polazimo od jednačine $y'' = f(x)$, gde je $f(x)$ data neprekidna funkcija u nekom intervalu $[a, b]$, a $y(x)$ tražena funkcija. Posle prve integracije dobijamo

$$y'(x) = \int\limits_{x_0}^x f(t)\,dt + c_1,$$

a posle druge

$$y(x)=c_0+c_1(x-x_0)+\int_{x_0}^{x}dt\int_{x_0}^{t}f(t_1)\,dt_1,$$

gde su c_0 i c_1 dve proizvoljne konstante. Ako se u obadve strane dobijenih jednakosti stavi $x=x_0$, gde je x_0 neka vrednost iz zadatog intervala, vidi se da je $c_0=y(x_0)$, a $c_1=y'(x_0)$. Dobijeni izraz je najopštija funkcija koja zadovoljava jednačinu $y''=f(x)$. No ona se može predstaviti i u obliku, koji je često podesan u primeni:

$$y(x)=c_0+c_1(x-x_0)+\int_{x_0}^{x}(x-t)f(t)\,dt.$$

što se možemo uveriti diferenciranjem po x koje u integralu na desnoj strani figuriše kao parametar, pošto je promenljiva integracije t. Kako x figuriše i u gornjoj granici integracije, dobija se da je

$$y'(x)=c_1+\int_{x_0}^{x}\frac{\partial(x-t)}{\partial x}f(t)\,dt=c_1+\int_{x_0}^{x}f(t)\,dt$$

Primenom istog pravila dobija se dalje $y''=f(x)$ jer integrand $f(t)$ ne savisi od x, a izvod gornje granice po parametru daje 1. Sličnim postupkom može se rešiti i postavljeni zadatak za jednačinu $y^{(n)}=f(x)$.

640. $a_i=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}y(x)\cos ix\,dx;\quad b_i=\int_0^{2\pi}y(x)\sin ix\,dx.$

641. $\frac{dE}{dk}=\frac{E-F}{k};\ \frac{dF}{dk}=\frac{E}{k(1-k^2)}-\frac{F}{k}.$ **645.** $I''_{xy}(x,y)=x(2-3y^2)f(xy)+\frac{x}{y^2}f\left(\frac{x}{y}\right)+$

$+x^2y(1-y^2)f''(xy).$ **648.** Izvod integrala $I(m)=\int_0^1\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{m}dx$ po parametru m

u oblasti $(0<x<1,\ 0<m<a)$ biće

$$I'(m)=-\int_0^1\frac{x\,dx}{x^2+m^2}=-\frac{1}{2}\ln\frac{m^2}{1+m^2},\quad \lim_{m\to0}I'(m)=-\infty,$$

što je lako proveriti, jer je

$$I(m)=\int_0^1\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{m}dx=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{m}+\frac{1}{2}m\ln\frac{m^2}{1+m^2}.$$

649. Izvod integrala

$$I(\alpha)=\int_0^1\frac{\operatorname{arc\,tg}\alpha x}{x\sqrt{1-x^2}}dx,$$

po parametru α biće

$$I'(\alpha)=\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2\alpha^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

odakle je

$$I(\alpha)=\frac{\pi}{2}\ln\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2+1}\right)+c.$$

Kako je $I(0)=0$ to je $c=0$:

$$I(\alpha)=\frac{\pi}{2}\ln\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2+1}\right),\quad I(1)=\frac{\pi}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Treba napomenuti da integral konvergira u odnosu na promenljivu x za singularnu tačku $x=1$. **650.** $I(m)=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}m\cdot\ln(1+m^2)+c.$

651. $I(y)=\ln(x^2+y^2)\,dx=\ln(1+y^2)-2+2y\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{y}$, odakle je $I'(y)=2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{y}$,

$\lim_{y\to0}I'(y)=\pi.$ **652.** $I(r)=\begin{cases}0, & \text{za } |r|\le1,\\ 2\pi\ln r, & \text{za } |r|>1.\end{cases}$

653. $I(\alpha)=\frac{\pi}{2}\ln(\alpha+1),\ c=0.$ **654.** $I(m)=-\left(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-m}{1+m}}\right).$

655. Ako se pođe od integrala $I(y)=\int_0^1x^y\,dx=\frac{1}{y+1}$ i diferencira n puta po y, dobiće se

$$I^n(y)=\int_0^1x^y(\ln x)^n\,dx=\frac{(-1)^n n!}{(y+1)^{n+1}},\ (y>-1).$$

656. Dati integral je neprekidna funkcija parametra α u intervalu $0<\alpha<\infty$. Zaista, neka su α_0 i α_1 proizvoljni brojevi koji zadovoljavaju uslov $0<\alpha_0<\alpha<\alpha_1$. Pošto je podintegralna funkcija neprekidna u pravougaoniku R: $\alpha_0\le\alpha\le\alpha_1$, $a\le x\le b$, sledi da je funkcija $I(\alpha)$ neprekidna u tački α. U to se možemo ubediti i neposrednim izračunavanjem:

$$I(\alpha)=\frac{1}{\alpha}\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{\alpha}.$$

Pošto podintegralna funkcija ima neprekidan izvod po α u R, onda izvod $I'(\alpha)$ može biti nađen diferenciranjem pod znakom integrala:

$$I'(\alpha)=-\int_0^b\frac{2\alpha\,dx}{(\alpha^2+x^2)^2}.$$

S druge strane je

$$I'(\alpha)=-\frac{1}{\alpha^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}\frac{b}{\alpha^2+b^2}.$$

Upoređujući dobijene rezultate, dobijamo

$$(1)\qquad \int_0^b\frac{dx}{(\alpha^2+x^2)^2}=\frac{1}{2\alpha^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{\alpha}+\frac{b}{2\alpha^2(\alpha^2+b^2)}.$$

Ako se posmatra integral kao funkcija gornje granice (zamenjujući b sa x), onda je ~~primitivna funkcija podintegralne funkcije~~

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}=\frac{1}{2a^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+\frac{x}{2a^2(a^2+x^2)}+c.$$

Daljim diferenciranjem jednakosti (1) po a možemo dobiti formulu za $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^3}$ itd.

657. Razmotrimo integral $I(a)=\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+ax)}{1+x^2}\,dx$, gde je $0<a<1$. Za $a=1$ dobijamo traženi integral, $I=I(1)$. Za $0<x<1$, $0<a<1$ podintegralna funkcija je neprekidna i ima neprekidan izvod po a, otuda je moguće primeniti formulu diferenciranja pod znakom integrala:

$$I'(a)=\int\limits_0^1 \frac{x}{(1+ax)(1+x^2)}\,dx.$$

Razlažući podintegralnu funkciju na elementarne razlomke, dobijamo:

$$\frac{x}{(1+ax)(1+x^2)}=-\frac{a}{1+a^2}\cdot\frac{1}{1+ax}+\frac{1}{1+a^2}\cdot\frac{x}{1+x^2}+\frac{a}{1+a^2}\cdot\frac{1}{1+x^2},$$

odakle je:

$$I'(a)=\frac{1}{1+a^2}\left[\int\limits_0^1\frac{-a\,dx}{1+ax}+\int\limits_0^1\frac{x\,dx}{1+x^2}+\int\limits_0^1\frac{a\,dx}{1+x^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{1+a^2}\left[-\ln(1+a)+\frac{1}{2}\ln 2+a\frac{\pi}{4}\right].$$

Integraleći po a od 0 do 1, dobijamo:

$$I(1)-I(0)=-\int\limits_0^1\frac{\ln(1+a)}{1+a^2}\,da+\frac{1}{2}\ln 2\int\limits_0^1\frac{da}{1+a^2}+\frac{\pi}{4}\int\limits_0^1\frac{a}{1+a^2}\,dx$$

ili

$$I=-I+\frac{\pi}{4}\ln 2,\ \text{a potom}\ I=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

658. Za $m>0$ podintegralna funkcija je diferencijabilna po argumentima x i m. Diferenciranjem pod znakom integrala dobijamo:

$$I'(m)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{2m\cos^2 x}{\sin^2 x+m^2\cos^2 x}\,dx;$$

stavljajući $\operatorname{tg} x=t$, dobijamo:

$$I'(m)=\int\limits_0^{\infty}\frac{2m\,dt}{(t^2+m^2)(1+t^2)}$$

Razlažući podintegralnu funkciju na elementarne razlomke biće

$$\frac{1}{(t^2+m^2)(t^2+1)}=\frac{-1}{(m^2-1)(t^2+m^2)}+\frac{1}{(m^2-1)(t^2+1)},$$

pri čemu se smatra da je $m\neq 1$. Integraleći nalazimo

$$I'(m)=\frac{2m}{m^2-1}\int\limits_0^{\infty}\frac{dt}{t^2+1}-\frac{2m}{m^2-1}\int\limits_0^{\infty}\frac{dt}{t^2+m^2}$$

(sve izvedene transformacije su moguće, pošto se dobijaju konvergentni nepravi integrali).

$$I'(m)=\frac{2m}{m^2-1}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{2m}{m^2-1}\cdot\frac{\pi}{2m},\quad \text{ili}\quad I'(m)=\frac{\pi}{m+1},$$

odakle je

$$I(m)=\pi\ln(m+1)+c.$$

Ova jednakost je dokazana za $m\neq 1$, no pošto su obe strane neprekidne u tački $m=1$, to jednakost ostaje u važnosti i za $m=1$. Ako se stavi $m=1$, što daje $I(1)=\pi\ln 2+c$, i uzme u obzir da je $I(1)=1$ dobijamo $c=-\pi\ln 2$, pa je

$$I(m)=\pi\ln\frac{m+1}{2}.$$

659. Ako se integral

$$\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}=\frac{\pi}{2ab},\quad (a>0,\ b>0)$$

smatrajući a i b kao parametre, diferencira po a i b, dobiće se

$$-\int\limits_0^{\pi/2}\frac{2a\cos^2 x\,dx}{(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)^2}=-\frac{\pi}{2a^2b},\quad -\int\limits_0^{\pi/2}\frac{2b\sin^2 x\,dx}{(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)^2}=-\frac{\pi}{2ab^2},$$

odakle je

$$\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)^2}=\frac{\pi}{4ab}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right).$$

660. $\frac{\pi}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

661. Podintegralna funkcija može da se napiše u obliku

$$\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int\limits_0^b x^y\,dy.$$

Ako se sada integrali leva i desna strana i koristi svojstvo 3° dotičnog paragrafa dobija se

$$I=\int\limits_0^b dy\int\limits_0^1 x^y\,dx=\int\limits_0^b\frac{dy}{y}=\ln\frac{b+1}{a+1}.$$

662. 1° $\operatorname{arc\,tg}\frac{b-a}{1+(a+1)(b+1)}$; 2° $\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}$.

663. Funkcija $f(x,y)=x^y$ neprekidna je u oblasti $(0\leqslant x<1,\ c<y<d)$, $0<c<d$, pa je

$$\int\limits_0^1 dx\int\limits_c^d x^y\,dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_0^1 x^y\,dx=\int\limits_c^d dy\left(\frac{x^{y+1}}{y+1}\right)\Bigg|_0^1=\int\limits_c^d\frac{dy}{y+1}=\ln\frac{d+1}{c+1}.$$

Kako je

$$\int_0^1 dx \int_c^d x^y\,dy = \int_0^1 dx\left(\frac{x^y}{\ln x}\right)\Bigg|_c^d = \int_0^1 \frac{x^d - x^c}{\ln x}\,dx,$$

to je

$$\int_0^1 \frac{x^d - x^c}{\ln x}\,dx = \ln\frac{d+1}{c+1}.$$

664. Ne može se primeniti postupak integracije pod znakom integrala pošto je tačka $x=0$, $y=0$ prekidna tačka funkcije; $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy = -\frac{\pi}{4}\,(x>0)$, $\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx = -\frac{\pi}{4}$, $(y>0)$. **665.** 1° 0; 2° 0.

666. $\pi \arcsin\frac{x}{a}$. Treba poći od jednačine $\frac{1}{\sin x}\ln\frac{a+b\sin x}{a-b\sin x} = 2ab\int_0^1 \frac{dy}{a^2-b^2y^2\sin^2 x}$.

669. Konvergira za $a>0$.

670. Dati integral apsolutno konvergira ako je $|k|<1$ a divergira ako je $|k|>1$.

671. $m>0$. **672.** $\max(p,q)>1$. **673.** Konvergira za $n>-1$.

674. Konvergira za $\left|\frac{m+1}{n}\right|<1$. Apsolutno konvergira za $-1<\frac{m+1}{n}<0$. Inače: za $0<\frac{m+1}{n}<1$ neapsolutno konvergira; za $-1<\frac{m+1}{n}<0$ apsolutno konvergira.

675. Divergira. **676.** Konvergira za $a>0$; $n>-1$.

677. Konvergira za svako m. **678.** $\left|\frac{p-1}{q}\right|<1$. **679.** $m<0$ i $m>\frac{11}{2}$.

680. Dati integral ni za jedno realno a i b nije neprav u odnosu na donju granicu integracije, pošto je za $a\neq 0$ i $b\neq 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-2axe^{-ax^2}+2bxe^{-bx^2}}{2x} = b-a,$$

a isto tako dobijaju se konačni limesi i kada je $a=0$ ili $b=0$. Kako je za $a>0$, $b>0$ i $x>1$

$$\left|\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}\right| < \frac{e^{-ax^2}+e^{-bx^2}}{x^2} < \frac{2}{x^2}$$

a integral

$$\int_1^\infty \frac{2}{x^2}\,dx$$

konvergira, onda je, prema Weierstrassovom kriterijumu, dati integral uniformno i apsolutno konvergentan za $a>0$, $b>0$ (uniformno po oba parametra). Za $a=b$ integral,

očigledno, takođe apsolutno konvergira. Ako je $a\neq b$ i bar jedan od ovih parametara negativan, podintegralna funkcija po apsolutnoj vrednosti teži beskonačnosti kada $x\to\infty$, pa integral tada divergira.

681. Konvergira za $a>0$ i za $m=-\frac{2n-1}{2}\pi$, $(n=1,2,\ldots)$.

682. Konvergira za $m\leqslant -1$, $n>-m-1$.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x^n}{x}\,dx = \frac{1}{n}\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt,\quad (x^n=t).$$

683. Konvergira za $n>4$. **684.** Konvergira za $\alpha>1$.

685. Konvergira za $m\in(-1,2)$. **691.** Uniformno konvergira za svako y.

692. Integral ne konvergira uniformno, pošto uslov

$$\int_0^n \frac{y\,dx}{x^2+y^2} = \operatorname{arc\,tg}\frac{n}{y} < \varepsilon$$

nije ispunjen za $y=0$, ma kako bilo malo n, jer je $\lim_{y\to 0}\operatorname{arc\,tg}\frac{n}{y}=\frac{\pi}{2}$.

693. Integral uniformno konvergira za svako $y>0$. **694.** Konvergira uniformno za $y>0$

695. Uniformno konvergira. **696.** Uniformno konvergira.

697. Uniformno konvergira u svakom zatvorenom intervalu parametra a koji ne sadrži ± 1

698. Uniformno konvergira. **699.** Uniformno konvergira. za $x>0$.

700. Uniformno konvergira. **701.** Uniformno konvergira za $y>0$.

702. Uniformno konvergira. **703.** Uniformno konvergira za $y>0$.

704. Uniformno konvergira. **705.** Uniformno konvergira za $y>0$.

706. Uniformno konvergira, **707.** Nije. **710.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. **712.** Neprekidna.

713. Neprekidna. **714.** Neprekidna. **715.** Neprekidna.

716. Prekidna za $m=0$. **717.** $\frac{(-1)^n n!}{m^n+1}$. **718.** $\ln\frac{b}{a}$. **719.** $\frac{\pi}{2}$

720. $\frac{(n-1)!}{a^n}$. **721.** $\frac{\pi}{2a^{2n-1}}\cdot\frac{1,3,5,\ldots(2n-3)}{2,4,6,\ldots(2n-2)}$.

722. $\frac{\pi}{2}(b-a)$, ako je $a>b>0$. **723.** $\frac{\pi}{2}(d-c)$. **724.** $I(y)=\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{k^2}\right)$.

725. $\ln(1+y)$ $(y>0)$. **726.** $\ln\frac{(2\alpha)^{2\alpha}(2\beta)^{2\beta}}{(\alpha+\beta)^{2(\alpha+\beta)}}$. **727.** $\frac{1}{2}\ln\frac{\beta^2+m^2}{\alpha^2+m^2}$.

728. Pošto $\frac{\sin xy}{x(a^2+x^2)} \to \frac{y}{a^2}$ kada $x \to 0$, i pošto je za $x>1$ $\left|\frac{\sin xy}{x(x^2+a^2)}\right| < \frac{1}{x(a^2+x^2)} \sim \frac{1}{x^3}$ $x \to \infty$, dati integral uniformno konvergira za svako y a takođe je neprekidna funkcija za svako y. Dalje je $\left|\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\sin xy}{x(x^2+a^2)}\right]\right| = \left|\frac{\cos xy}{a^2+x^2}\right| < \frac{1}{a^2+x^2}$, pa integral $\int_0^\infty \frac{\cos xy}{a^2+x^2}\,dx$ uniformno konvergira za $y \in (-\infty, \infty)$, te je neprekidna funkcija u tom intervalu, pa je $f'(y) = \int_0^\infty \frac{\cos xy}{a^2+x^2}\,dx$ za $y \in (-\infty, \infty)$. Kako je $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\cos xy}{a^2+x^2}\right) = -\frac{x \sin xy}{a^2+x^2}$, i kako funkcija $\frac{x}{x^2+a^2}$ za dovoljno veliko x monotono opadajući teži nuli kad $x \to \infty$ a integral $\int_0^x \sin xy\,dx = \frac{1}{y}(1-\cos xy)$ je za $y>\delta>0$ ograničen, to integral $\int_0^\infty \frac{x \sin xy}{a^2+x^2}\,dx$ uniformno konvergira u svakom intervalu $y>\delta>0$. Stoga je za $y>0$

$$f''(x) = -\int_0^\infty \frac{x \sin x}{a^2-x^2}\,dx = -\int_0^\infty \frac{(x^2+a^2-a^2)\sin xy}{x(a^2+x^2)}\,dx =$$

$$= a^2 f(y) - \int_0^\infty \frac{\sin xy}{x}\,dx = a^2 f(y) - \frac{\pi}{2}, \quad f'' - a^2 f = -\frac{\pi}{2}.$$

Odavde je

$$(1) \qquad f(y) = c_1 e^{ay} + c_2 e^{-ay} + \frac{\pi}{2a^2},$$

gde konstante c_1 i c_2 treba odrediti. Kako su funkcije $f(y)$ i $f'(y)$, prema onome što je rečeno, neprekidne za $y>0$ i kako je $f(y)=0$, $f'(y) = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}$, to se stavljajući u jednačini (1) i $f'(y) = c_1 a e^{ay} - c_2 a e^{-ay}$, $y=0$ dobija $0 = c_1 + c_2 + \frac{\pi}{2a^2}$, $\frac{\pi}{2a} = a(c_1 - c_2)$, odakle je $c_1 = 0$ i $c_2 = -\frac{\pi}{2a^2}$, tako da je najzad

$$f(y) = \frac{\pi}{2a^2}(1 - e^{-ay})$$

za svako $y>0$, tj. zbog neparnosti funkcije $f(y)$

$$f(y) = \operatorname{sign} y \cdot \frac{\pi}{2a^2}(1 - e^{-a|y|})$$

za svako y.

729. $\frac{\pi}{2}\ln(1+y)$ $(y>0)$.

730. $\frac{\pi}{|b|}\ln(|a|+|b|)$ $(b \neq 0$.

731. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

732. $\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2a}$.

733. Problem konvergencije ovog integrala je analiziran u zad. 55. Što se tiče vrednosti integrala nju nalazimo na sledeći način:

Kako je funkcija

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2}\right) = -e^{-ax^2}$$

neprekidna za $a \in (0, \infty)$ i $x \in [0, \infty]$ i kako integral

$$\int_0^\infty (-e^{-ax^2})\,dx$$

uniformno konvergira za $a>\delta>0$, pošto je u tom intervalu

$$|-e^{-ax^2}| < e^{-\delta x^2}$$

a integral $\int_0^\infty e^{-\delta x^2}\,dx$ konvergira, to se, fiksirajući $b>0$ i uzimajući a kao promenljivi parametar, dobija, za $a>0$

$$\frac{dI}{da} = -\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

odakle je (1) $I = -\sqrt{\pi a} + c$, gde je c izvesna konstanta za fiksirano b. Zadnja jednakost važi, dakle, ukoliko je $b>0$ fiksirano, za $a>0$, pa se u njoj kada je $b>0$ može staviti $a=b$. Da bi se ustanovilo da se to može učiniti i kada je $b=0$, dovoljno je pokazati da je integral I za $b=0$ s desne strane neprekidna funkcija od a pošto je to očigledan slučaj sa desnom stranom jednakosti $I = -\sqrt{\pi a} + c$. Kako je za $a=b$, $I=0$ ovo se svodi na dokaz činjenice da je

$$\lim_{a \to +0} \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}-1}{x^2}\,dx = 0.$$

Zaista,

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}-1}{x^2}\,dx = \sqrt{a}\int_0^\infty \frac{e^{-(x\sqrt{a})^2}-1}{(x\sqrt{a})^2}\,d(x\sqrt{a}) = \sqrt{a}\int_0^\infty \frac{e^{-t^2}-1}{t^2}\,dt \to 0, \quad a \to +0.$$

Prema tome, ako se u (1) stavi $a=b$, pri čemu može biti $b>0$, dobija se

$$(2) \qquad 0 = -\sqrt{\pi b} + c.$$

Oduzimanjem jednakosti (2) od jednakosti (1) dobija se

$$I = \sqrt{\pi}(\sqrt{b} - \sqrt{a}).$$

Ova formula važi, očigledno, za $a>0$, $b>0$ i za $a=b$. Dati integral može se izračunati i na drugi način — metodom parcijalne integracije.

734. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{b^2}{4a}}$.

735. $\frac{b\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}}\, e^{-\frac{b^2}{4b}}$.

736. $(-1)^n \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}} \frac{d^{2n}}{db^{2n}}(e^{-b^2})$.

737. $\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\beta$. **738.** $\pi\frac{|\beta|}{2}-\sqrt{\pi a}$. **739.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right|$. **740.** $\frac{3}{8}\ln\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|$.

741. $\frac{\pi}{4}$. **742.** $\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha+\beta}{k}-\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha-\beta}{k}+\frac{k}{4}\ln\frac{k^2+(\alpha-\beta)^2}{k^2+(\alpha+\beta)^2}$.

743. 1° $\pi\operatorname{sign}a\cos ab$; 2° $\pi\operatorname{sign}a\sin ab$.

744. 1° Pošto je (1) $\left|\frac{\cos mx}{1+x^2}\right|\leqslant\frac{1}{1+x^2}$ za $m\in(-\infty,\infty)$ a integral (2) $\int\limits_0^\infty\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg}x\Big|_0^\infty=\frac{\pi}{2}$ konvergira, onda na osnovu Weierstrassovog kriterijuma integral $I(m)$ uniformno i apsolutno konvergira za $m\in(-\infty,\infty)$. Na osnovu (1) i (2) za $m\in(\infty,\infty)$ biće

$|I(m)|<\int\limits_0^\infty\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$, tako da se može staviti

$$M=\frac{\pi}{2}.$$

2° Funkcija $\frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{\cos mx}{1+x^2}\right)=-\frac{x\sin mx}{1+x^2}$ neprekidna je za $x\in[0,\infty]$ i $m\in(-\infty,\infty)$.

Primenom postupka parcijalne integracije dobijamo

$$\int\limits_0^x\frac{x\sin mx}{1+x^2}dx=\frac{x\cos mx}{m(1+x^2)}+\frac{1}{m}\int\limits_0^x\frac{(1-x^2)\cos mx}{(1+x^2)^2}dx\ (x>0)$$

pa integral $\int\limits_0^\infty\frac{x\sin mx}{1+x^2}dx$ uniformno konvergira za $a\geqslant\delta>0$, jer je to slučaj sa integralom $\int\limits_0^x\frac{(1-x^2)\cos mx}{m(1+x^2)^2}dx$, a izraz $\frac{x\cos mx}{m(1+x^2)}$ uniformno teži nuli kada $x\to\infty$ za $m\geqslant\delta>0$. Prema tome, primenom teoreme o diferenciranju nepravih integrala dobijamo zu $m>0$,

$$I'(m)=-\int\limits_0^\infty\frac{x\sin mx}{1+x^2}dx=-\int\limits_0^\infty\frac{x^2\sin mx}{x(1+x^2)}dx=$$

$$=-\int\limits_0^\infty\frac{\sin mx}{x}dx+\int\limits_0^\infty\frac{\sin mx}{x(1+x^2)}dx=-\frac{\pi}{2}+\int\limits_0^\infty\frac{\sin mx}{x(1+x^2)}dx,$$

pošto je $\int\limits_0^\infty\frac{\sin mx}{x}dx=\frac{\pi}{2}$. Lako se možemo uveriti da su svi gornji nepravi integrali konvergentni za. $m>0$.

Tako je dobijena jednakost

$$(3)\qquad I'(m)+\frac{\pi}{2}=\int\limits_0^\infty\frac{\sin mx}{x(1+x^2)}dx,\ m>0.$$

Pošto je funkcija $\frac{\partial}{\partial m}\left[\frac{\sin mx}{x(1+x^2)}\right]=\frac{\cos mx}{1+x^2}$ neprekidna za $x\in[0,\infty)$ i $m\in(-\infty,\infty)$ a integral $I(m)=\int\limits_0^\infty\frac{\cos mx}{1+x^2}dx$, kao što je već rečeno, uniformno konvergira za $m\in(-\infty,\infty)$, to, na osnovu navedene teoreme, iz jednakosti (3) sledi

$$I''(m)=[I'(m)]'=\frac{d}{dm}\int\limits_0^\infty\frac{\sin mx}{x(1+x^2)}dx=\int\limits_0^\infty\frac{\cos mx}{1+x^2}dx,\ m>0.$$

Dakle, za $m>0$ dobijamo

$$(4)\qquad I(m)=I''(m).$$

3° Opšti integral diferencijalne jednačine (4) je

$$(5)\qquad I(m)=c_1e^m+c_2c^{-m}.$$

gde su c_1 i c_2 proizvoljne konstante. Za $m>0$ formula (5) daje vrednost integrala $I(m)$, pri čemu konstante c_1 i c_2 treba da imaju određenu vrednost.

Iz neprekidnosti funkcije $\frac{\cos mx}{1+x^2}$ za $x\in[0,\infty)$ i $m\in(-\infty,\infty)$ uniformne konvergencije integrala $I(m)$ za $m\in(-\infty,\infty)$ sledi neprekidnost funkcije $I(m)$, definisane tim integralom, za svako m.

U narednom rasuđivanju koristimo teoremu:

Ako je funkcija $f(m)$ neprekidna za $m=m_0$ sa desne strane i u izvesnoj desnoj okolini (otvorenoj) tačke $m=m_0$ ima izvod $f'(m)$, tada postoji $f_+'(m_0)$ i $f_+'(m_0)=\lim\limits_{m\to m_0}f_+'(m_0)$, ukoliko ovaj limes postoji.

Kako je funkcija $\int\limits_0^\infty\frac{\sin mx}{x(1+x^2)}dx$ neprekidna za svako m, što se može konstatovati na isti način kao i za funkciju $I(m)$ to prema (3) imamo

$$\lim_{m\to+0}I'(m)=-\frac{\pi}{2}+\lim_{m\to+0}\int\limits_0^\infty\frac{\sin mx}{x(1+x^2)}dx=-\frac{\pi}{2}+\int\limits_0^\infty\frac{\sin(0,x)}{x(1+x}dx=-\frac{\pi}{2}.$$

Dalje, prema ustanovljenoj neprekidnosti funkcije $I(m)$ i navedenoj teoremi biće

$$(6)\qquad I_+'(0)=\lim_{m\to+0}I'(m)=\frac{\pi}{2}.$$

Iz (5) sledi

$$(7)\qquad I'(m)=c_1e^m-c_2e^{-m},\ m>0.$$

749. 1° Integral $I(m)$ je neprav u odnosu na interval integracije i na tačku $x=1$. Kako je za svako m i za svako $x\in[1,\infty)$

$$\left|\frac{\operatorname{arc\,tg} mx}{x^2\sqrt{x^2-1}}\right|\leqslant\frac{\pi}{2x^2\sqrt{x^2-1}},$$

a integral $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$ zbog asimptotskih relacija

$$\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\sim\begin{cases}\dfrac{1}{x^3}, & x\to\infty\\[2mm] \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x-1}} & x\to1+0\end{cases}$$

konvergira, onda na osnovu Weierstrassovog kriterijuma integral $I(m)$ uniformno i apsolutno konvergira za $m\in(-\infty,\infty)$.

2° Funkcija $\displaystyle\frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{\operatorname{arc\,tg} mx}{x^2\sqrt{x^2-1}}\right)=\frac{1}{(1+m^2x)\,x\sqrt{x^2-1}}$ neprekidna je za $x>1$ i $m\in(-\infty,\infty)$. Kako je za $x>1$ i $m\in(-\infty,\infty)$

$$\frac{1}{(1+m^2x^2)\,x\sqrt{x^2-1}}<\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},$$

a integral $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ konvergira, jer je

$$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\sim\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & x\to\infty,\\[2mm] \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x-1}} & x\to1+0\end{cases}$$

onda prema već na[illegible]

$$\frac{[illegible]}{(1+m^2x^2)\,x\sqrt{x^2-1}}$$

za $m\in(-\infty,\infty)$ u[illegible] konvergira. Otuda je za svako m ispravna jednakost

$$I'(m)=\int_1^{\infty}\frac{dx}{(1+m^2x^2)\,x\sqrt{x^2-1}}=\int_1^{\infty}\frac{x\,dx}{(1+m^2x^2)\,x^2\sqrt{x^2-1}}$$

ili posle smene $x^2-1=t^2$, $x\,dx=t\,dt$,

$$I'(m)=\int_0^{\infty}\frac{[illegible]}{[1+m^2(1+t^2)](1+t^2)}=\int_0^{\infty}\frac{dt}{(1+t^2)(1+m^2+m^2t^2)}=$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}-m^2\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+m^2+m^2t^2}=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{|m|}{\sqrt{1+m^2}}\right),$$

pri čemu je u računu pretpostavljeno da je $m\neq0$. Dobijeni rezultat, međutim, važi za svako m. Za $m>0$ biće posle integracije

$$I(m)=\frac{\pi}{2}\left(m-\sqrt{1+m^2}\right)+c.$$

gde je c konstanta koju treba odrediti. Stavljajući $m=0$ u prethodnoj relaciji (koja važi za $m>0$), dobija se zbog $I(0)=0$, $0=-\dfrac{\pi}{2}+c$. Dakle, za $m>0$ dobija se

$$I(m)=\frac{\pi}{2}\left(1+m-\sqrt{1+m^2}\right)$$

ili, najzad, s obzirom na neparnost funkcije $I(m)$ biće

$$J(m)=\operatorname{sign}\{m\}\,\frac{\pi}{2}\left(1+|m|-\sqrt{1+m^2}\right)$$

za svako m. Treba napomenuti da se do isttog rezultata može doći direktno, parcijalnom integracijom. **750.** $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$; $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

751. Kako integral I konvergira za svako a i kako je za svako a i svako x funkcija

$$\left(e^{-x^2}\cos ax\right)'_a=-x\,e^{-x^2}\sin ax$$

neprekidna a sem toga je za svako a i $x>0$

$$\left|-xe^{-x^2}\sin ax\right|\leqslant x\,e^{-x^2}$$

tako da prema Weierstrassovom kriterijumu integral

$$\int_0^{\infty}x\,e^{-x^2}\sin ax\,dx$$

uniformno konvergira za svako a, to je, prema odgovarajućem stavu, za svako a

$$\frac{dI}{da}=-\int_0^{\infty}x\,e^{-x^2}\sin ax\,dx.$$

Dalje se parcijalnom integracijom dobija

$$\frac{dI}{da}=\frac{1}{2}\,e^{-x^2}\sin ax\Big|_0^{\infty}-\frac{a}{2}\int_0^{\infty}e^{-x^2}\cos ax\,dx$$

tj. $\dfrac{dI}{da}=-\dfrac{a}{2}I\Rightarrow I=c\,e^{-\frac{a^2}{4}}$, gde je c integraciona konstanta koju treba odrediti. Stavljajući u zadnjoj jednakosti $a=0$, dobija se $c=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ jer je $I=\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, tako da je konačno $I=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-\frac{a^2}{4}}$.

Zbog neprekidnosti, odnosno desne neprekidnosti funkcija $I(m)$ i $I'(m)$ u tački $m=0$ jednakosti (5) i (7) važe i za $m=0$, pa je, prema (6) i

$$I(0)=\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2}=c_1+c_2, \quad -\frac{\pi}{2}=c_1-c_2$$

odakle je $c_1=0$, $c_2=\frac{\pi}{2}$. Stoga je za $m>0$

(8) $$I(m)=\frac{\pi}{2}e^{-m}$$

ili konačno, zbog parnosti funkcije $I(m)$,

(9) $$I(m)=\frac{\pi}{2}e^{-|m|}$$

za svako realno m.

4° Na osnovu jednakosti (8), za $m>0$ dobijamo

$$I(m)=\frac{\pi}{2}e^{-m}\to 0, \; m\to\infty, \quad \int_0^\infty dm\int_0^\infty \frac{\cos mx}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^m e^{-m}\,dm=$$

$$=\frac{\pi}{2}(1-e^{-m})\to\frac{\pi}{2}, \; m\to\infty.$$

Ako se ne bi vodilo računa o rezultatu (8), do istog rezultata se može doći korišćenjem Riemann-Lebesgueove teoreme, koja glasi:
Ako postoje integrali

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \quad \text{i} \quad \int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx$$

kao Riemanovi ili nepravi, tada je

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_\alpha^\beta f(x)\cos mx\,dx=\lim_{m\to\infty}\int_\alpha^\beta f(x)\sin mx\,dx=0$$

Granice α i β mogu biti konačne ili beskonačne.
Zbog uniformne konvergencije integrala

$$\int_0^\infty \frac{\cos mx}{1+x^2}dx$$

biće

$$\varphi(m)=\int_0^m dm\int_0^\infty \frac{\cos mx}{1+x^2}dx=\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}\int_0^m \cos mx\,dm=\int_0^\infty \frac{\sin mx}{x(1+x^2)}dx;$$

Dalje je onda, za $x>0$

$$\left|\varphi(m)-\frac{\pi}{2}\right|=\left|\int_0^\infty \frac{\sin mx}{(1+x^2)}dx-\int_0^\infty \frac{\sin mx}{x}dx\right|<\left|\int_0^x \frac{x}{1+x^2}\sin mx\,dx\right|+$$

$$+\int_x^\infty \frac{dx}{x(1+x^2)}+\left|\int_{mx}^\infty \frac{\sin t}{t}dt\right|<\left|\int_0^x \frac{x}{1+x^2}\sin mx\,dx\right|+\left|\int_{mx}^\infty \frac{\sin t}{t}dt\right|+\varepsilon$$

ako se x uzme dovoljno veliko, ma koliko da je unapred dato $\varepsilon>0$. Odatle je ponovo prema Riemann-Lebesgueovoj teoremi

$$\lim_{m\to\infty}\left|\varphi(m)-\frac{\pi}{2}\right|<\varepsilon \text{ tj. } \lim_{m\to\infty}\varphi(m)=\frac{\pi}{2}.$$

745. Za svako $m\in(-\infty,\infty)$ i $t\in(-\infty,\infty)$ biće

$$|e^{-t^2}\cos mt|<e^{-t^2}$$

i

$$|-t\,e^{-t^2}\sin mt|<|t|\,e^{-t^2}$$

pa prema Weierstrassovom kriterijumu dati integral i njegov izvodni integral uniformno konvergiraju za $m\in(-\infty,\infty)$. Kako je sem toga funkcija $-t\,e^{-t^2}\sin(mt)$ neprekidna za $t\in(-\infty,\infty)$ i $m\in(-\infty,\infty)$, onda važi sledeća jednakost za svako realno m:

$$f'(m)=\int_{-\infty}^\infty(-t\,e^{-t^2})\sin mt\,dt,$$

gde je

$$f(m)=\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\cos mt\,dt.$$

Primenom metoda parcijalne integracije dobijamo dalje

$$f'(m)=\frac{1}{2}[e^{-t^2}\sin mt]\Big|_{-\infty}^{\infty}-\frac{m}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\cos mt\,dt=-\frac{m}{2}f(m),$$

odakle je,

$$\frac{f'}{f}=-\frac{m}{2},$$

ili posle integracije $f(m)=ce^{-\frac{m^2}{4}}$. Stavljajući u dobijenom rezultatu $m=0$ dobija se

$$c=f(0)=\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\,dt=\sqrt{\pi},$$

tako da je za svako realno m $f(m)=\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{m^2}{4}}$.

746. $\frac{\pi}{4}(1-e^{-2})$. 747. $\frac{\pi(1+|\alpha|)}{4}e^{-|\alpha|}$. 748. $\frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}\cos\frac{b\alpha}{a}\,e^{-\frac{|\alpha|}{a}\sqrt{ac-b^2}}$.

Kako je za svako x i a

$$\cos ax=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(ax)^{2n}}{(2n)!},$$

onda, ukoliko je opravdana izmena poretka integracije i beskonačnog sumiranja, biće

$$I=\int_0^\infty e^{-x^2}\cos ax\,dx=\int_0^\infty e^{-x^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a^{2n}}{(2n)!}x^{2n}\,dx=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{a^{2n}}{(2n)!}\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2n}\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{a^{2n}}{(2n)!}I_n.$$

Ovde je

$$I_n=\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2n}\,dx=\int_0^\infty xe^{-x^2}x^{2n-1}\,dx=-\frac{1}{2}e^{-x^2}x^{2n-1}\Big|_0^\infty+$$

$$+\frac{2n-1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2n-2}\,dx=\frac{2n-1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2n-2}\,dx,$$

$$I_n=\frac{2n-1}{2}I_{n-1},\quad n=1,2,\ldots$$

Odavde je dalje

$$I_n=\frac{(2n-1)!!}{2^n}I_0=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

pa je konačno

$$I=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a^{2n}\frac{(2n-1)!!\sqrt{\pi}}{2^n(2n)!\,2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a^{2n}\frac{(2n-1)!!}{2^n2^n n!\,(2n-1)!!}=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{a^2}{4}\right)^n}{n!}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{a^2}{4}}\Rightarrow I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{a^2}{4}}.$$

753. $\sqrt{\dfrac{\pi}{|a|}}\sin\left(\dfrac{ac-b^2}{a}\right)+\dfrac{\pi}{4}\operatorname{sign}a.$ 754. $\sqrt{\pi}\cos\left(a^2+\dfrac{\pi}{4}\right).$

755. $\sqrt{\pi}\sin\left(a^2+\dfrac{\pi}{4}\right).$ 756. Kako je za $a>0$ $\displaystyle\int_0^\infty\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\int_0^\infty\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{2a}$, to je posle diferenciranja ove jednačine po a, za $a>0$

$$-2a\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=-\frac{\pi}{2a^2},$$

tj. (1) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{\pi}{4a^3}$. Pri tome je diferenciranje pod znakom integrala dozvoljeno jer je podintegralna funkcija tako dobijenog integrala $\dfrac{-2a}{(x^2+a^2)^2}$ za $x\geqslant 0$, $a>0$ neprekidna a sam integral za $0<\delta\leqslant a\leqslant\Delta<\infty$ uniformno konvergira, pošto je za $a\in[\delta,\Delta]$

$$\left|-\frac{2a}{(x^2+a^2)^2}\right|\leqslant\frac{2\Delta}{(x^2+\delta^2)^2}\qquad\int_0^\infty\frac{2\Delta}{(x^2+\delta^2)^2}dx<\infty.$$

Prema (1), na osnovu L'Hospitalova pravila biće

$$\lim_{a\to+0}\left(a-\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{\pi}{4}\lim_{a\to+0}\frac{a-\int_0^a e^{-x^2}dx}{a^3}=$$

$$=\frac{\pi}{3\cdot 3}\lim_{x\to+0}\frac{1-e^{-a^2}}{a^2}=\frac{\pi}{12}.$$

758. $I(a)=\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}a$; 1° $I(0)=\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$; 2° $\dfrac{\pi}{2}$; 3° $\dfrac{\pi}{4}$; 4° $\dfrac{3}{2}\ln 3$; 5° $\ln 2$.

759. 1° Kako je funkcija e^{-x^2} neprekidna za svako x, to je, takođe, za svako x

$$\frac{d}{dx}\int_0^x e^{-t^2}dt=e^{-x^2},$$

pa je otuda

(1) $$F'(x)=2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt.$$

Iz neprekidnosti funkcije

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-x^2}(1+t^2)}{1+t^2}\right)=-2xe^{-x^2}(t^2+1)$$

za svako x i t sledi da se može izvršiti diferenciranje pod znakom integrala $G(x)$, pa je prema (1)

$$G'(x)=2x\int_0^1 e^{-x^2(t^2+1)}dt=2e^{-x^2}\int_0^1 e^{-(xt)^2}d(xt)=2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}du=F'(x),$$

Pošto dobijena jednakost važi za svako x, biće

(2) $$F(x)=G(x)+c.$$

Kako je $F(0)=0$ i $G(0)=\int\limits_0^1 \frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}$, onda se stavljajući u jednakosti (2) $x=0$ dobija $c=\frac{\pi}{4}$, pa je za svako x

(3) $$F(x)=\frac{\pi}{4}+G(x).$$

2° Kako

$$|G(x)|=\int\limits_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt<e^{-x^2}\int\limits_0^1 \frac{dt}{1+t^2}\to 0,\ x\to\infty,$$

to se iz (3) dobija kada $x\to\infty$, $\left(\int\limits_0^\infty e^{-t^2}\,dt\right)^2=\frac{\pi}{4}$ a odatle $\int\limits_0^\infty e^{-t^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

760. 1° $\frac{n!}{p^{n+1}}$; 2° $\frac{\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}$; 3° $\frac{1}{p-a}$ za $p>a$: 4° $\frac{1}{(p+a)^2}$; 5° $\frac{p}{p^2+1}$; 6° $\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$; 7° $\frac{a\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}e^{-\frac{a^2}{4p}}$.

762. 1° 1; 2° $x^2+\frac{1}{2}$; 3° e^{2ax+a^2}; 4° $\frac{1}{2}e^{-\frac{a^2}{4}}\cos ax$.

764. $\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, gde je $\sigma=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$.

768. Dati integral može da se napiše u obliku $\int\limits_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx=\int\limits_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}\,dx$. Pa kako je u ovom slučaju $a-1=\frac{1}{2}$ i $b-1=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{3}{2}$. Prema tome je

$$B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\int\limits_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}\,dx.$$

No kako je za $a=b$ $\beta(a,a)=\frac{\Gamma^2(a)}{\Gamma(2a)}$ to je $\beta\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)}$. S druge strane je $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ i $\Gamma(3)=\Gamma(1+2)=2\cdot 1=2$. Prema tome konačno imamo da je

$$B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^2}{2}=\frac{\pi}{8},$$

odnosno

$$\int\limits_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx=\frac{\pi}{8}.$$

769. Ako se stavi $x=at$ dobija se da je

$$\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^4\int\limits_0^1 t^2(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\,dt.$$

Ako se dalje stavi $t^2=u\Rightarrow 2t\,dt=du$ odnosno $dt=\frac{du}{2\sqrt{u}}$ onda je

$$\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^4}{2}\int\limits_0^1 u^{\frac{1}{2}}(1-u)^{\frac{1}{2}}\,du=\frac{a^4}{2}\cdot\frac{\pi}{4}.$$

(na osnovu prethodnog zadatka). Konačno je $\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{\pi a^4}{16}$.

770. $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$.

771. Ako se stavi $1+t=u$ dobija se

$$I=\int\limits_0^2 u^{x-1}(2-u)^{y-1}\,du.$$

Uvodeći zatim smenu $u=2z$ dobija se

$$I=2^{x+y-1}\int\limits_0^1 z^{x-1}(1-z)^{y-1}\,dz,$$

ili

$$I=2^{x+y-1}\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

772. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

773. $\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{4\sqrt{2\pi}}$.

774. Uvodeći smenu $x^3=u$ dobijamo

$$I=\frac{1}{3}\int\limits_0^1 u^{-\frac{2}{3}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}\,du.$$

Dalje, iz $a-1=-\frac{2}{3}$ i $b-1=-\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{3}$ i $b=\frac{1}{2}$ pa je $I=\frac{1}{3}B\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$ ili

$$I=\frac{1}{3}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}=\frac{\sqrt{\pi}}{3}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}.$$

775. $\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}$.

776. Smenom $x^m=y$ dati integral se svodi na Eulerov integral prve vrste:

$$\frac{1}{m}B\left(\frac{p}{m},q\right)=\frac{1}{m}\frac{\Gamma\left(\frac{p}{m}\right)\Gamma(q)}{\Gamma\left(\frac{p}{m}+q\right)}.$$

777. Polazeći od smene $\sin x = t$ dobijamo da je

$$I=\int_0^1 t^6(1-t^2)^{3/2}\,dt.$$

Ako se sada stavi $t^2=u$ definitivno se dobija da je

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1 u^{5/2}(1-u)^{3/2}\,du.$$

Kako je u ovom slučaju $a=\dfrac{7}{2}$ i $b=\dfrac{5}{2}$ to je

$$I=B\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right)=B\left(3+\frac{1}{2},\,2+\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(3+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(6)}=$$

$$=\frac{\frac{1\cdot3\cdot5}{2^3}\sqrt{\pi}\,\frac{1\cdot3}{2^2}\sqrt{\pi}}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}=\frac{3\pi}{2^8},\ \text{tj.}\ I=\frac{3\pi}{512}.$$

778. Ako se stavi $x=\sin t$ dobija se integral

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x^2)^{\frac{b}{2}-1}\,dx.$$

Koristeći rezultat iz zad. 776, biće

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{a-1}\varphi\cos^{b-1}\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}B\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)}.$$

Specijalno za $b=1$ dobijamo da je

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{a-1}\varphi\,d\varphi=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}.$$

Ako u polaznom integralu uzmemo da je $a=1+c$ i $b=1-c$, gde je $|c|<1$, onda na osnovu osobine gama funkcije dobijamo da je

$$\int_0^{\pi/2}\operatorname{tg}^c\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+c}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-c}{2}\right)=\frac{\pi}{2\cos\frac{c\pi}{2}}.$$

779. $\dfrac{\pi}{2}$. **780.** $\ln 2$. **781.** $\dfrac{\pi}{4}$. **782.** Napišimo dati integral u obliku

$$\int_0^{\infty}\sin\frac{p-q}{q}x\,\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Na osnovu formule Lobačevskog, prema kojoj je

$$\int_0^{\infty}f(x)\frac{\sin x}{x}\,dx=\int_0^{\pi/2}f(x)\,dx,$$

ako je $f(x+\pi)=f(x)$ i $f(\pi-x)=f(x)$, imamo dalje da je

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^{p/q}x}{x}\,dx=\int_0^{\pi/2}\sin^{p/q-1}x\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2q}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2q}\right)}.$$

783. $\dfrac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}$. **784.** $\dfrac{\sqrt{n}}{2}\,\dfrac{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n)}$. **785.** $\dfrac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$, $(0<m<n)$.

786. $B(n-m,\,m)$, $(0<m<n)$. **787.** $\dfrac{a^{-p}}{n}\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}B\left(\dfrac{m+1}{n},\,p-\dfrac{m+1}{n}\right)$ $\left(0<\dfrac{m+1}{n}<p\right)$.

788. $\dfrac{1}{a^{\beta}(1+a)^{\alpha}}\cdot\dfrac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$, $\alpha>0$, $\beta>0$. **789.** $\dfrac{2^{n-1}\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{(1-k^2)\,\Gamma(n)}$, $n>0$.

790. $\dfrac{\pi}{2\sin\pi a}$, $0<a<1$. **791.** $\dfrac{d}{dp}\left[\dfrac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}}\right]$, $p>-1$.

792. $\dfrac{\pi^2\sin\frac{a\pi}{2}}{4\cos^2\frac{a\pi}{2}}$, $-1<a<1$. **793.** $\dfrac{1}{|n|}\Gamma\left(\dfrac{m+1}{n}\right)$, $\dfrac{m+1}{n}<0$.

794. $\sqrt{(n-1)\pi}\,\dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$, $n>1$. **795.** $\Gamma(p+1)$, $p>-1$.

796. $\pi^3\,\dfrac{1+\cos^2 p\pi}{\sin^3 p\pi}$, $0<p<1$. **797.** $\left|\dfrac{\operatorname{tg}\frac{p\pi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{q\pi}{2}}\right|$, $0<p<1$, $0<q<1$.

798. $\pi\operatorname{ctg}\pi p$ $\left(\text{možemo ga tretirati kao}\ \lim\limits_{p\to+0}\displaystyle\int_0^1\frac{x^{p-1}-x^{-p}}{(1-x)^{1-p}}\,dx\right)$. **799.** $\dfrac{\pi}{2\beta}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha\pi}{2\beta}$.

800. $\ln\sqrt{2\pi}$. **801.** $\ln\sqrt{2\pi}+a(\ln a-1)$. **802.** $\dfrac{1}{\pi}\left(1+\ln\dfrac{\pi}{2}\right)$. **803.** $\dfrac{1}{4n}$.

804. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+3}{4}\right)}$, ako je $a>-1$. **811.** $\frac{\pi a^{m-1}}{2\,\Gamma(m)\cos\frac{m\pi}{2}}$, $(a>0)$.

812. $\frac{\pi a^{m-1}}{2\,\Gamma(m)\sin\frac{m\pi}{2}}$, $(a>0)$. **815.** $a\,B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2n}\right)$. **816.** $\frac{2a^2}{m}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)}$.

817. 1° Za $m>0$ integral apsolutno konvergira, jer ako je $m>0$ onda $x^2e^{-x^m}\to 0$ kada $x\to\infty$.

Kada je $m\leqslant 0$, integral divergira, pošto za $m<0$ $e^{-x^m}\to 0$ kada $x\to\infty$, dok je za $m=0$ $e^{-x^m}=e^{-1}$, $x>0$.

Za $m>\delta>0$ integral, prema Weierstrassovom kriterijumu, uniformno konvergira, jer je

$$e^{-x^m}<e^{-x^\delta},\quad m>\delta>0,\ x>1,$$

a integral

$$\int_0^\infty e^{-x^\delta}\,dx$$

konvergira.

2° $\varphi(m)=\frac{1}{m}\int_0^\infty t^{\frac{1}{m}-1}e^{-t}\,dt=\frac{1}{m}\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)=\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)$, tj. $\varphi(m)=\Gamma\varphi\left(1+\frac{1}{m}\right)$.

$\lim\limits_{m\to\infty}\varphi(m)=\lim\limits_{m\to\infty}\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)=\Gamma(1)=1$, tj. $\lim\limits_{m\to\infty}\varphi(m)=1$.

3° Prema vezi $\varphi(m)=\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)\Rightarrow\varphi\left(\frac{1}{n}\right)=\Gamma(n+1)=n!$, pa se otuda opšti član datog reda može napisati u obliku

$$\frac{(2n-1)!!}{2^n\,n!}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n.$$

Može se lako pokazati da red:

1) apsolutno konvergira za $|x|\neq 1$,
2) neapsolutno konvergita za $x=-1$,
3) divergira za $x=1$,
4) uniformno konvergira za svako x koje zadovoljava uslov

$$-1<\frac{2x}{1+x^2}<\frac{1}{\pi},\ \text{gde je } \pi>1,$$

5) zbir reda je

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{\varphi\left(\frac{1}{n}\right)}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^n=\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x-1|}-1,\ x\neq -1.$$

818. Funkcija je parna pa je $a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\cos\lambda t\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^1\cos\lambda t\,dt=\frac{2}{\pi}\frac{\sin\lambda t}{\lambda}\Big|_0^1=$

$$=\frac{2\sin\lambda}{\pi\lambda},\quad f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda.$$

819. $f(x)=\int_0^\infty\frac{(\lambda\sin\lambda+\cos\lambda-1)\cos\lambda x+(\sin\lambda-\lambda\cos\lambda)\sin\lambda x}{\lambda^2}\,d\lambda.$

820. $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{(1-\cos\alpha)\cos\alpha x}{\alpha^2}\,d\alpha.$ **821.** $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\lambda(x-a)-\sin\lambda(x-b)}{\lambda}\,d\lambda.$

822. $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{1-\cos hu}{u}\sin xu\,du.$ **823.** $\frac{2A}{\pi a}\int_0^\infty\frac{1-\cos au}{u}\cos u(x-x_0)\,du.$

824. $\frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-au}\cos ux\,du.$ **825.** $\int_0^\infty e^{-a\lambda}\sin\lambda x\,d\lambda.$

826. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\pi\alpha}+1}{(1-\alpha^2)e^{ix\alpha}}\,d\alpha.$ **827.** $\frac{2A\omega}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\frac{2\pi n\lambda}{\omega}}{\lambda^2-\omega^2}\sin\lambda x\,d\lambda.$

828. $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{m}{m^2+\lambda^2}\cos x\lambda\,d\lambda.$ **829.** $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{u}{m^2+u^2}\sin xu\,du.$

830. $\frac{\omega}{\pi}\int_0^\infty\frac{(k^2+\omega^2-u^2)\cos xu+2ku\sin xu}{(k^2-\omega^2+u^2)^2+4k^2\omega^2}\,du.$

831. $\frac{a}{\pi}\int_0^\infty\left[\frac{1}{(\lambda-\beta)^2+a^2}+\frac{1}{(\lambda+\beta)^2+a^2}\right]\cos\lambda x\,d\lambda.$

832. 1° $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos\lambda x}{1+\lambda^2}\,d\lambda$ $(0<x<\infty)$; 2° $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\lambda\sin\lambda x}{1+\lambda^2}\,d\lambda$ $(0<x<\infty)$.

833. $F(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{x^2+a^2}$. **834.** $F(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ **835.** $F(x)=-i\sqrt{\frac{8}{\pi}}\frac{ax}{(x^2+a^2)^2}$.

836. $F(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\beta}{\beta^2+x^2}$. 837. $F(x)=e^{-\beta x}$ $(x>0)$. 838. $F(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2}$

839. $F(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$. 840. $F(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x}{\beta^2+x^2}$. 841. $F(x)=e^{-\beta x}$ $(x>0)$.

842. $F(x)=xe^{-\frac{1}{2}x^2}$. 844. $\varphi(y)=e^{-y}$ $(y>0)$. 845. $\varphi(y)=\frac{2}{\pi}\frac{y}{1+y^2}$ $(y>0)$.

846. $\varphi(y)=\frac{\sin \pi y}{1-y^2}$. 847. $\varphi(y)=\frac{y \sin \pi x}{1-x^2}$.

Glava IV

848. $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_j \Delta x_i \Delta y_j=\sum_{j=1}^{n} y_i\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x_i\right)\Delta y_j=$

$$=\sum_{j=1}^{n} y_j(x_1\Delta x_1+x_2\Delta x_2+x_3\Delta x_3+\cdots x_n\Delta x_n)\Delta y_j.$$

Ako se uzme da je $\Delta x_i=h$ za svako i onda je dalje

$$\sum_{j=1}^{n} y_i(x_1\Delta x_1+x_2\Delta x_2+x_3\Delta x_3+\cdots x_n\Delta x_n)\Delta y_j=$$

$$=\sum_{j=1}^{n} y_j[h(a+h)+h(a+2h)+\cdots h(a+nh)\Delta y_j=$$

$$=\sum_{j=1}^{n} y_j\Delta y_j\frac{b-a}{n}\left[na+\frac{b-a}{n}\cdot\frac{1}{2}n(n-1)\right]=$$

$$=\frac{d-c}{n}\left[nc+\frac{d-c}{n}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\right]\frac{b-a}{n}\left[na+\frac{b-a}{n}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\right].$$

Granična vrednost dobijenog proizvoda kada $n\to\infty$ biće:

$\frac{d^2-c^2}{2}\cdot\frac{b^2-a^2}{2}$ za $a=0$, $b=1$, $c=0$ i $d=0\Rightarrow$ da je granica zbira $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

Vrednosti funkcije $z(x, y)=xy$ uzimane su u gornjim desnim temenima elementarnih kvadrata (sl). 40.

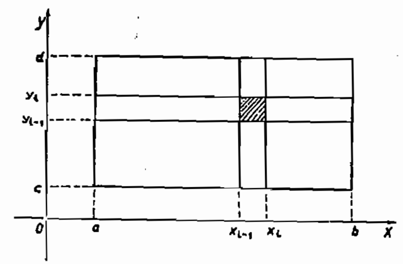
849. $\frac{d^3-c^3}{3}\cdot\frac{b^3-a^3}{3}\cdots$

850. $(e^d-e^c)(e^b-e^a)$.

851. $\underline{S}=\frac{40}{3}-\frac{11}{n}+\frac{5}{3n^2}$;

$$\overline{S}=\frac{40}{3}+\frac{11}{n}+\frac{5}{3n^2};$$

$$\lim_{n\to\infty}\underline{S}=\lim_{n\to\infty}\overline{S}=\frac{40}{3}.$$



Sl. 40

852. 1° U oblasti D najmanje vrednosti za x i y su $-\sqrt{2}$, a najveće $\sqrt{2}$. Stoga je $mP=8(5-\sqrt{2})\pi$, $MP=8(5+\sqrt{2})\pi$.

856. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{y} z(x,y)\,dy = \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y}^{1} z(x,y)\,dx.$

857. $\iint\limits_{D} z(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{2x}^{2x+3} z(x,y)\,dy = \int\limits_{2}^{4} dy \int\limits_{1}^{y/2} z(x,y)\,dx + \int\limits_{4}^{5} dy \int\limits_{1}^{2} z(x,y)\,dx +$

$+ \int\limits_{5}^{7} dy \int\limits_{\frac{y-3}{2}}^{2} z(x,y)\,dx.$

858. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} z(x,y)\,dy = \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} z(x,y)\,dx;\quad \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} z(x,y)\,dy =$

$= \int\limits_{-1/2}^{1/2} dy \int\limits_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}} z(x,y)\,dx.$

859. $\int\limits_{-3}^{-2} dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} z(x,y)\,dy + \int\limits_{-2}^{2} dx \left[\int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{-\sqrt{4-x^2}} z(x,y)\,dy + \int\limits_{\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} z(x,y)\,dy\right] +$

$+ \int\limits_{2}^{3} dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} z(x,y)\,dy.$

860. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x}^{\sqrt{4x-x^2}} z(x,y)\,dy = \int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{2-\sqrt{4-y^2}}^{y} z(x,y)\,dx.$

861. $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-x-1}^{x+1} z(x,y)\,dy + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x-1}^{1-x} z(x,y)\,dy = \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{-y-1}^{y-1} z(x,y)\,dx +$

$+ \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{y+1}^{1-y} z(x,y)\,dx.$

862. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y}^{\sqrt{y}} z(x,y)\,dx = \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{x} z(x,y)\,dy.$

863. $\iint\limits_{D} z(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1} z(x,y)\,dx + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{1} z(x,y)\,dx.$

864. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} z(x,y)\,dy = \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} z(x,y)\,dx.$

865. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x}^{\sqrt{2-x^2}} z(x,y)\,dy = \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y} z(x,y)\,dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y^2}} z(x,y)\,dx.$

866. $\int\limits_{0}^{a} dy \int\limits_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{y} z(x,y)\,dx$ **867.** $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} z(x,y)\,dx.$

868. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} z(x,y)\,dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} z(x,y)\,dx.$

869. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\sqrt{y^3}}^{2-\sqrt{2y-y^2}} z(x,y)\,dx.$

870. 1° $\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{a} rz(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr = \int\limits_{0}^{a} r\,dr \int\limits_{0}^{2\pi} z(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi;$

2° $\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{|a|}^{|b|} rz(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr = \int\limits_{|a|}^{|b|} r\,dr \int\limits_{0}^{2\pi} z(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr.$

871. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{a\cos\varphi} rz(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr = \int\limits_{0}^{|a|} r\,dr \int\limits_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}} z(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi.$

872. $\int\limits_{-1}^{1} d\varphi \int\limits_{0}^{1-\varphi^2} rz(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi = \int\limits_{0}^{1} r\,dr \int\limits_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} z(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi.$

873. $\int\limits_{0}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{1}{\cos\varphi}} r\,z(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{1}{\sin\varphi}} r\,z(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr =$

$= \int\limits_{0}^{1} r\,dr \int\limits_{0}^{\pi/2} z(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} r\,dr \int\limits_{\arccos\frac{1}{r}}^{\arcsin\frac{1}{r}} z(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi.$

874. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{2}{\cos\varphi}} r\,z(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr = \int\limits_{0}^{2\sqrt{3}} r\,dr \int\limits_{\pi/3}^{\arccos\frac{2}{r}} z(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi.$

875. $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_{0}^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} rz\,(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)\,dr = \int\limits_{0}^{a} r\,dr \int\limits_{-\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}}^{\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}} z\,(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,d\varphi.$

876. $\int\limits_{0}^{a} dr \int\limits_{-\arccos r}^{\arccos r} z\,(\varphi, r)\,d\varphi.$ 877. $\int\limits_{0}^{a} dr \int\limits_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}} z\,(\varphi, r)\,d\varphi.$

878. $\int\limits_{0}^{a} dr \int\limits_{r}^{a} z\,(\varphi, r)\,d\varphi.$ 879. $\frac{2}{15}.$ 880. $\frac{3}{8}.$ 881. $\frac{9\pi}{4}$ 882. $\frac{5}{6}.$

883. $e^{-1}.$ 884. $\frac{1}{2}(e^{a^2}-1).$ 885. $14\,a^4.$ 886. $\frac{35\,\pi a^4}{12}.$ 887. $\frac{\pi}{12}.$

888. $\ln\frac{4}{3}.$ 889. $\pi-2.$ 890. $2.$ 891. $-\frac{\pi}{16}.$ 892. $-2.$

893. $\iint\limits_{D} x^2\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} x^2\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} x^2\,dx\,dy = \int\limits_{0}^{1} x^2\,dx \int\limits_{x-1}^{1-x} dy + \int\limits_{-1}^{0} x^2\,dx \int\limits_{-1-x}^{1+x} dy =$

$$= 2\int\limits_{0}^{1} x^2(1-x)\,dx + 2\int\limits_{-1}^{0} x^2(1+x)\,dx = 4\int\limits_{0}^{1} x^2(1-x)\,dx = \frac{1}{3}.$$

894. $1\,\frac{37}{128}-\ln 2.$ 895. $543\,\frac{11}{15}.$ 896. $I(\alpha) = I_1(\alpha) - I_2(\alpha);$

$I_1(\alpha) = \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{1-x} (x+y)^{-\alpha}\,dy$, ako se stavi $x+y=t \Rightarrow I_1(\alpha) = \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x}^{1} t^{-\alpha}\,dt =$

$$= \int\limits_{0}^{1} dx\,\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_{x}^{1} = \frac{1}{1-\alpha}\int\limits_{0}^{1}(1-x^{1-\alpha})\,dx = \frac{1}{1-\alpha}\left(x-\frac{x^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right)\Bigg|_{0}^{1} = \frac{1}{1-\alpha}\left(1-\frac{1}{2-\alpha}\right) =$$

$$= \frac{1-\alpha}{(\alpha-1)(\alpha-2)} = \frac{1}{2-\alpha};$$

$I_2(\alpha) = \int\limits_{0}^{a} dx \int\limits_{0}^{a-x} (x+y)^{-\alpha}\,dy = \int\limits_{0}^{a} dx \int\limits_{x}^{a} t^{-\alpha}\,dt$, gde je $x+y=t$, dalje je $I_2(\alpha) =$

$$= \int\limits_{0}^{a} dx\,\frac{1}{1-\alpha}\,(t^{1-\alpha})\Bigg|_{x}^{a} = \frac{1}{1-\alpha}\int\limits_{0}^{a}(a^{1-\alpha}-x^{1-\alpha})\,dx = \frac{1}{1-\alpha}\left(xa^{1-\alpha}-\frac{x^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right)\Bigg|_{0}^{a} =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\left(a^{2-\alpha}-\frac{a^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right) = \frac{1}{1-\alpha}\left(1-\frac{1}{2-\alpha}\right)a^{2-\alpha} = \frac{a^{2-\alpha}}{2-\alpha}.$$

Tako je $I_1(\alpha) - I_2(\alpha) = \frac{1}{2-\alpha} - \frac{1}{2-\alpha}\,a^{2-\alpha}$, odnosno

$$I(\alpha) = \frac{1}{2-\alpha}\,(1-a^{2-\alpha}) \Rightarrow \lim_{a\to 0} I(\alpha) = \frac{1}{2-\alpha} \qquad (\alpha\neq 2).$$

897. $I(a) = \int\limits_{a}^{1} dx \int\limits_{b}^{x-a} \frac{dy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$. Ako se stavi $y=t^2$ dobija se

$$I(a) = 2\int\limits_{a}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{x-a}} \frac{t\,dt}{\sqrt{x}+t} = 2\int\limits_{a}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{x-a}} \left(1-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+t}\right) dt = 2\int\limits_{0}^{1} \Bigg[\sqrt{x-a} -$$

$$-\sqrt{x}\,\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{a}{x}}\right)\Bigg]\,dt = 2\cdot\frac{2}{3}\Bigg[\,(x-a)^{3/2}\Bigg|_{a}^{1} - x^{3/2}\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{a}{x}}\right)\Bigg| +$$

$$+\frac{a}{2}\int\limits_{a}^{1}\frac{x^{3/2}\frac{dx}{x^2}}{\left(1+\sqrt{1-\frac{x}{a}}\right)\sqrt{1-\frac{a}{x}}} = \frac{4}{3}\Big[(1-a)^{3/2}-\ln(1-\sqrt{1-a})+$$

$$+\frac{a}{2}\int\limits_{a}^{1}\frac{\sqrt{x}\,dx}{(\sqrt{x}+\sqrt{x-a})\sqrt{x-a}}\Bigg];$$

$$\frac{a}{2}\int\limits_{a}^{1}\frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x-a})\sqrt{x-a}}\,dx = \frac{a}{2}\int\limits_{a}^{1}\frac{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}-\sqrt{x-a})}{a\sqrt{x-a}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{a}^{1}\left(\frac{x}{\sqrt{x-a}}-\sqrt{x}\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_{a}^{1}\left(\sqrt{x-a}+\frac{a}{\sqrt{x-a}}-\sqrt{x}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{3}(x-a)^{3/2}+a\sqrt{x-a}-\frac{1}{3}x^{3/2}\Bigg|_{a}^{1} = \frac{1}{3}(1-a)^{3/2}+a(1-a)^{1/2}-\frac{1}{3}(1-a^{3/2}).$$

Tako se dobija $I = \frac{4}{3}\left[\frac{4}{3}(1-a)^{3/2}+a(1-a)^{1/2}-\frac{1}{3}(1-a^{3/2})-\ln(1+\sqrt{1-a})\right]$ ili

$$I = \frac{4}{9}\,[(4-a)\sqrt{1-a}+a\sqrt{a}-1-3\ln(1+\sqrt{1-a})].$$

Prema tome je $\lim\limits_{a\to 0} I(a) = \frac{4}{3}(1-\ln 2).$

898. $I=\int\limits_0^1 y\,dy\int\limits_0^{\sqrt[3]{1-y^3}}\sqrt[3]{1-x^3-y^3}\,x^2\,dx=-\frac{1}{4}\int\limits_0^1 y\,(1-x^3-y^3)^{4/3}\Big|_0^{\sqrt[3]{1-y^3}}dy=\frac{1}{4}\int\limits_0^1 y\,(1-y^3)^{4/3}\,dy=$

$=\frac{1}{4}\int\limits_0^1 y^5\,(y^{-3}-1)^{4/3}\,dy.$

Dobijeni integral je oblika binomnog diferencijala kod koga je $m=1$, $n=3$, $p=\frac{4}{3}$. $\frac{m+1}{n}=\frac{2}{3}$, $\frac{m+1}{n}+p=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$, pa se može integraliti smenom $y^{-3}-1=t^3\Rightarrow -3y^{-4}\,dy=3t^2\,dt$ i $y^9=(1+t^3)^{-3}$; dakle

$$I=-\frac{1}{4}\int\limits_\infty^0 y^9\,t^6\,dt=\frac{1}{4}\int\limits_0^\infty\frac{t^6\,dt}{(1+t^3)^3}=\frac{1}{4\cdot3\cdot2}\,\frac{t^4}{(1+t^3)^2}\Bigg|_\infty^0+\frac{1}{3\cdot2}\int\limits_0^\infty\frac{t^3}{(1+t^3)^2}=$$

$$=\frac{1}{3\cdot2\cdot3}\,\frac{t}{1+t^3}\Bigg|_\infty^0+\frac{1}{18}\int\limits_0^\infty\frac{dt}{1+t^3}$$

pošto je

$$\frac{1}{1+t^3}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+t}-\frac{t-2}{t^2-t+1}\right)\Rightarrow I=\frac{1}{18\cdot3}\int\limits_0^\infty\left(\frac{1}{1+t}-\frac{1}{2}\,\frac{2t-1}{t^2-t+1}\right)dt+$$

$$+\frac{1}{18\cdot2}\int\limits_0^\infty\frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{18\cdot3}\ln\frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+1}}\Bigg|_0^\infty+\frac{1}{18\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^\infty=$$

$$=\frac{1}{18\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi\sqrt{3}}{81}\qquad I=\frac{\pi\sqrt{3}}{81}.$$

899. Preći na polarne koordinate.

900. $\iint\limits_D xy\,dx\,dy=\iint\limits_D\cos\varphi\sin\varphi\,r^3\,dr\,d\varphi+\iint\limits_D\cos\varphi\sin\varphi\,r^3\,dr\,d\varphi=$

$$=\int\limits_0^{\pi/3}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi\int\limits_0^1 r^3\,dr+\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}r^3\,dr=\frac{3}{32}+\frac{1}{96}=\frac{5}{48}.$$

Ako se uzme integral po drugoj mogućoj oblasti biće:

$$\iint\limits_D xy\,dx\,dy=\iint\limits_D\cos\varphi\sin\varphi\,r^3\,dr\,d\varphi=\int\limits_0^{\pi/3}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi\int\limits_1^{2\cos\varphi}r^3\,dr=$$

$$=4\int\limits_0^{\pi/3}\cos^5\varphi\sin\varphi\,d\varphi-\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/3}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi=-\frac{2}{3}(\cos^6\varphi)\Bigg|_0^{\pi/3}+\frac{1}{8}(\cos^2\varphi)\Bigg|_0^{\pi/3}=$$

$$=-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{64}-1\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}-1\right)=\frac{9}{16}.$$

901. $\frac{3\pi a^4}{2}$. 902. $\pi\,(1-e^{-a^2})$. 903. $\frac{2\pi a^3}{3}$. 904. 1° $\frac{\pi a^3}{36}$; 2° $\frac{a^2\pi}{3}$.

905. 2π. 906. $\frac{\pi}{2}\ln\frac{32}{(1+\sqrt[8]{4})^8}$.

907. $I=\int\limits_0^{\pi/4}d\varphi\int\limits_0^{1/\cos\varphi}\frac{\varrho\,d\varrho}{(1+\varrho^2)^{3/2}}+\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{1/\sin\varphi}\frac{\varrho\,d\varrho}{(1+\varrho^2)^{3/2}}\quad I=\frac{\pi}{6}.$ 908. $-6\pi^2$.

909. $\frac{2}{3}\pi ab$. Staviti $x=ar\cos\varphi$, $y=br\sin\varphi$. 910. $\frac{ab\pi\sqrt{3}}{2}$ Staviti $x=ar\cos\varphi$, $y=br\sin\varphi$.

911. $\frac{2}{15}$. 912. $\frac{\pi^2}{6}$.

913. Srednja vrednost funkcije $z\,(x,y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ u oblasti $x^2+y^2<a^2$ biće

$$\mu=\frac{1}{a^2\pi}\iint\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy=\frac{1}{a^2\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a\sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr=\frac{2a}{3}.$$

914. 4. 915. 3. 916. $\frac{1}{4}$. 917. $\frac{1}{3}$. 918. $\frac{a^4}{2}$. 919. $\frac{4}{3}$.

920. $\frac{5}{3}+\frac{\pi}{4}$. 921. $\iint\limits_D=\iint\limits_{D_1}+\iint\limits_{D_2}+\iint\limits_{D_3}$

$$\iint\limits_{D_1}=\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{-\pi/4}d\varphi\int\limits_{\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)}^1\left[r\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)-r^2\right]r\,dr=\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{-\pi/4}\left[\frac{1}{3}\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{4}\right]d\varphi-$$

$$-\frac{1}{12}\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{-\pi/4}\cos^4\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)d\varphi=\left[\frac{1}{3}\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\varphi}{4}\right]\Bigg|_{\frac{3\pi}{4}}^{-\pi/4}-\frac{1}{12}\int\limits_{\pi/2}^{-\pi/2}\cos^4u\,du=$$

$$=\left(-\frac{1}{3}+\frac{\pi}{16}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{3\pi}{16}\right)-\frac{1}{12}\int\limits_{\pi/2}^{-\pi/2}\cos^4u\,du=-\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{32};\ \left(\int\cos^4u=\right.$$

$$\left.=\frac{3}{8}u+\frac{1}{4}\sin2u+\frac{1}{32}\sin4u\right);$$

$$\iint\limits_{D_2}=\int\limits_{-\pi/4}^{3\pi/4}d\varphi\int\limits_0^{\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)}\left[r\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)-r^2\right]r\,dr=\int\limits_{-\pi/4}^{3\pi/4}d\varphi\left[\frac{r^3}{3}\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}r^4\right]\Bigg|_0^{\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{12}\int\limits_{-\pi/4}^{3\pi/4}\cos^4\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)d\varphi=\frac{1}{48}\left[\frac{3}{2}u+\sin2u+\frac{1}{8}\sin4u\right]\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=$$

$$=\frac{1}{48}\left[\left(\frac{3}{4}\pi+0+0\right)-\frac{1}{48}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\frac{\pi}{16\cdot4}+\frac{\pi}{16\cdot4}=\frac{\pi}{32};$$

$$\iint_{D_3} = \int_{7\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int_0^1 \left[r\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)-r^2\right] r\,dr = \int_{7\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \left[\frac{1}{3} r^3 \cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4} r^4\right]\Bigg|_0^1 = \int_{7\pi/4}^{3\pi/4}\left[\frac{1}{3}\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{4}\right]d\varphi = \left[\frac{1}{3}\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\varphi}{4}\right]\Bigg|_{7\pi/4}^{3\pi/4} =$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{3\pi}{16}-\left(-\frac{1}{3}-\frac{7\pi}{16}\right)=\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}.$$

Konačno je $\iint_D = \frac{9}{16}\pi$.

922. $1^\circ \iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} + \iint_{D_3} + \iint_{D_4}$

$$\iint_{D_1} = \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\pi/2-x} \cos(x+y)\,dy = \frac{\pi}{2}-1;\quad \iint_{D_2} = \int_0^{\pi/2} dx \int_\pi^{\pi/2-x} \cos(x+y)\,dy = \frac{\pi}{2}+1;$$

$$\iint_{D_3} = \int_{\pi/2}^{\pi} dx \int_{\frac{3\pi}{2}-x}^{0} \cos(x+y)\,dy = \frac{\pi}{2}+1;$$

$$\iint_{D_4} = \int_{\pi/2}^{\pi} dx \int_{\frac{3\pi}{2}-x}^{\pi} \cos(x+y)\,dy = -1+\frac{\pi}{2}.$$

Konačno je $\iint_D = 2\pi$; 2° π.

923. $$\iint_D (y-x)\,dx\,dy = \iint_{D'}\left[\left(\frac{1}{4}u+\frac{3}{4}v\right)-\left(-\frac{3}{4}u+\frac{3}{4}v\right)\right]\frac{3}{4}\,du\,dv = \iint_{D'}\frac{3}{4}u\,du\,dv =$$

$$= \int_{7/3}^{5}\int_{-3}^{1}\frac{3}{4}u\,du\,dv = -8.$$

924. $\frac{1}{2}$.

925. $\int_a^b u\,du \int_{\alpha}^{\beta} z(u, uv)\,dv.$ 926. $\frac{1}{2}\int_1^2 du \int_{-u}^{4-u} z\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)dv.$

927. $4\cdot\int_0^{\pi/2} \sin^3 v\cos^3 v\,dv\cdot\int_0^a z(u\cos^4 v, u\sin^4 v)\,du.$ 928. $\iint_{D'} z\left[\frac{u(a-v)}{a}, \frac{uv}{a}\right]du\,dv.$

gde je oblast D' definisana nejednačinama $0<u<a$, $0<v\leqslant a$.

929. $u=xy$, $v=x-y$. 930. 1° Preći u polarne koordinate; 2° $x^2=u$, $y^2=v$.

931. $\frac{\pi}{32}$. Staviti $1-y^4=t^2$. 932. Ako se stavi $x^2=u$ i $y^2=v$ dobija se

$$I = \iint_{x^4+y^4\leqslant 1} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint_{u^2+v^2\leqslant 1} (|u|+|v|)\frac{1}{4\sqrt{uv}}\,du\,dv =$$

$$=\frac{1}{4}\iint_{u^2+v^2\leqslant 1}\frac{|u|+|v|}{\sqrt{uv}}\,du\,dv.$$

Ako sada pređemo u polarne koordinate biće

$$I=\frac{1}{4}\iint_{r\leqslant 1} r\frac{|\cos\varphi|+|\sin\varphi|}{r\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}}\,r\,dr\,d\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{|\cos\varphi|+|\sin\varphi|}{\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}}\,d\varphi\int_0^1 r\,dr =$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\frac{1+|\operatorname{ctg}\varphi|}{\sqrt{\operatorname{ctg}\varphi}}\,d\varphi = \frac{1}{8}\,4\int_0^{\pi/2}\frac{1+\operatorname{ctg}\varphi}{\sqrt{\operatorname{ctg}\varphi}}\,d\varphi.$$

Ako se stavi $\operatorname{ctg}\varphi = t^2$ dobija se da je

$$I=\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)\Bigg|_0^\infty = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}+\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

pa je konačno $I=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

933. Ako se uvede smena $x=u\cos^{2/3} v$, $y=u\sin^{2/3} v$, dobija se da je *Jacobian*

$$I=\frac{2}{3}\frac{u}{\sqrt[3]{\sin v\cos v}}$$

pa je

$$\iint_D x^2y^2\sqrt{1-(x^3+y^3)}\,dx\,dy = \frac{2}{3}\iint_D \sin v\cos v\,u^5\sqrt{1-u^3}\,du\,dv =$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}\sin v\cos v\,dv\int_0^1 u^5\sqrt{1-u^3}\,du = \frac{4}{135}.$$

935. $z(0, 0)$.

936. (rez. Da bismo dokazali jednakost, dokazaćemo sledeće tvrđenje: ako je oblast D simetrična u odnosu na pravu $y=x$ onda je

$$\iint_D z(x,y)\,dx\,dy = \iint_D z(y,x)\,dx\,dy. \tag{1}$$

Zaista u integralu na levoj strani može se označiti x sa y i y sa x, pa je

$$\iint_D z(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} z(y,x)\,dx\,dy$$

gde je oblast D' simetrična oblasti D u odnosu na pravu $y=x$. S obzirom na pretpostavku o oblasti D, oblasti D' i D se poklapaju pa važi jednakost (1).

Odatle neposredno sledi: ako je oblast D simetrična u odnosu na pravu $y=x$, a funkcija antisimetrična, tj. sa osobinom

$$z(y, x)=-z(x, y)$$

tada je

$$\iint_D z(x, y)\,dx\,dy=0.$$

Kako je $\dfrac{a\varphi(x)+b\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}=\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{a-b}{2}\,\dfrac{\varphi(x)-\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}$ i $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leqslant c^2}\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}\,dx\,dy=0$

na osnovu prethodnog tvrđenja, sledi da je

$$I=\frac{a+b}{2}\iint_{x^2+y^2\leqslant c^2}=\frac{a+b}{2}\pi c^2=\frac{(a+b)\pi c^2}{2}.$$

937. $\dfrac{2}{t}F(t)$. 939. Konvergira za $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}<1$. 940. Divergira. 942. Divergira. 944. 2π.

945. $\dfrac{\pi}{4a^4}$. 946. 4. 947. $\dfrac{1}{2}$. 948. $\dfrac{1}{2}$. Promeniti poredak integracije.

949. $\dfrac{1}{16}$. Promeniti poredak integracije. 950. $I=\displaystyle\int_0^{\pi/2} d\varphi\int_{1/a}^{\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg} ar}{r^4}\,r\,dr$

gde je $a=\sin\varphi+\cos\varphi$. Ako se sada stavi $ar=t\Rightarrow$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\pi/2} a^2\,d\varphi\int_1^{\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg} t}{t^3}\,dt=\int_0^{\pi/2} a^2\,d\varphi\int_1^{\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg} t}{t^3}\,dt.$$

Kako je $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg} t}{t^3}\,dt=-\frac{\operatorname{arc\,tg} t}{2t^2}\Bigg|_1^{\infty}+\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{dt}{t^2(1+t^2)}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{1+t^2-t^2}{t^2(1+t^2)}\,dt=$

$$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{t}-\operatorname{arc\,tg} t\right)\Bigg|_1^{\infty}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}+1+\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

onda je

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(\sin\varphi+\cos\varphi)^2\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\sin 2\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\varphi-\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$$

951. $\dfrac{\pi}{1-\alpha}$. Pošto na rubu oblasti D podintegralna funkcija može biti i neograničena (za $\alpha>0$), to dati integral ima smisla ako postoji

$$\lim_{a\to 1}\iint_{D'}\frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^{\alpha}}$$

gde je D' oblast definisana nejednačinom $x^2+y^2<a^2$ $0<a<1$.

952. Konvergira. 953. Divergira. 954. Konvergira. 955. Divergira.

956. π. 957. $\dfrac{\pi}{2}$. 958. $\dfrac{\pi}{2}$. 959. Ne može.

960. $ab\pi$. 961. $P=\displaystyle\int_0^{\pi/4} d\varphi\int_0^{2\cos\varphi} r\,dr=2\int_0^{\pi/4}\cos^2\varphi\,d\varphi=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$.

962. $P=\displaystyle\int_{\frac{a}{2}}^{2a} dx\int_{\frac{a^2}{x}}^{\frac{5}{2}a-x} dy=\int_{\frac{a}{2}}^{2a} dx\left(\frac{5}{2}a-x-\frac{a^2}{2}\right)=\left(\frac{5}{2}ax-\frac{1}{2}x^2-a^2\ln x\right)\Bigg|_{\frac{a}{2}}^{2a}=$

$$=\frac{5}{2}\cdot 2a^2-2a^2-a^2\ln 2a-\left(\frac{5}{4}a^2-\frac{a^2}{8}-a^2\ln\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{15}{8}-2\ln a\right)a^2.$$

963. $\dfrac{1}{3}$. 964. $\dfrac{16}{3}$. 965. $\dfrac{a^2}{2}\ln 2$. 966. $\dfrac{32}{3}$. Staviti $y+1=\sin t$. 967. $\dfrac{1}{3}$.

968. $2\arcsin\dfrac{4}{5}-3\ln 3$. Uzet je samo jedan deo.

969. Kako je $r=2a\cos^3\varphi$ to je $\dfrac{P}{2}=\displaystyle\int_0^{\pi/2} d\varphi\int_0^{2a\cos^3\varphi} r\,dr=2a^2\int_0^{\pi/2}\cos^6\varphi\,d\varphi=$

$$=\frac{a^2}{4}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2\varphi)^3\,d\varphi=\frac{a^2}{4}\int_0^{\pi/2}(1+3\cos 2\varphi+3\cos^2 2\varphi+\cos^3 2\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{5}{16}\pi a^2,\ \Rightarrow P=\frac{5}{8}\pi a^2.$$

970. $\dfrac{3\pi}{4}$. 971. $\dfrac{\pi}{2}$. 972. $\dfrac{3\sqrt{3}-\pi}{3}a^2$. 973. $\dfrac{1}{1260}$.

974. $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}\ln(1+\sqrt{2})$. 975. $a^2\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}+\text{ar}\ \dfrac{\sqrt{14}}{8}\right)$.

976. $\frac{\pi ab}{4}\left(\frac{a^2}{k^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$. 977. $\frac{ab}{3}\left[\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\left(\frac{a^4}{h^4}+\frac{b^4}{k^4}\right)+\frac{a^2b^2}{h^2k^2}\right]$.

978. Ako se stavi $x=ar\cos^6\varphi$ i $y=rb\sin^6\varphi\Rightarrow\frac{D(x,y)}{D(\varphi,r)}=6abr\cos^5\varphi\sin^5\varphi$. Otuda polazeći od obrasca $P=\iint_D dx\,dy$ imamo da je $P=\int_0^{\pi/2}\cos^5\varphi\,\sin^5\varphi\,d\varphi\int_0^1 6abr\,dr=$

$$=3ab\int_0^{\pi/2}\cos^5\varphi\sin^5\varphi\,d\varphi=3ab\int_0^{\pi/2}\cos^5\varphi\,(1-\cos^2\varphi)^2\sin\varphi\,d\varphi.$$ Ako se stavi

$$u=\cos\varphi\Rightarrow du=-\sin\varphi\,d\varphi$$

tada će biti

$$P=3ab\int_0^1 u^5(1-u^2)^2\,du=3ab\int_0^1(u^5-2u^7+u^9)\,du=\frac{ab}{20}.$$

979. $\frac{ab}{12}$. Staviti $u=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$ i $v=\frac{x}{a}-\frac{y}{b}$. 980. $\frac{a^3b^3}{60c^4}$. 981. $\frac{a^2b^2}{2c^2}$.

982. $\frac{39}{25}\pi$. 983. $\frac{1}{3}a^2$. 984. $\frac{65}{108}ab$. 985. $\frac{4}{3}(q-p)(s-r)$.

986. $\frac{(a^2-b^2)(\alpha-\beta)}{2(1+\alpha)(1+\beta)}$. 987. $\frac{1}{3}(a-b)\ln\frac{m}{n}$. 988. $\frac{1}{3}(a-b)(m-n)$.

Staviti $y^2+ux,\ x=vy$ 989. $\frac{c^2}{4}[(v_2-v_1)(\operatorname{sh}2u_2-\operatorname{sh}2u_1)-(u_2-u_1)\cdot(\sin 2v_2-\sin 2v_1)]$.

Staviti $x=c\operatorname{ch}u\cos v,\ y=c\operatorname{sh}u\sin v$. 990. $\frac{2}{3}\pi a^2$. 991. $\frac{5}{6}$.

992. 9. 993. $\frac{560}{3}$. 994. $V=c\int_0^a dx\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)dy=\frac{abc}{6}$. 995. 12.

996. $\frac{1}{6}$. 997. $78\frac{15}{32}$. 998. Kako je $z=2-y$ to je $V=\iint_D(2-y)\,dx\,dy\Rightarrow V=$

$$=2\int_0^2 dy\int_0^{\sqrt{y}}(2-y)\,dx=2\int_0^2(2-y)(x)\Big|_0^{\sqrt{y}}dy=4\int_0^4\left(2\sqrt{y}-y\sqrt{y}\right)dy=4\sqrt{y^3}\left(\frac{2}{3}-\frac{y}{5}\right)\Big|_0^2=\frac{32}{15}\sqrt{2}.$$

999. $\frac{48}{5}\sqrt{6}$. 1000. 16.

1001. Kako je $\cos x\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]>0$ za $|x+y|<\frac{\pi}{2}$ i $|x-y|<\frac{\pi}{2}$ to će tražena zapremina $V=\iint_D\cos x\,\cos y\,dx\,dy$, zbog parnosti integralne funkcije u odnosu na obe nezavisno promenljive i simetričnosti oblasti D u odnosu na obe ose, biti

$$V=4\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx\int_0^{\pi/2-x}\cos y\,dy=4\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx\,(\sin y)\Big|_0^{\pi/2-x}=4\int_0^{\pi/2}\cos^2x\,dx=\pi.$$

1002. $\frac{2}{3}$. 1003. $V=\iint_D(3-x^2-y^2)\,dx\,dy\Rightarrow\frac{V}{4}=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\sqrt{3}}(3-r^2)\,r\,dr;\ V=\frac{9\pi}{2}$.

1004. $V=4\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{R\cos\varphi}\sqrt{R^2-r^2}\,r\,dr=-\frac{4R^3}{3}\int_0^{\pi/2}(\sin^3\varphi-1)\,d\varphi;\ V=\frac{2}{9}R^3(3\pi-4)$.

1005. $\frac{45\pi}{32}$. 1006. $\frac{\pi a^3}{8}$. 1007. πa^3.

1008. $\frac{\pi a^3(6\sqrt{3}-5)}{3}$. 1009. $\frac{1}{8}V=\iint_D z\,dx\,dy=c\iint_D\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy=$

$$=c\int_0^a dx\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy=\frac{\pi abc}{6};\ V=\frac{4\pi abc}{3}.$$ Staviti $x=ar\cos\varphi,\ y=ar\sin\varphi$.

1010. $V=\int_0^a dx\int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}}xy^2\,dy=\frac{4a^2}{21}\sqrt{(2pa)^3}$ 1011. $\frac{1}{3}$.

1012. $V=\iint_D x^2y\,dx\,dy=\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^4\,dr=\frac{4}{5}$. 1013. $\frac{5\pi-4}{2}$.

1014. $V=8\int_0^R\sqrt{r^2-x^2}\,dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}dy=\int_0^R(R^2-x^2)\,dx=\frac{16}{3}R^3$.

1015. Jednačina projekcije preseka, tj. oblasti je $x^2+y^2=x+y$, odnosno

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

Tako se dobija da je $V=\iint\limits_D (z_1-z_2)\,dx\,dy=\int\limits_{-\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{\cos\varphi+\sin\varphi} [r(\cos\varphi+\sin\varphi)-r^2]\,r\,dr=$

$$=\frac{1}{12}\int\limits_{-\pi/4}^{3\pi/4}(\cos\varphi+\sin\varphi)^4\,d\varphi=\frac{1}{3}\int\limits_{-\pi/4}^{3\pi/4}\cos^4\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)d\varphi=\frac{1}{3}\int\limits_0^{\pi}\sin^4 t\,dt=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3\pi}{2}=\frac{\pi}{8}\text{, tj. definitivno } V=\frac{\pi}{8}.$$

1016. Oblast integracije je deo ravni određen sa

$$x^2+y^2<a^2.$$

Otuda je

$$V=\frac{4}{3}\pi a^3(\sqrt{2}-1).$$

1017. Oblast integracije određena je jednakošću

$$(y^2-x^2)(a-y)^2=0\Rightarrow y=x;\ y=-x;\ y=a.$$

Otuda je

$$V=\iint\limits_D\sqrt{\frac{(a-y)^2(y^2-x^2)}{y^2}}\,dx\,dy=2\int\limits_0^a(a-y)\,dy\int\limits_0^y\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}\,dx=$$

$$=2\int\limits_0^a(a-y)\,y\,dy\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=2\left(\frac{ay^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^a\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{a^3}{6}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi a^3}{12},\text{ tj. } V=\frac{\pi a^3}{12}.$$

1018. Ako se stavi $x=r\cos\varphi$ i $y=r\sin\varphi\Rightarrow z=ar$ i $r=b(1+\cos\varphi)$ (kardioida) pa je

$$V=2a\iint\limits_D r^2\,dr\,d\varphi=\int\limits_0^{\pi}d\varphi\int\limits_0^{2b\cos^2\frac{\varphi}{2}}r^2\,dr=\frac{16}{3}ab^3\int\limits_0^{\pi}\cos^6\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=\frac{5}{3}ab^3\pi;$$

$$V=\frac{5}{3}ab^3\pi.$$

1019. $V=\iint\limits_D z\,dx\,dy=\iint\limits_D(4-x)\,dx\,dy=\int\limits_0^4(4-x)\,dx\int\limits_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}dy=\int\limits_0^4(4-x)\,dx\,(y)\Big|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}=$

$$=\int\limits_0^4(4-x)\sqrt{x}\,dx=\left(\frac{8}{3}x^{3/2}-\frac{2}{5}x^{5/2}\right)\Bigg|_0^4=\frac{64}{3}-\frac{64}{5}=\frac{128}{15}.$$

1020. $V=2\iint\limits_D z\,dx\,dy$, gde je oblast D definisana nejednačinom $\left(\frac{x-a}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2<1.$

Tako je

$$V=2\iint\limits_D\sqrt{x}\,dx\,dy=2\int\limits_0^{2a}\sqrt{x}\,dx\int\limits_{-b\sqrt{1-\left(\frac{x-a}{a}\right)^2}}^{b\sqrt{1-\left(\frac{x-a}{a}\right)^2}}dy=$$

$$=4b\int\limits_0^{2a}\sqrt{1-\left(\frac{x-a}{a}\right)^2}\sqrt{x}\,dx=\frac{4b}{a}\int\limits_0^{2a}x\sqrt{2a-x}\,dx.$$

Smenom $2a-x=t^2$ dobija se $V=\frac{4b}{a}\int\limits_0^{\sqrt{2a}}t^2(2a-t^2)\,dt=\frac{4b}{a}\left(\frac{2at^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2a}}=$

$$=\frac{4b}{a}\left(\frac{4a^2\sqrt{2a}}{3}-\frac{4a^2\sqrt{2a}}{5}\right)=\frac{32}{15}ab\sqrt{2a}.$$

1021. 1° Jednačina date krive je $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=ax$

2° $V=2a\iint\limits_D\sqrt{1-r^2}\,r\,dr\,d\varphi=2a\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{\cos\varphi}r\sqrt{1-r^2}\,dr=\frac{2a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$

Konačno je $V=\frac{a^3\pi}{3}-\frac{4a^3}{9}.$

1022. $V=\frac{\sqrt{2}}{2}(V_1+V_2+V_3+V_4)$ gde je $V_1=-\iint\limits_{D_1}\ln\frac{x}{y}\,dx\,dy,$

$V_2=-\iint\limits_{D_2}\ln\frac{x}{y}\,dx\,dy,\ V_3=\iint\limits_{D_3}\ln\frac{x}{y}\,dx\,dy,\ V_4=\iint\limits_{D_4}\ln\frac{x}{y}\,dx\,dy$ ili

$$V_1=-\int\limits_{1/2}^{1}dx\int\limits_{1/x}^{5/2-x}(\ln x-\ln y)\,dy=3\ln 2-\frac{9}{8}\ln 3-\ln^2 2-\frac{1}{4},$$

$$V_2=-\int\limits_1^{5/4}dx\int\limits_x^{5/2-x}(\ln x-\ln y)\,dy=2\ln 2+\frac{9}{8}\ln 3-\frac{25}{16}\ln 5+\frac{1}{4},$$

$$V_3=\int\limits_1^{5/4}dx\int\limits_{1/x}^{x}(\ln x-\ln y)\,dy=2\ln 2-\ln 5-\ln^2\frac{5}{4}+\frac{9}{32},$$

$$V_4=\int\limits_{5/4}^{2}dx\int\limits_{1/x}^{5/2-x}(\ln x-\ln y)\,dy=3\ln 2-\frac{9}{16}\ln 5-\ln^2 2+\ln^2\frac{5}{4}-\frac{9}{32}.$$

Tako je konačno $V=5\sqrt{2}\ln 2-\dfrac{25\sqrt{2}}{16}\ln 5-\sqrt{2}\ln^2 x.$

1023. $V=V_1-V_2$ gde je $V_1=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{a\sqrt{2}}\sqrt{3a^2-r^2}\,r\,dr$, i $V_2=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{a\sqrt{2}}\dfrac{r}{2a}r\,dr$. Konačno je $V=\dfrac{a^3\pi}{3}(6\sqrt{3}-5)$.

1024. $V=\int\limits_0^{\pi/4}(\cos\varphi+2\sin\varphi)\,d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}r^2dr+\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}(\cos\varphi+2\sin\varphi)\,d\varphi\int\limits_0^{2\sin\varphi}r^2dr$. Konačno je $V=\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{7}{2}$.

1025. $V=\iint\limits_D(3+x^2+2y^2)\,dx\,dy=2\int\limits_0^{1/\sqrt{2}}dx\int\limits_{2x^2-1}^{0}(3+x^2+2y^2)\,dy=\dfrac{83\sqrt{2}}{35}.$

1026. $V=4\iint\limits_D z\,dx\,dy=\dfrac{2}{a}\iint\limits_{D'}r^3\,dr\,d\varphi=\dfrac{2}{a}\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/4}d\varphi\int\limits_0^{a\sqrt{-\sin 2\varphi}}r^3\,dr=\dfrac{a^3}{2}\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/4}\sin^2 2\varphi\,d\varphi=$

$=\dfrac{a^3}{4}\left(\varphi-\dfrac{\sin 2\varphi\cos 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{\pi/2}^{3\pi/4}=\dfrac{a^3\pi}{16}.$

1027. Zapreminu traženog tela možemo izračunati po obrascu

$V=\iint\limits_D(z_1-z_2)\,dx\,dy+V_1$ gde je $D: z_1=-\dfrac{\sqrt{2}}{5},\ z_2=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{6-x^2-y^2}$

i V_1 zapremina konusa.

Tako je $V=\iint\limits_D\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{5}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{6-x^2-y^2}\right)dx\,dy+\dfrac{288\pi\sqrt{2}}{125}$ ili uvođenjem polarnih koordinata biće $V=\iint\limits_{D'}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{5}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{6-r^2}\right)r\,d\,r\,d\varphi+\dfrac{288\pi\sqrt{2}}{125}$, odnosno

$$V=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{12/5}\left(-\frac{\sqrt{2}}{5}r+\frac{\sqrt{3}}{3}r\sqrt{6-r^2}\right)dr+\frac{\pi\sqrt{2}}{125}.$$

Konačno je $V=\dfrac{128}{25}\pi\sqrt{2}$.

1028. $V=\iint\limits_D z\,dx\,dy=\iint\limits_D\left(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\right)^2dx\,dy=\iint\limits_{D'}(1+2r\cos\varphi+r^2)\,6r\,dr\,d\varphi=$

$=6\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1(r+2r^2\cos\varphi+r^3)\,dr=6\int\limits_0^{2\pi}\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{2}{3}\cos\varphi\right)d\varphi=9\pi.$

1029. Zapremina manjeg tela izračunava se po obrascu

$$V=\iint\limits_{D_2}(x_2-x_3)\,dy\,dz-\iint\limits_{D_1}(x_1-x_3)\,dy\,dz$$

gde je

$x_1=\sqrt{2-y^2-z^2};\ x_2=\sqrt{6-y^2-z^2};\ x_3=y^2+z^2;\ D_1: y^2+z^2<1;\ D_2: y^2+z^2<2.$

Prema tome je

$$V=\iint\limits_{D_2}(\sqrt{6-y^2-z^2}-y^2-z^2)\,dy\,dz-\iint\limits_{D_1}(\sqrt{2-y^2-z^2}-x^2-y^2)\,dy\,dz.$$

Prelaskom na polarne koordinate biće

$$V=\iint\limits_{D_2'}(\sqrt{6-r^2}-r^2)\,r\,dr\,d\varphi-\iint\limits_{D_1'}(\sqrt{2-r^2}-r^2)\,r\,dr\,d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{2}}r(\sqrt{6-r^2}-r^2)\,dr-\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 r(\sqrt{2-r^2}-r^2)\,dr=\frac{\pi}{6}\left(24\sqrt{6}-8\sqrt{2}-37\right).$$

1030. $\dfrac{3\pi}{2\sqrt{2}}\dfrac{a^4}{c}$. 1031. $\dfrac{1}{12}\pi a^3$. 1032. $\dfrac{16}{9}a^3$. 1033. $\dfrac{3}{8}\pi(a+b)$.

1035. $\dfrac{1}{8}\pi ab\left(\dfrac{a^2}{p}+\dfrac{b^2}{q}\right)$. 1036. $\dfrac{a^2b^2}{8c}$.

1037. Smenom $x=r\cos^3\varphi$, $y=br\sin^3\varphi$ dobijamo $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=3abr\sin^2\varphi\cos^2\varphi$. Tako se dobija

$$V=4\iint\limits_D c\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dx\,dy=43\,abc\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi\int\limits_0^1 r\,[1-r^2(\cos^6\varphi+\sin^6\varphi)]\,dr=$$

$=\dfrac{75\,abc}{256}$, odnosno $V=\dfrac{75\,abc}{256}$. 1038. $\dfrac{\pi^2}{2}abc$. 1039. $\dfrac{k}{k+1}abc\pi$.

1040. $\dfrac{4}{9}\dfrac{a^4bc}{h^3}$. 1041. $\dfrac{3\pi}{2\sqrt{2}}abc$. 1042. $\dfrac{abc}{3}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,\Gamma^2\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

1043. $\dfrac{abc}{3n^3}\dfrac{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}$. 1044. $\dfrac{\pi^2 abc^2}{3hn\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$. 1045. $\dfrac{8}{35}$. 1046. $\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{\pi}{16}\right)abc$.

1047. $\dfrac{\pi}{2}abc$. 1048. $\dfrac{1}{9}abc$. 1049. $\lambda=\mu\dfrac{3a^2+\mu^2}{3(a^2-\mu^2)}$. 1050. $\dfrac{e^4-1}{e^2}(m-n)a^2$.

1051. $\dfrac{7}{3}a^3\ln\dfrac{3}{2}$. 1052. $\dfrac{14}{9}\ln 3$. 1053. $\dfrac{1}{192}am(a+m)(3a^2-5am+3m^2)$.

1054. $$P=\iint\limits_D\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx\,dy=\int_0^1\sqrt{1+\frac{1}{x}}\int_0^{2\sqrt{x}}dy=\int_0^1\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx\,(y)\Big|_0^{2\sqrt{x}}=$$

$$=2\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx=\frac{4}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

1055. Kako je $p=x$, $q=y\Rightarrow P=4\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^1 r\sqrt{1+r^2}\,dr=\frac{4}{3}(2\sqrt{2}-1)\int_0^{\pi/2}d\varphi=$

$$=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)\,\pi.$$

1056. Kako je $p=\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{x}{y}$, $q=\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{y}{z}$ biće

$$P=\iint\limits_D\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}\,dx\,dy=\iint\frac{a}{z}\,dx\,dy=a\iint\limits_D\frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}$$

ili

$$P=a\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^b\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}=2\pi a\left(-\sqrt{a^2-r^2}\right)\Big|_0^b=2\pi a\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right).$$

Znači konačno je $P=2\pi a\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right)$.

1057. $$P=R\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_{R\cos\varphi}^{R}\frac{r\,dr}{\sqrt{R^2-r^2}}=R\int_0^{\pi/2}\sqrt{R^2-R^2\cos^2\varphi}\,d\varphi=R^2.$$

1058. $P=\dfrac{4}{3}(a+b)\sqrt{ab}$. 1059. $2\pi\sqrt{2}$. 1060. $8a^2\left(\dfrac{\pi}{4}+1-\sqrt{2}\right)$.

1061. $V=\dfrac{4a^4bc}{9h^3}$; $P=\dfrac{2a^3c}{h^2}$. 1062. Ako se stavi $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$

onda jednačina cilindrične površine ima oblik $r^2=c^2\sin 2\varphi$.

Kako je $zp=x$; $zq=2y\Rightarrow p^2+q^2+1=2\dfrac{x^2+3y^2}{x^2+2y^2}$ to je tražena površina jednaka

$$S=\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{c\sqrt{\sin 2\varphi}}r\sqrt{\frac{\cos^2\varphi+3\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi+2\sin^2\varphi}}\,dr=c^2\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{\frac{1+2\sin^2\varphi}{1+\sin^2\varphi}}\cdot\sin 2\varphi\,d\varphi=$$

$$=c^2\sqrt{2}\int_0^1\sqrt{\frac{1+2t}{1+t}}\,dt;$$ stavljajući $\dfrac{1+2t}{1+t}=u^2$ dobija se dalje

$$S=c^2\sqrt{2}\int_1^{\sqrt{3}/2}\frac{2u^2\,du}{(2-u^2)^2}=c^2\sqrt{2}\left[\sqrt{6}-1+\ln(3+2\sqrt{2})(7-4\sqrt{3})\right].$$

1063. $P=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{r_1}^{r_2}r\sqrt{1+f'^2(r)}\,dr=2\pi\int_{r_1}^{r_2}r\sqrt{1+f'^2(r)}\,dr.$ 1064. $\dfrac{2\pi r^2}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

1065. Površina koja se projektuje na ravan $z=0$ sa obe strane a koju iseca cilindar $x^2+y^2=a^2$ ima vrednost

$$P_1=8a\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{dy}{z}=8a\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}dy=8a^2.$$

Površina koja se projektuje na ravan $y=0$ sa obe strane a koju iseca cilindar $x^2+z^2=a^2$ ima vrednost

$$P_2=8a\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{dz}{y}=8a\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}dz=8a^2.$$

Otuda je definitivno

$$P=P_1+P_2=16a^2.$$

1066. $$P=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2+1}\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\sqrt{r^2+1}\,r\,dr=\frac{2\pi}{3}\left[(R^2+1)^{3/2}-1\right].$$

1067. $$S=\iint\limits_D\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1}\,dx\,dy=\frac{1}{ab}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^r\sqrt{r^2(b^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi+a^2b^2}\,r\,dr=$$

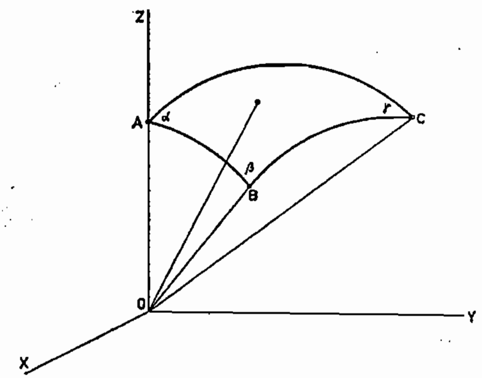
$$=\frac{2\pi ab}{3}(2\sqrt{2}-1)$$ gde je gornja granica $r=\dfrac{b}{b^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi}$.

1068. $$S=4a\int_0^a dx\int_0^y\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}\frac{dy}{z}=2\int_0^{\pi/4}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}}\frac{r\,dr}{\sqrt{ar\sqrt{\cos 2\varphi}-r^2}}=\frac{a^2\pi^2}{2}.$$

1069. $P=2\iint\limits_D\sqrt{1+m^2\frac{x^2}{z^2}+m^2\frac{y^2}{z^2}}\,dx\,dy=2\iint\limits_D\sqrt{\frac{b^2+(m^2-m)r^2}{b^2-mr^2}}\,r\,dr$ gde je $m=\frac{b^2}{a^2}$.

Tako se dobija $P=2\,b^2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\infty}\frac{t^2}{(c+t^2)^2}\,dt=4\pi b^2\left(\frac{1}{2m}-\frac{1}{2\sqrt{c}}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{c}}+\frac{\pi}{4\sqrt{c}}\right)$

odnosno $P=4\,\pi\,b^2\left(\frac{1}{2m}-\frac{1}{2\sqrt{c}}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{c}}+\frac{\pi}{4\sqrt{c}}\right)$ gde je $m-1=c$.



Sl. 41

1070. Posmatrajmo prostorni koordinatni sistem $OXYZ$ (sl. 41). Neka teme A sfernog trougla ABC leži na osi Z, i neka je ravan BCO okomita na koordinatnu ravan YZ. Sa α, β i γ obeležimo redom temena datog trougla ABC.

Pošto je ravan $BCO \perp YZ$ ona ima jednačinu $z=ay$, gde je a konstanta. Jednačina ove ravni u polarnim koordinatama glasi

$$\varrho\cos\theta=a\varrho\sin\theta\sin\varphi$$

odnosno (1) $\operatorname{ctg}\theta=a\sin\varphi$.

U drugu ruku za površinu u polarnim koordinatama imaćemo

$$P=r^2\int\limits_{\varphi_B}^{\varphi_C}d\varphi\int\limits_0^{\theta}d\theta\sin\theta=r^2\int\limits_{\varphi_B}^{\varphi_C}d\varphi\,(-\cos\theta)\Big|_0^{\theta}=r^2\int\limits_{\varphi_B}^{\varphi_C}d\varphi-r^2\int\limits_{\varphi_B}^{\varphi_C}d\varphi\cos\theta.$$

U formuli (1) data je veza između φ i θ. Na osnovu nje je dalje

$$P=r^2\alpha-r^2\int\limits_{\varphi_B}^{\varphi_C}d\varphi\frac{\operatorname{ctg}\theta}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\theta}}=r^2\alpha-r^2\int\limits_{\varphi_B}^{\varphi_C}\frac{a\sin\varphi}{(1+a^2\sin^2\varphi)^{1/2}}\,d\varphi=$$

$$=r^2\alpha+r^2\int\limits_{\varphi_B}^{\varphi_C}\frac{d\,(a\cos\varphi)}{(1+a^2-a^2\cos^2\varphi)^{1/2}}=r^2\alpha+r^2\arcsin\frac{a\cos\varphi}{(1+a^2)^{1/2}}\Bigg|_{\varphi_B}^{\varphi_C}.$$

No kako je arc sin u intervalu $(-\pi,\pi)$ jednak arc cos površina P je data sa

$$(*)\qquad P=r^2\alpha-r^2\arccos\frac{a\cos\varphi}{(1+a^2)^{1/2}}\Bigg|_{\varphi_B}^{\varphi_C}.$$

Pokazaćemo da arc cos ima određeno geometrijsko značenje, upravo da je to ugao ε između dva smera uzeta na lopti.

Iz diferencijalne geometrije poznata je formula kojom se izračunava ugao ε između dva smera: recimo ds i δs.

$$\cos\varepsilon=\frac{dx\,\delta x+dy\,\delta y+dz\,\delta z}{(E\,\delta u^2+2\,F\,\delta u\,\delta v+G\,\delta v^2)^{1/2}\,(E\,du^2+2\,F\,du\,dv+G\,dv^2)^{1/2}}.$$

Uzmimo da je

$$x=r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y=r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z=r\cos\theta.$$

Tada ćemo dobiti da je $ds=(r^2\,d\theta^2+r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2)^{1/2}$.

Posmatrajmo ove smerove, tako da jedan ide po ravni $d\varphi=\cos t$ računajući prema A, a drugi smer ds u posmatranoj ravni u kojoj je smeštena stranica BC. Tada za izraz δs zbog $d\varphi=0$ dobijamo da je

$$\delta s=\nu\,(\delta\theta).$$

Izraz za $\cos\varepsilon$ tada postaje

$$\cos\varepsilon=\frac{r^2\,d\theta\,\delta\theta}{r\,(\delta\theta)\,r\,(d\theta^2+\sin^2\varphi\,d\varphi)^{1/2}}.$$

Zbog orijentacije δs prema A biće promena $\delta\theta<0$ tako da će biti $\frac{\delta\theta}{|\delta\theta|}=-1$ pa imamo da je

$$\cos\varepsilon=-\frac{d\theta}{(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi)^{1/2}}.$$

Zbog formule (1) iz koje izlazi da je $\theta=\operatorname{arc\,tg}(a\sin\varphi)$ imamo da je

$$\cos\varepsilon=\frac{\dfrac{a\cos\varphi}{1+a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi}{\left[\left(\dfrac{a\cos\varphi}{1+a^2\sin^2\varphi}\right)^2+\sin^2\theta\right]^{1/2}}=\frac{a\cos\varphi}{(1+a^2)^{1/2}}.$$

Drugim rečima imamo da je $\varepsilon=\arccos\frac{a\cos\varphi}{(1+a^2)^{1/2}}$ (**).

Ako (**) ubacimo u (*) dobijamo da površina jednaka

$$P=r^2\alpha+r^2\cdot-\varepsilon\Big|_{\varphi_B}^{\varphi_C}=r^2\alpha+r^2(-\varepsilon_C+\varepsilon_B).$$

Međutim $\varepsilon_C=\pi-8$, $\varepsilon_B=\beta$ pa na taj način P postaje

$$P=r^2\,(\alpha+\beta+\gamma-\pi).$$

1071. 1° Pošto je data površ ~~definisana parametarski~~ $x=\varphi(u)\cos\theta,\ y=\varphi(u)\sin\theta,\ z=\psi(u)$ $(\alpha<u<\beta,\ 0<\theta<2\pi)$ to se primenom obrasca

$$S=\iint\limits_D \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv,$$

pri čemu je

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

dobija

(1) $$P=\iint\limits_D |\varphi(u)|\sqrt{\varphi'^2(u)+\psi'^2(u)}\,du\,dx$$

jer je

$\frac{\partial x}{\partial u}=\varphi'(u)\cos\theta;\ \frac{\partial y}{\partial u}=\varphi'(u)\sin\theta;\ \frac{\partial z}{\partial u}=\psi'(u);\ \frac{\partial z}{\partial v}=0;\ \frac{\partial x}{\partial v}=-\varphi(u)\sin\theta;$

$\frac{\partial u}{\partial v}=\varphi(u)\cos\theta$, pa je

$$E=\varphi'^2(u)+\psi'^2(u);\ G=\varphi^2(u);\ F=0 \text{ tj.}$$

$$EG-F^2=\varphi^2(u)\,[\varphi'^2(u)+\psi'^2(u)].$$

Kako je domen integracije definisan relacijama $\alpha<u<\beta,\ 0<\theta<2\pi$ to se iz (1) dobija

$$P=\int_0^{2\pi}dv\int_\alpha^\beta|\varphi(u)|\sqrt{\varphi'^2(u)+\psi'^2(u)}\,du.$$

S obzirom da su granice integracije sa u konstantne a podintegralna funkcija ne zavisi od θ, to se posle integracije po θ dobija

(2) $$P=2\pi\int_\alpha^\beta|\varphi(u)|\sqrt{\varphi'^2(u)+\psi'^2(u)}\,du,$$

što je i trebalo dokazati.

2° Pošto je u datom slučaju $\varphi(u)=e^{-u},\ \psi(u)=\int_0^u\sqrt{1-e^{-2t}}\,dt$ zamenom u obrascu (2)

dobijamo (3) $P=2\pi\int_\alpha^\beta e^{-u}\,du$, jer je $\varphi'(u)=-e^{-u},\ \psi'(u)=\sqrt{1-e^{-2u}}$. Konačno iz

(3) dobija se

$$P=2\pi\,(e^{-\alpha}-e^{-\beta})$$

1072. $P=P_1+P_2$ gde je $P_1=\iint\limits_D\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}\,dx\,dy=a\sqrt3\iint\limits_D\frac{dx\,dy}{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}},$

$$P_2=\iint\limits_D\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}}\,dx\,dy=\frac1a\iint\limits_D\sqrt{a^2+x^2+y^2}\,dx\,dy \text{ a oblast } D:\ x^2+y^2<2a^2.$$

Uvođenjem polarnih koordinata dobija se

$$P=a\sqrt3\iint\limits_{D'}\frac{r\,dr\,d\varphi}{\sqrt{3a^2-r^2}}+\frac1a\iint\limits_{D'}\sqrt{a^2+r^2}\,r\,dr\,d\varphi$$

gde je $D':0\leqslant r<a\sqrt2,\ 0<\varphi<2\pi$. Prema tome je

$$P=a\sqrt3\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{a\sqrt2}\frac{r\,dr}{\sqrt{3a^2-r}}+\frac1a\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{a\sqrt2}r\sqrt{a^2+r^2}\,dr=2a\pi\sqrt3\left(-\sqrt{3a^2-r^2}\right)\Big|_0^{a\sqrt2}+$$

$$+\frac{2\pi}{a}\cdot\frac13(a^2+r^2)^{3/2}\Big|_0^{a\sqrt2}=2a\pi\sqrt3\,(-a+a\sqrt3)+\frac{2\pi}{3a}(3a^2\sqrt3-a^2).$$

Konačno je $P=\frac{16}{3}a^2\pi.$

1073. $P=-\frac{a^2}{9}(11+\pi)+2a^2\int_{3\pi/4}^{\pi}\sqrt{\cos2t}\,dt$ gde je $t=\varphi+\frac{\pi}{4}.$

1074. Neka je P_1 površina manje kalote (manjeg dela koji leži u konusu). Tada je

$P_1=\iint\limits_D\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{18-3(x^2+y^2)}}\,dx\,dy$ gde je oblast D definisana nejednačinom

$x^2+y^2<\frac{144}{25}$. Uvođenjem polarnih koordinata dobijamo

$$P_1=\iint\limits_D r\sqrt{1+\frac{r^2}{18-3r^2}}\,dr\,d\varphi.$$

pri čemu je oblast D' određena nejednakostima $0<\varphi<2\pi,\ 0<r<\frac{12}{5}$. Tako se dobija

$$P_1=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{12/5}\sqrt{\frac{18-2r^2}{18+3r^2}}\,dr=2\pi\int_0^{12/5}r\sqrt{\frac{18-2r^2}{18+3r^2}}\,dr.$$

Stavljajući $\frac{18-2r^2}{18-3r^2}=u^2$ dobija se

$$P_1=36\pi\int_1^3\frac{z^2}{(z\sqrt{3}+\sqrt{2})^2\,(z\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}\,dz.$$

Koristeći identitet

$$\frac{z^2}{(3z^2-2)^2}=\frac{1}{12}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{3\sqrt{3}-2}+\frac{1}{(z\sqrt{3}-\sqrt{2})}-\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{z\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{(z\sqrt{3}+\sqrt{2})}\right]$$

nakon integracije definitivno se dobija da je

$$P_1=\pi\sqrt{6}\ln\frac{7+2\sqrt{6}}{5}+\frac{132}{25}\pi.$$

Pošto je u pitanju rotacioni elipsoid to je njegova površina

$$P=2\pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}x\sqrt{1+x_z^2}\,dz=2\pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{1+u^2}\,du=4\pi\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+u^2}\,du=2\pi\sqrt{6}\,[u\sqrt{1+u^2}+$$

$$+\ln(u+\sqrt{1+u^2})]\Big|_0^{\sqrt{2}}=12\pi+\pi\sqrt{6}\ln(5+2\sqrt{6}).$$

Prema tome je

$$P_2=P-P_1=\frac{168}{25}\pi+\pi\sqrt{6}\ln\frac{11+4\sqrt{6}}{5}.$$

1075. $P=P_1+P_2+P_3$ gde je $P_1=\sqrt{2}\iint\limits_D\frac{dy\,dz}{\sqrt{2-y^2-z^2}}$;

$$P_2=\sqrt{6}\iint\limits_{D_2}\frac{dy\,dz}{\sqrt{6-y^2-z^2}};\quad P_3=\iint\limits_{D_2/D_1}\sqrt{1+4y^2+4z^2}\,dy\,dz.$$

Prelazeći na polarne koordinate dobija se

$$P=\sqrt{2}\iint\limits_{D_1'}\frac{r\,dr\,d\varphi}{\sqrt{2-r^2}}+\sqrt{6}\iint\limits_{D_2'}\frac{r\,dr\,d\varphi}{\sqrt{6-r^2}}+\iint\limits_{D_2'/D_1'}r\sqrt{1+4r^2}\,dr\,d\varphi$$

ili nakon integracije, definitivno se dobija

$$P=\left(\frac{41}{2}-2\sqrt{2}-4\sqrt{6}-\frac{5\sqrt{5}}{6}\right)\pi.$$

1076. $\frac{\pi}{4}\left[3\sqrt{2}-\sqrt{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2+\sqrt{2}\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})\right]$. 1077. $2\pi a^2$.

1078. $\frac{1}{6}(u^3-3u+2)+\pi\ln(u+2\pi)$; $u=\sqrt{4\pi^2+1}$. 1079. $2\sqrt{2}$.

1080. $\frac{a^2}{\sin\alpha\cos\alpha}$. 1081. $\frac{13}{12}$. 1082. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[3-\sqrt{\frac{3}{2}}+\ln\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+1\right)\right]$.

1083. $\frac{ab}{9}(20-3\pi)$. 1084. π^2a^2. 1085. $\arcsin\frac{bc}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}$.

1086. $P=4\pi(3+2\sqrt{3})a^2$; $V=\frac{8\pi}{\sqrt{3}}a^3$. 1087. Jednačine krugova su $r=R_1$ i $r=R_2$ ako se centar prstena postavi u koordinatni početak. Površinska gustina u tački $P(\varphi, r)$ prstena je $\varrho(p)=\frac{k}{r^2}$. Otuda je masa celog prstena

$$m=\iint\limits_D\varrho r\,d\varphi\,dr=\iint\limits_{R_1\le\varrho\le R_2}\frac{k}{r}\,d\varphi\,dr=k\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r}=2k\pi\ln\frac{R_1}{R_2}.$$

1088. Ako uzmemo da elipsa ima centar u koordinatnom početku a da joj je jednačina $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ i da je u tački $P(x, y)$, $\varrho(m)=\lambda|x|$ dobija se konačno

$$\frac{1}{2}m=\iint\limits_D\lambda x\,dx\,dy=\lambda\int_{-b}^{b}dy\int_0^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}}dx=\frac{2}{3}a^2b\lambda.$$

1089. Pretpostavimo da hipotenuza kruga ima dužinu $2a$. Pretpostavimo dalje da se hipotenuza trougla poklapa sa Ox osom i da je teme pravog ugla na pozitivnom delu ose Oy. Tada će jednačina kateta biti $y=x+a$ i $y=x-a$. Saglasno uslovu zadatka površinska gustina u tački $P(x, y)$ iznosi $\varrho=ky$. Dalje, na osnovu odgovarajućih formula biće

$$I_x=\iint\limits_D ky^2\,dx\,dy=k\int_0^a y^2\,dx\int_{y-a}^{a-y}dy=\frac{ka^4}{6};$$

$$I_y=\iint\limits_D kxy\,dx\,dy=k\int_0^a y\,dy\int_{-(a-y)}^{a-y}x\,dx=0;$$

$$m=\iint\limits_D ky\,dx\,dy=2k\int_0^a y\,dy\int_{y-a}^{a-y}dx=2k\int_0^a y(a-y)\,dy=\frac{ka^3}{3}.$$

Otuda je konačno

$$x_0=\frac{I_y}{m}=0,\quad y_0=\frac{I_x}{m}=\frac{a}{2}.$$

1090. $I_x=\iint\limits_D ky^3\,dx\,dy=k\int_0^a y^3\,dy\int_{y-a}^{a-y}dx=\frac{ka^5}{10}$. 1091. $kp(4-\pi)$. 1092. $\frac{ab^2}{2}$.

1093. $\frac{2}{3}R^3$. 1094. πR^3. 1095. $\frac{9}{4}a^3$ 1096. Statički moment je $\frac{ah^2}{6}$.

1097. $\frac{ka^3\sqrt{2}}{3}$. 1099. $\frac{5}{4}\pi a^4$. 1100. $\frac{\pi ab}{4}(a^2+b)^2$.

1101. $\frac{ab(a^2+b^2)}{12}$. 1102. $\frac{ah}{48}(a^2+12h^2)$. 1103. $\frac{3\pi a^4}{2}$.

1104. $x_0=0$; $y_0=\frac{4}{3}\pi a$. 1105. $x_0=0$; $y_0=\frac{4b}{3\pi}$. 1106. πa; $\frac{5}{6}a$.

1107. $x_0=\frac{3\pi}{16}$; $y_0=0$. 1108. $\frac{2\sqrt{2}}{3\pi}$; $\frac{1}{4}$. 1109. $\left(\frac{a}{5},\frac{a}{5}\right)$. 1110. $\frac{3\pi a}{64}$; $\frac{3\pi b}{64}$.

1111. $x_0=\frac{1}{5}:\left(\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt[10]{8}}-\frac{1}{2\sqrt[5]{16}}\right)$ $y_0=\frac{5}{14}\sqrt[5]{\frac{1}{4}}:\left(\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt[10]{8}}-\frac{1}{2\sqrt[5]{16}}\right)$.

1112. $x_0=\left(1-\frac{\pi}{4}\right)(\sqrt{2}+1)$, $y_0=\frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)(2+\sqrt{2})$.

1113. $x_0=y_0=\frac{3}{31}\left(\arcsin\frac{5}{13}-6\ln\frac{3}{2}\right)$.

1114. Težište leži na simetrali ugla α, na rastojanju $d=\frac{4}{3}a\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha}$ gde je a poluprečnik kruga.

1115. Težište se nalazi na simetrali ugla α, na rastojanju $d=\frac{4}{3}a\frac{\sin^3\frac{\alpha}{2}}{\alpha-\sin\alpha}$ od centra kruga, gde je a poluprečnik kruga.

1116. Ako promenimo odgovarajuće formule dobijamo

$$I_x=\iint_D xz\,dx\,dy=\iint_D x(4-x-y)\,dx\,dy=-\int_0^1 x\,dx\int_0^1(4-x-y)\,d(4-x-y)=\frac{17}{12}$$

$$I_y=\iint_D z^2\,dx\,dy=\iint_D(4-x-y)^2\,dx\,dy=-\int_0^1 dx\int_0^1(4-x-y)^2\,d(4-x-y)=\frac{55}{6}$$

$$I_z=\iint_D z\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_0^1(4-x-y)\,dy=3.$$

Ako se dobijene vrednosti zamene u gornjim formulama dobija se

$$x_0=y_0=\frac{I_x}{I_z}=\frac{17}{36};\quad z_0=\frac{I_y}{2I_z}=\frac{55}{36}.$$

1117. $\left(0,0,\frac{3a}{8}\right)$. 1118. $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right)$ 1119. $\left(\frac{3(a+b)(2R^2-a^2-b^2)}{4(3R^2-a^2-b^2-ab)},0,0\right)$.

1120. $X=ah^2$, $Y=0$ gde su X i Y projekcije sile pritiska na koordinatne ose Ox i Oy.

1121. $P_1=\pi a^2\varrho\left(h-\frac{2}{3}a\right)$; $P_2=\pi a^2\varrho\left(h+\frac{2}{3}a\right)$.

1122. Projekcije sile pritiska na ose Oy i Oz postavljene u vertikalnu ravan koja prolazi kroz osu cilindra, tako da je osa Ox horizontalna a osa Oz vertikalna, iznose respektivno:

$$X_1=-\pi a^2\varrho\left(h-\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\sin\alpha;\quad X_2=\pi a^2\varrho\left(h+\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\sin\alpha.$$

$$Z_1=-\pi a^2\varrho\left(h-\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\cos\alpha;\quad Z_2=\pi a^2\varrho\left(h+\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\cos\alpha.$$

1123. Projekcije sile privlačenja na ose Ox, Oy, Oz respektivno iznose $X=0$; $Y=0$;

$$Z=-\frac{2kmM}{a^2h}\{|b|-|b-h|+\sqrt{a^2+(b+h)^2}-\sqrt{a^2+b^2}\}$$

gde je k konstanta gravitacije.

1128. 6. 1129. $I=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}dy\frac{(4+z)^2}{2}\Big|_0^2=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}(18-8)\,dy=10\int_{-1}^{1}dx\,(y)\Big|_{x^2}^{1}=$

$$=10\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx=10\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{1}=10\left(1-\frac{1}{3}\right)-10\left(-1+\frac{1}{3}\right)=10\frac{2}{3}+10\frac{2}{3}=\frac{40}{3}.$$

1130. $\frac{a^6}{48}$. 1131. $\frac{a^{11}}{110}$.

1132. $I=\int_0^1(1-x)dx\int_0^{1-x}y\,dy\int_0^{1-x-y}z\,dz=\int_0^1(1-x)\,dx\int_0^{1-x}y\,dy\left(\frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^{1-x-y}=$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)\,dx\int_0^{1-x}[(1-x)^2y-2(1-x)y^2+y^3]\,dy=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)\,dx\Big[(1-x)^2\frac{y^2}{2}-$$

$$-2(1-x)\frac{y^3}{3}+\frac{y^4}{4}\Big]\Big|_0^{1-x}=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)\left[\frac{(1-x)^4}{2}-\frac{2}{3}(1-x)^4+\frac{1}{4}(1-x)^4\right]dx=$$

$$=\frac{1}{24}\int_0^1(1-x)^5\,dx=-\frac{(1-x)^6}{144}\Big|_0^1=\frac{1}{144}.$$

1133. $\int_0^1dx\int_0^1dy\int_0^1(x+y+z)\,dz=\int_0^1dx\int_0^1dy\left[(x+y)z+\frac{z^2}{2}\right]\Big|_0^1=\int_0^1dx\int_0^1dy\left(x+y+\frac{1}{2}\right)=$

$$=\int_0^1dx\left(\frac{2x+1}{2}y+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1=\int_0^1\left(\frac{2x+1}{2}+\frac{1}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^1(2x+2)\,dx=\int_0^1(x+1)\,dx=$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_0^1=\frac{3}{2}.$$

1134. $2e-5$.

1135. $I=\iint\limits_D dx\,dy\int\limits_{z_1}^{z_2}(x^2+y^2+z^2)\,dz=\iint\limits_D dx\,dy\,I_1.$

Kako je

$$I_1=\int\limits_{z_1}^{z_2}(x^2+y^2+z^2)\,dz=\left[(x^2+y^2)\,z+\frac{z^3}{3}\right]\Bigg|_{z_1}^{z_2}=2a^2\sqrt{3}\sqrt{a^2-x^2-y^2},$$

gde je $z_{1,2}=\pm\sqrt{3\,(a^2-x^2-y^2)}$, to je

$$I=2a^2\sqrt{3}\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy=2a^2\sqrt{3}\iint\limits_{r\le a}\sqrt{a^2-r^2}\;r\,dr\,d\varphi=$$

$$=2a^2\sqrt{3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a\sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr=-2\pi a^2\sqrt{3}\int\limits_0^a(a^2-r^2)^{1/2}\,d(a^2-r^2)=$$

$$=-\frac{4}{3}\pi a^2\sqrt{3}\,(\sqrt{a^2-r^2})^3\Bigg|_0^a=\frac{2}{3}a^5\sqrt{3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{4\pi a^5}{\sqrt{3}}.$$

1136. $I=\iint\limits_D dx\,dz\int\limits_{y_1}^{y_2}=\iint\limits_D dx\,dz\cdot I_1$ gde $I_1=\int\limits_{\sqrt{x^2+z^2}}^{h}y\,dy=\frac{1}{2}(h^2-x^2-z^2)$. Tako se dobija

da je $I=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+z^2\le h^2}(h^2-x^2-z^2)\,dx\,dz=\frac{1}{2}\iint\limits_{r\le h}(h^2-r^2)\,r\,dr\,d\varphi=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^h(h^2-r^2)\,r\,dr=$

$=\frac{\pi}{4}h^4.$ **1137.** $\frac{\pi^3}{16}-\frac{1}{2}.$ **1138.** $\frac{4}{5}\pi abc.$ **1139.** $-\frac{7\pi}{30}a^5.$

1140. $I=-2\,a\ln a+2\,(a+b)\ln(a+b)-b\ln(a^2+b^2)+2\,a\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}-\frac{\pi}{2}\right).$

$$\lim_{b\to\infty}\left[\left(\frac{a}{b}+1\right)\ln(a+b)^2-\ln(a^2+b^2)\right]=\lim_{b\to\infty}\ln\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}=0.$$

1141. $\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}.$ **1142.** $\frac{\pi}{6}.$ **1143.** 0. **1144.** $\frac{\pi R^2}{5}(2-\sqrt{2}).$ **1145.** $\frac{Rh^2}{16}.$

1146. $\int\limits_0^h\int\limits_0^a\int\limits_0^{a-y}f(x,\,y,\,z)\,dx\,dy\,dz=\int\limits_0^h\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\frac{a}{\sin\varphi+\cos\varphi}}f\cdot r\,dr\,d\varphi\,dz=$

$$=\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{w}\int\limits_0^{\frac{h}{\cos\theta}}f\cdot R^2\sin\theta\,dR\,d\theta\,d\varphi+\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_w^{\pi/2}\int\limits_0^{R_1}f\cdot R^2\sin\theta\,dR\,d\theta\,d\varphi$$

gde je

$$\omega=\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{h\,(\cos\varphi+\sin\varphi)};\quad R_1=\frac{a}{\sin\theta\,(\cos\varphi+\sin\varphi)}.$$

1147. $\int\limits_0^a\int\limits_0^{a-x}\int\limits_0^{a-x-y}f\,dz\,dy\,dx=\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{r_1}\int\limits_0^{a-r\,(\cos\varphi+\sin\varphi)}f\cdot r\,dz\,dr\,d\varphi=\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{R_1}f\,R^2\sin\theta\,dR\,d\theta\,d\varphi$

gde je $r_1=\frac{a}{\cos\varphi+\sin\varphi}$; $R_1=\frac{a}{\cos\theta+\sin\theta\,(\cos\varphi+\sin\varphi)}.$

1148. $\int\limits_{-a}^a\int\limits_{-y_1}^{y_1}\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\operatorname{ctg}\alpha}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}f\cdot dz\,dy\,dx=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^a\int\limits_{r\cos\alpha}^{\sqrt{a^2-r^2}}f\,r\,dz\,dr\,d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\alpha}\int\limits_0^{a}f\,R^2\sin\theta\,dR\,d\theta\,d\varphi;$

$y_1=\sqrt{a^2\sin^2\alpha-x^2}.$ **1149.** $\int\limits_{-a/\sqrt{2}}^{a/\sqrt{2}}\int\limits_{-\sqrt{a^2-2x^2}}^{\sqrt{a^2-2x^2}}\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}f\cdot dz\,dy\,dx=$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\varrho}\int\limits_r^{\sqrt{a^2-r^2\cos^2\varphi}}f\cdot r\,dz\,dr\,d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi/4}\int\limits_0^{R_1}f\cdot R^2\sin\theta\cdot dR\,d\theta\,d\varphi$$

gde je

$$\varrho=\frac{a}{\sqrt{2\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}};\quad R_1=\frac{a}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta\cos^2\varphi}}.$$

1150. $\int\limits_0^1 dx\left\{\int\limits_0^x dz\int\limits_0^{1-x}f(x,\,y,\,z)\,dy+\int\limits_x^1 dz\int\limits_{z-x}^{1-x}f(x,\,y,\,z)\,dy\right\}=\int\limits_0^1 dz\left\{\int\limits_0^z dy\cdot\int\limits_{z-y}^{1-y}f(x,\,y,\,z)\,dz+\right.$

$$\left.+\int\limits_z^1 dy\int\limits_0^{1-y}f(x,y,z)\,dx\right\}.$$

1151. $\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{|x|}^1 dz\int\limits_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}}f(x,y,z)\,dy=\int\limits_0^1 dz\int\limits_{-z}^z dy\int\limits_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}}f(x,\,y,\,z)\,dx.$

1152. $\int\limits_0^1 dx\left\{\int\limits_0^{x^2}dz\int\limits_0^1 f(x,y,z)\,dy+\int\limits_{x^2}^{x^2+1}dz\int\limits_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)\,dy\right\}=\int\limits_0^1 dz\left\{\int\limits_0^{\sqrt{z}}dy\int\limits_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)\,dx+\right.$

$$\left.+\int\limits_{\sqrt{z}}^1 dy\int\limits_0^1 f(x,y,z)\,dy\right\}+\int\limits_1^2 dz\int\limits_{\sqrt{z-1}}^1 dy\int\limits_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)\,dx.$$

1153. 1° $\iiint\limits_V\frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}=\iiint\limits_{V'}\frac{r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi}{\sqrt{r^2-4R\cos\theta+4}}=$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\frac{r\,dr}{4}\int\limits_0^{\pi}\frac{4r\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{r^2-4r\cos\theta+4}}=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^1 r\,dr\int\limits_0^{\pi}(r^2-4r\cos\theta+4)^{-\frac{1}{2}}\,d(r^2-$$

$$-4r\cos\theta+4)=\frac{\pi}{2}\int_0^1 r\,dr\cdot 2\left(\sqrt{r^2-4r\cos\theta+4}\right)\Big|_0^{\pi}=\pi\int_0^1 r\,dr\left(\sqrt{r^2+4r+4}-\sqrt{r^2-4r+4}\right)=$$

$$=\pi\int_0^1 r\,dr\,[r+2+(r-2)]=2\pi\int_0^1 r^2\,dr=\frac{2\pi}{3}.$$

1154. $\frac{\pi}{10}$. **1155.** $\frac{\pi}{15}(2\sqrt{2}-1)$. **1156.** $\frac{16\pi}{3}$. **1157.** $\frac{\pi^2 abc}{4}$. Staviti

$x=ar\cos\varphi\sin\theta,\ y=br\sin\varphi\sin\theta,\ z=cr\cos\theta.$

1158. $\mu=3(e-2)$. **1159.** $\frac{6}{5}$. **1160.** $\frac{e-2}{2}$. **1161.** $\frac{\pi a}{2}$. **1162.** $\frac{8}{9}\cdot a^2$.

1163. $\frac{\pi}{8}$. **1164.** $\frac{4}{15}\pi(R^5-a^5)$. **1165.** Dovoljno je pretpostaviti neprekidnost funkcije.

1166. $\frac{8}{13}$. **1167.** $\frac{\pi}{16}$. **1168.** $\pi\sqrt{\pi}$. Koristiti Poissonov integral $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1169. 1° Divergira. 2° Konvergira. **1170.** Konvergira za $\alpha<1$. **1171.** Divergira.

1172. Konvergira. **1173.** Divergira. **1174.** $\frac{8}{3}\pi R^3\left(\ln R-\frac{1}{3}\right)$.

1175. Konvergira za $p<\frac{3}{2}$. **1176.** $(1-p)^{-1}(1-q)^{-1}(1-r)^{-1}$ $(p<1,\ q<1,\ r<1)$.

1177. $\pi^{3/2}$ **1178.** $\frac{1}{n!}$. **1179.** $\frac{1}{(n+1)!}$. **1180.** $\frac{2^n a^n}{n!}$.

1181. $\frac{n}{3}$. **1182.** $\frac{n(n-1)}{8}$.

1186. $$V=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}dy\int_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2}dz=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}(2x^2+2y^2-x^2-y^2)\,dy=\int_0^1 dx\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{x^2}^{x}=$$

$$=\int_0^1\left(x^3-x^4+\frac{x^3}{3}-\frac{x^6}{6}\right)dx=\int_0^1\left(\frac{4}{3}x^3-x^4-\frac{x^6}{3}\right)dx=\frac{3}{35}.$$

1187. $$V=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_{xy}^{x+y}dz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x+y-xy)\,dy=\int_0^1 dx\left(xy+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}xy^2\right)\Big|_0^{1-x}=$$

$$=\int_0^1\left[x(1-x)+\frac{1}{2}(1-x)^2-\frac{x}{2}(1-x)^2\right]dx=\frac{7}{24}.$$

1188. $$V=4\int_0^a dx\int_0^{a-x}dy\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}dz=4\int_0^a dx\int_0^{a-x}\left(2\sqrt{a^2-x^2}\right)dy=8\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,(a-x)\,dx=$$

$$=8\left[a\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx-\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx\right]=\frac{2}{3}a^3(3\pi-4).$$

1189. Kako je $a(a-x-y)=a^2-x^2-y^2$ odnosno $x^2+y^2-ax-ay=0$ to se data oblast projektuje na dobijeni krug.
Otuda je

$$V=\iint_D dx\,dy\int_{a-x-y}^{\frac{a^2-x^2-y^2}{a}}dz=\iint_D dx\,dy\left[\frac{a^2-x^2-y^2}{a}-(a-x-y)\right].$$

Prelazeći na polarne koordinate dobija se

$$V=\frac{1}{a}\int_{-\pi/4}^{3\pi/4}d\varphi\int_0^{a(\cos\varphi+\sin\varphi)}[ar^2(\cos\varphi+\sin\varphi)-r^3]\,dr=\frac{a^3}{12}\,4\int_{-\pi/4}^{3\pi/4}\cos^4\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)d\varphi.$$

Ako se stavi $\frac{\pi}{4}-\varphi=t$ dobija se

$$V=\frac{a^3}{12}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4 t\,dt=\frac{a^3}{12}\left[\frac{3}{8}t+\frac{1}{4}\sin 2t+\frac{1}{32}\sin 4t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{a^3}{12}\cdot\frac{3}{8}\pi=\frac{a^3\pi}{32}.$$

1190. Tražena zapremina se projektuje u pravougaonik određen nejednakostima $-1<x<2$; $-1<y<1$. Otuda je

$$V=2\int_{-1}^{2}dx\int_0^1 dy\int_{y^2+2}^{4-y^2}dz=2\int_{-1}^{2}dx\int_0^1(4-y^2-y^2-2)\,dy=2\int_{-1}^{2}\left(2y-\frac{2}{3}y^3\right)\Big|_0^1 dx=$$

$$=\frac{8}{3}\int_{-1}^{2}dx=\frac{8}{3}(2+1)=8.$$ **1191.** $\frac{3\pi c^4}{8a}$. **1192.** $4(4-3\ln 3)$. **1193.** $\frac{\pi}{2}$.

1194. $$V=4\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^2 r\,dr\int_r^{6-r^2}dz=4\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^2 r(6-r^2-r)\,dr=2\pi\left(3r^2-\frac{r^4}{4}-\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^2=\frac{32\pi}{3}.$$

1195. $\frac{19}{6}\pi$ i $\frac{15}{2}\pi$. **1196.** $\frac{96}{5}\pi$. **1197.** Stavljajući $x=ra\cos\varphi,\ y=rb\sin\varphi,\ z=cz$

dobija se

$$V=2\iiint_V dx\,dy\,dz=2abc\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r\,dr\int_0^{\sqrt[4]{1-r^2}}dz=\frac{4}{3}\pi abc.$$

1198. $x=ra\cos\varphi,\ y=rb\sin\varphi,\ z=cz\Rightarrow z=\pm\sqrt[4]{1-r^4}$. Tako se dobija

$$V=abc\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r\,dr\int_0^{\sqrt{1-r^4}}dz=2\pi abc\int_0^1\sqrt[4]{1-t^2}\,dt=abc\pi\int_{-1}^{1}\sqrt[4]{(1+t)(1-t)}\,dt=$$

$$=\pi abc\sqrt{2}\int_{-1}^{1}\sqrt[4]{\frac{1+t}{2}\left(1-\frac{1+t}{2}\right)}\,dt=2abc\pi\sqrt{2}\int_0^{1}u^{1/4}(1-u)^{1/4}\,du=2\,abc\,\pi\sqrt{2}$$

$B\left(\frac{5}{4},\frac{5}{4}\right)$. Kako je $B\left(\frac{5}{4},\frac{5}{4}\right)=\dfrac{\Gamma^2\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}$ to je nakon izračunavanja $\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)$ i $\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)$ konačno $V=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\dfrac{abc}{3}\Gamma^2\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

1199. $\frac{5}{12}\pi R^3$.

1200. $\frac{\pi}{96}$. 1201. $V=\frac{10}{21}-\frac{\pi}{8}$. 1202. $\frac{92}{75}\pi R^3$. 1203. $\frac{5}{12}abc\,(3-\sqrt{5})$.

1204. $$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^2\,dr=2\pi\int_0^{\pi/4}\sin\theta\frac{8a^3\cos^3\theta}{3}\,d\theta=\frac{16\pi a^3}{3}\int_0^{\pi/4}\cos^3\theta\sin\theta\,d\theta=$$

$$=\frac{16\pi a^3}{3}\cdot\frac{1}{4}(\sin^4\theta)\Big|_0^{\pi/4}=\pi a^3.$$

1205. $$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\sin\theta\,d\theta\int_0^{a\sqrt{1-2\cos^2\theta}}r^2\,dr=\frac{2\pi a^3}{3}\int_{\pi/4}^{3\pi/4}(1-2\cos^2\theta)\sqrt{1-2\cos^2\theta}\sin\theta\,d\theta=$$

$$=\frac{2\pi a^3}{3\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}(1-t^2)\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{2\pi a^3}{3\sqrt{2}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4u\,du=\frac{3\pi a^3}{3\sqrt{2}}\left(\frac{3}{8}u+\frac{1}{4}\sin 4u+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{32}\sin^4 u\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{\pi^2a^3}{4\sqrt{2}}.$$

1206. Prelazeći na sferne koordinate dobija se

$$V=4\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta\int_0^{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta\cos\theta}}r^2\,dr=$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\cos\theta\,d\theta=\frac{1}{2}.$$

1207. $\frac{1}{3}\pi a^3$. 1208. $\frac{4}{21}\pi a^5$. 1209. $\frac{4}{3}\pi a^5$. 1210. $\frac{32}{315}a^3$. 1211. $\frac{\pi a^3}{8}$.

1212. $\frac{4\pi}{9}(a^3+b^3+c^3)$. 1213. $\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{1}{e}\right)a^3$. 1214. $\frac{2}{3}\pi a^3$.

1215. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+cz^2$; $V=\dfrac{\pi a^3(3\pi+8)\sqrt{2}}{24}$.

1216. $$V=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{\sqrt[3]{\frac{a}{h}}\sqrt[3]{\cos\varphi\sin\theta}}abc\,r^2\,dr=\frac{a^2bc}{3h}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,d\theta=$$

$=\frac{\pi}{3}\frac{a^2bc}{h}$. 1217. $\frac{a\pi}{3}$. 1218. $\frac{a^3b^3c^3}{360}$. 1219. $\frac{\pi^2}{4}abc$.

1220. $2\pi^2(1-a^2)\,abc$. 1221. $\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{1}{e}\right)\frac{abc^2}{h}$. 1222. $\frac{abc^4}{60l^3}$.

1223. $\frac{abc}{60}\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}\right)\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$. 1224. $\frac{abc}{60}\frac{hk}{ak+bh}\left(\frac{a}{h}\right)^4$. 1225. $\frac{\pi\,abc}{64}\frac{hk}{ak+bk}\left(\frac{a}{h}\right)^4$.

1226. $V=\dfrac{abc}{np+mp+nm}\,\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)}$. Staviti $x=a\,(r\cos\varphi\sin\theta)^{\frac{2}{m}}$;

$y=b\,(r\sin\varphi\sin\theta)^{\frac{2}{n}}$; $z=c\,(r\cos\theta)^{\frac{2}{p}}$.

1227. $\frac{abc}{12}$. 1228. $\frac{abc}{1680}$. 1229. $\frac{49}{864}a^3$. 1230. $\frac{4\pi}{3\Delta}$, gde je $\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$.

1231. $\frac{37}{27}$. 1232. $V=\frac{1}{3}(b^3-a^3)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)$.

1233. $V=\frac{5}{6}\pi a^3$; $P=\frac{\pi}{6}a^2(6\sqrt{2}+5\sqrt{5}-1)$. 1234. Saglasno uslovu zadatka biće:

$$M=\iint_D y\,dx\,dy\int_{1-y}^{2(1-y)}dz=\int_0^1(y-y^2)\,dy\int_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}}dx=\frac{8\sqrt{2}}{35}.$$

1235. $\frac{3}{2}a^4$. 1236. Na osnovu odgovarajuće formule biće:

$$M=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1(x+y+z)\,dz=\frac{3}{2}.$$

1237. $\frac{\pi R^2 h(kh+2)}{2}$. **1238.** $\frac{8}{5}\pi$. **1239.** $\frac{k\pi h^2 R^2}{4}$. **1240.** $\frac{2k\pi}{3}(R^3-r^3)$.

1241. $\frac{kab}{3}(a^2+b^2)$. **1242.** $\frac{k\pi R^4}{12}$. **1243.** $4\pi\varrho_0\left(\frac{1}{k}+\frac{2}{k^2}+\frac{2}{k^3}\right)e^{-k}$.

1244. Očigledno je, na osnovu uslova zadatka i simetrije tela, da je $x_0=y_0=0$. Ako se uvedu cilindrične koordinate dobija se

$$M=4\int_0^{\pi/2} d\varphi\int_0^{\sqrt{3}} r\,dr\int_0^{3-r^2} dz=\frac{9\pi}{2}.$$

Otuda je $z_0=\dfrac{\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\sqrt{3}} r\,dr\int_0^{3-r^2} z\,dz}{\frac{9\pi}{3}}=1.$ **1245.** $x_0=y_0=\frac{2a}{5};\quad z_0=\frac{7a^2}{30}$.

1246. Jednačina sfere i ravni koje određuju segment glase respektivno $x^2+y^2+z^2=R^2$ i $z=R-h$, dok je gustina $\varrho=k(z-R+h$. Nije teško zaključiti da je $x_0=y_0=0$. Da bismo odredili aplikatu težišta, izračunaćemo statički momenat I_{xy} i masu M segmenta.

Tako imamo da je $I_{xy}=\iiint_V \varrho z\,dx\,dy\,dz=k\iiint_V (z-a)\,z\,dx\,dy\,dz$, gde je $a=R-h$.

Dalje će biti $I_{xy}=\iint_{r\leqslant d}\left[\frac{1}{3}(R^2-r^2)^{3/2}+\frac{a^3}{6}-\frac{a}{2}(R^2-r^2)\right] r\,dr\,d\varphi$, gde je $d^2=R^2-a^2$.

Konačno je $I_{xy}=\frac{k\pi h^3}{60}(20R^2-15Rh+3h^2)$. Masa segmenta je

$$M=k\iiint_V (z-a)\,dx\,dy\,dz=\frac{k}{2}\iint_D (z-a)^2\int_a^{z_1} dx\,dy=$$

$$=\frac{k}{2}\iint_{x^2+y^2\leqslant d^2}(\sqrt{R^2-x^2-y^2}-a)^2\,dx\,dy=\frac{k}{2}\iint_{r\leqslant d}(\sqrt{R^2-r^2}-a^2)\,r\,dr\,d\varphi=$$

$$=\frac{k}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^d [R^2-r^2-2a(R^2-r^2)^{1/2}+a^2]\,r\,dr\,d\varphi=\frac{k\pi h^3(4R-h)}{12}.$$

Prema tome biće $z_0=\frac{I_{xy}}{m}=\frac{20R^2-15Rh+3h^2}{5(4R-h)}$. Za specijalan slučaj $h=12$ imamo

$$I_{xy}=\frac{2k\pi R^5}{15};\quad m=\frac{k\pi R^4}{4};\quad z_0=\frac{8}{15}R.$$

1247. $(0,0,c)$. **1248.** $\left(\frac{3}{8}a;\ \frac{3}{8}b;\ \frac{3}{8}c\right)$. **1249.** $\left(0,0,\frac{2}{5}R\right)$.

1250. $\left(\frac{12a}{5(3\pi-4)},0,0\right)$. **1251.** $\left(0,0,\frac{9}{20}Q\right)$. **1252.** $\left(0,0,\frac{3(2+\sqrt{2})}{16}c\right)$.

1253. $\left(\frac{3}{28}a;\ \frac{3}{28}b;\ \frac{3}{28}c\right)$. **1254.** Apscisa težišta homogenog cilindra jednaka je nuli pošto je on simetričan u odnosu na ravan yOz. Ordinatu i aplikatu težišta nalazimo korišćenjem odgovarajućih formula. Tako imamo da je

$$I_{xz}=\iiint_V y\,dx\,dy\,dz=\iint_D y\,dx\,dy\int_0^{\frac{H}{2}\left(1-\frac{R}{y}\right)} dz=\iint_{a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant R^2} y\left(1-\frac{y}{R}\right)dx\,dy=$$

$$=\frac{H}{2}\iint_{a\leqslant r\leqslant R} r\sin\varphi\left(1-\frac{r\sin\varphi}{R}\right) r\,dr\,d\varphi=\frac{H}{2}\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_a^R\left(r^2-\frac{r^3\sin\varphi}{R}\right)dr=$$

$$=\frac{\pi H(a^4-R^4)}{8R}.$$

$$I_{xy}=\iiint_V z\,dx\,dy\,dz=\iint_D dx\,dy\int_0^{\frac{H}{2}\left(1-\frac{R}{y}\right)} z\,dz=\frac{H^2}{8}\iint_{a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant R^2}\left(1-\frac{y}{R}\right)^2 dx\,dy=$$

$$=\frac{H^2}{8}\iint_{a\leqslant r\leqslant r}\left(1-\frac{r\sin\varphi}{R}\right) r\,dr\,d\varphi=\frac{H^2}{8}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_a^R\left(r-\frac{2r^2\sin\varphi}{R}+\frac{r^3\sin^2\varphi}{R^2}\right)dr=$$

$$=\frac{\pi H^2(R^2-a^2)(3R^2-a^2)}{32R^2}.$$

Masa M usečenog cilindra, uz pretpostavku $\varrho=1$, brojno je jednaka zamremini V toga cilindra. Otuda tu masu možemo naći i elementarno: $m=V=\frac{\pi H(R^2-r^2)}{2}$.

Na taj način biće

$$y_0=\frac{I_{xz}}{m}=-\frac{R^2+r^2}{4R};\quad z_0=\frac{I_{xy}}{m}=\frac{H(3R^2-r^2)}{16R^2}.$$

Moment inercije datog cilindra, u odnosu na njegovu osu biće

$$I_z=\iiint_V \varrho(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz=\varrho\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy\int_0^{\frac{H}{2}\left(1-\frac{R}{y}\right)} dz=$$

$$=\frac{\varrho H}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_a^R\left(r^3-\frac{r^4\sin\varphi}{R}\right)dr=\frac{\pi\varrho H(R^4-a^4)}{4}.$$

1255. $14k$. **1256.** $\frac{2(2-\sqrt{2})}{5}\pi\varrho R^5$. **1257.** $\frac{k\pi h r^4}{2};\ \frac{m(a^2+h^2)}{3}$.

1258. $\frac{\pi a^4 h}{10}$. **1259.** $\frac{\pi a^5}{\sqrt{2}}$. **1260.** $\frac{4\pi}{715}abc(a^2+b^2)$. **1261.** $\frac{\pi^2 a r^2}{2}(4a^2+3r^2)$.

1262. $\dfrac{\pi ab\,h}{20}(b^2+4h^2)$. 1263. $F=\displaystyle\int_{-a/2}^{a/2}dx\int_{-a/2}^{a/2}dy\int_0^a\frac{z-a-b}{|x^2+y^2+(z-a-b)^2|^{\frac{3}{2}}}\,dz$.

1264. $2\pi\left(R+h-\sqrt{h^2+R^2}\right)$ 1265. 2π.

1267. $u=2\pi\varrho_0\left(R^2-\dfrac{r^2}{3}\right)$ ako je $r<R$; $u=\dfrac{4\pi R^3\varrho_0}{3r}$ ako je $r>R$, gde je $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

1268. $u=\pi\displaystyle\int_{R_1}^{R_2}f(\varrho)\min\left(\frac{\varphi^2}{r},\varrho\right)d\varrho$ gde je $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

1269. $u=\pi\varrho_0\Big\{(h-z)\sqrt{a^2+(h-z)^2}+z\sqrt{a^2+z^2}-[(h-z)\,|h-z|+z\,|z|]+$

$$+a^2\ln\left|\frac{h-z+\sqrt{a^2+(h-z)^2}}{z-\sqrt{a^2+z^2}}\right|\Big\}.$$

1270. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 1271. $\dfrac{\pi a^3}{2}$. 1272. $\dfrac{26}{3}$. 1273. $4\pi a\sqrt{a}$.

1274. $\dfrac{\pi^2}{16}-\dfrac{1}{2}\ln 2+\dfrac{3\pi}{4}$. 1275. $\ln\dfrac{7+3\sqrt{5}}{3}$. 1276. 24. 1277. $1+\sqrt{2}$.

1278. Prvi način. Ako se uvedu polarne koordinate $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi\Rightarrow ds=$ $=\sqrt{a^2\sin^2\varphi+a^2\cos^2\varphi}\,d\varphi=a\,d\varphi$ jer je u polarnim koordinatama $ds=\sqrt{r'^2+r^2}\,d\varphi$.

Tako se dobija

$$\int_c\sqrt{x^2+y^2}\,ds=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}r\,a\,d\varphi=a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi=a^2\sin\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=2a^2.$$

Drugi način. Prelaskom na parametarski oblik $x=\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{2}\cos t$, $y=\dfrac{a}{2}\sin t\Rightarrow dx=$

$$=-\frac{a}{2}\sin t\,dt,\ dy=\frac{a}{2}\cos t\,dt \text{ i } ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}(\sin^2 t+\cos^2 t}\,dt=\frac{a}{2}\,dt.$$

Tako se dobija $\displaystyle\int_c\sqrt{x^2+y^2}\,ds=$

$$=\frac{a}{2}\int_0^{2\pi}\frac{a}{2}\sqrt{(1+\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt=\frac{a^2}{4}\int_0^{2\pi}\sqrt{2+2\cos t}\,dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt=\frac{a^2}{2}\left(\int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}\,dt-\int_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{t}{2}\,dt\right)=$$

$$=a^2\left[\left(\sin\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{\pi}-\left(\sin\frac{t}{2}\right)\Big|_{\pi}^{2\pi}\right]=a^2(1+1)=2a^2.$$

1279. $\dfrac{19}{3}$. 1280. $\dfrac{256}{15}a^3$. 1281. $2\pi^2a^3(1+2\pi^2)$.

1282. $\dfrac{2ka^2\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}$ 1283. $\dfrac{16\sqrt{2}}{143}$. 1284. $\dfrac{2\pi}{3}(3a^2+4\pi^2b^2)\sqrt{a^2+b^2}$.

1285. Iz jednačine ravni je $z=-(x+y)$ pa zamenom u jednačini sfere dobija se jednačina

$$y^2+xy+x^2-\frac{a^2}{2}=0,\Rightarrow y=\frac{-x\pm\sqrt{2a^2-3x^2}}{2}.$$

Prema tome granice promenljive x određene su nejednakošću

$$-a\sqrt{\frac{2}{3}}<x<a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Da bismo našli element luka ds smatraćemo u sistemu jednačina

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

$$x+y+z=0.$$

kao promenljivu x a y i z kao funkcije od x. Diferencirajući gornji sistem dobija se

$$x+y\dot{y}+z\dot{z}=0,$$

$$1+\dot{y}+\dot{z}=0$$

odakle se dobija rešavajući ovaj sistem po $\dot{y}$ i $\dot{z}$ i uzimajući $\dot{x}=1$ da je

$$\dot{y}=\frac{z-x}{y-z},\quad \dot{z}=\frac{x-y}{y-z}.$$

Tako se dobija da je

$$\dot{z}+\dot{y}+\dot{z}=1+\frac{(z-x)^2+(x-y)^2}{(y-z)^2}=\frac{2(x^2+y^2+z^2)-2(xy+xz+yz)}{(y-z)^2}=\frac{2a^2+a^2}{(y-z)^2}$$

pošto je $xy+xz+yz=-\dfrac{a^2}{2}$, što je lako proveriti kvadriranjem prve od jednačina sistema i zatim oduzimanjem od druge.

Dalje, ako se date jednačine napišu u obliku

$$y^2+z^2=a^2-x^2 \text{ i } y+z=-x$$

pa se prva pomnoži sa dva a druga kvadrira i oduzme od prve dobija se

$$(y-z)^2=2a^2-3x^2,$$

pa je otuda

$$\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}=\frac{3a^2}{2a^2-3x^2}$$

odnosno

$$ds=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2a^2-3x^2}}\,dx.$$

Tako se definitivno dobija da je

$$\int_c x^2\,ds = 4\int_0^{a\sqrt{\frac{2}{3}}} x^2 \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2a^2-3x^2}}\,dx = 4a\sqrt{3}\int_c^{a\sqrt{\frac{2}{3}}} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2a^2-3x^2}}.$$

Smenom $x\sqrt{3}=a\sqrt{2}\sin t$ biće

$$\int_c x^2\,ds = \frac{2}{3}a^3\pi.$$

Zadatak se može rešiti i transformacijom koordinatnog sistema tako da dati krug padne u ravan $w=0$, pri čemu je novi sistem koordinate napr. tri u, v i w.

1286. $\oint_{c_1} = 0;\quad \oint_{c_1} = 4\left[\frac{a^2}{2}\sqrt{2}+\frac{a^2}{2}(a+a\sqrt{2})-\frac{a^2}{2}\ln a\right].$

Radi dokazivanja ortogonalnosti treba oduzeti date jednačine jednu od druge. Pri izračunavanju integrala koristiti parametarski oblik krivih stavljajući $z=t$.

1287. 5. **1288.** $\sqrt{3}$. **1289.** $\frac{4}{3}$. **1290.** 1.

1291. $\frac{3}{2}a^4\pi$. **1292.** $\frac{4}{3}+\ln 5-4\,\mathrm{arc\,tg}\,2$. **1293.** 0.

1294. $\frac{\pi}{2}$. **1295.** 4. **1296.** $\frac{3}{2}$.

1297. 1° $-\frac{2}{3}$. 2° $-\frac{4}{3}$. **1298.** $\frac{4}{5}$. **1299.** 0.

1300. 1084. **1301.** 24π. **1302.** $\frac{3}{2}a^2$.

1303. $\int_c = 3a^{4/3}\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{3}{16}\pi a^{4/3}.$

1304. $-\frac{87}{4}$. **1305.** $a^2\pi$. **1306.** $-(bc+ac+ab)$. **1307.** R^3.

1308. 1° Koordinate tačke M su $(0, -1, 3)$ a koordinate tačke P su $(1, -3, 5)$. 2° Krivolinijski integral uzet duž odsečka MP ima vrednost $\frac{74}{3}$.

1309. Ako se pređe na sferne koordinate $x=r\cos\varphi\cos\theta$, $y=r\sin\varphi\cos\theta$, $z=r\sin\theta$ pri čemu se ugao θ računa od ravni $z=0$, dobija se obzirom na jednačinu krive $r=a$ i

$r^2(\cos^2\varphi\cos^2\theta+\sin^2\varphi\sin^2\theta=ar\cos\varphi\cos\theta \Rightarrow r^2\cos^2\theta=ar\cos\varphi\cos\theta\Rightarrow r\cos\theta=a\cos\varphi$

ili $\cos\theta=\cos\varphi$ pošto je $r=a$. Otuda je u ovom slučaju

$$x=a\cos^2\theta,\ y=\pm a\sin\theta\cos\theta,\ z=a\sin\theta.$$

Prema tome sada možemo pisati

$$\oint_c = \int_0^{\pi/2}[a^2\sin^2\theta\cos^2\theta(-2a\cos\theta\sin\theta)+a^2\sin^2\theta(a\cos^2\theta-a\sin^2\theta+$$

$$+a^2\cos^4\theta\cdot a\cos\theta]\,d\theta+\int_{\pi/2}^{0}[a^2\sin^2\theta\cos^2\theta(-2a\cos\theta\sin\theta)+a^2\sin^2\theta(a\sin^2\theta-$$

$$-a\cos^2\theta)+a^2\cos^4\theta\cdot a\cos\theta]\,d\theta=2a^3\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta=$$

$$=a^3\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2\theta)\cos 2\theta\,d\theta=-\frac{a^3\pi}{4}.$$

1310. Prelazeći na parametarski oblik $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, $z=r\cos^2 t$ dobija se da je

$$\oint_c = \int_0^{2\pi}(-r^2\sin^2 t+r^2\cos^3 t-2r^2\cos^2 t\sin t)\,dt=-r^2\pi.$$

1311. Prelazeći na parametarski oblik $x=a(1+\cos t)$, $y=a\sin t$, $z=\sqrt{2a(R-a)}\cdot\sqrt{1+\cos t}$, za $0<t<2\pi$ odakle je

$$dz=\frac{1}{2}\sqrt{2a(R-a)}\frac{-\sin t}{\sqrt{1+\cos t}}dt$$

dobija se da je

$$\oint_c = 2a^2R\pi.$$

1312. $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=h(1-\cos t)$, $dx=-a\sin t\,dt$, $dy=a\cos t\,dt$, $dz=h\sin t\,dt$

$$(0<t<2\pi)$$

$$\oint_c = -2a(a+h)\pi$$

1313. $2\pi\sqrt{3}$. **1314.** $u(x,y)=\frac{x^2}{2}+xe^y-y^2+c$.

1315. $u=\int_0^x\frac{x+ay}{x^2+y^2}dx+\int_1^y\frac{dy}{y}+c=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+a\,\mathrm{arc\,tg}\frac{x}{y}+c.$

1316. $u(x,y)=x^2\cos y+y^2\cos x+c$. **1317.** $u(x,y)=\frac{e^y-1}{1+x^2}+y+c$.

1318. $u(x,y)=e^{x^2}y+e^{xy^2}+x-y^2+c$. **1319.** $z=\frac{\partial^{n+m}u}{\partial x^n\partial y^m}+c$.

1320. $\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n\partial y^m}\left(\mathrm{arc\,tg}\frac{x}{y}\right)+c$. **1321.** $a=b=-1$, $u=\frac{x-y}{x^2+y^2}+c$.

1322. $u=\int_0^x (x^2-2yz)\,dx+\int_0^y (y^2-2\cdot 0\cdot z)\,dy+\int_0^z (z-2\cdot 0\cdot 0)\,dz,\ \Rightarrow u=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz+c.$

1323. $u=x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z}+c.$ 1324. $u(x,y,z)=x\ln y+x^2yz-z^2+c.$

1325. $u=\frac{x-3y}{z}+\frac{z^2}{2}+c.$ 1326. $u=e^{y/z}(x+1)+e^{yz}-e^{-z}.$

1327. 1° a) Jednačina prave kroz tačke $A(1,1)$ i $B(2,2)$ je $y=x$. Otuda je $dy=dx$

$$I_1=\int\limits_{\overline{AB}}\frac{(ax-y)(a+1)\,dx+(x+ay)(a-1)\,dy}{xy}=$$

$$=\int_1^2\frac{(ax-x)(a+1)+(x+ax)(a-1)}{x^2}\,dx=2(a^2-1)\ln 2$$

$$I_1=2(a^2-1)\ln 2.$$

b) $$I_2=\int\limits_{\overline{ACB}}\frac{(ax-y)(a+1)\,dx+(x+ay)(a-1)\,dy}{xy}=$$

$$=\int\limits_{\overline{AC}}\frac{(ax-y)(a+1)\,dx+(x+ay)(a-1)\,dy}{xy}+$$

$$+\int\limits_{\overline{CB}}\frac{(ax-y)(a+1)\,dx+(x+ay)(a-1)\,dy}{xy}=I_2'+I_2''$$

Međutim po pravoj AC, $x=1$, $dx=0$; po pravoj CB, $y=2$, $dy=0$ pa je

$$I_2'=\int_1^2\frac{(1+ay)(a-1)\,dy}{y}=(a-1)\int_1^2\frac{1+ay}{y}\,dy=(a-1)[\ln 2+a]$$

$$I_2''=\int_1^2\frac{(ax-1)(a+1)}{2x}\,dx=\frac{(a+1)}{2}[a-2\ln 2]$$

$$I_2=I_2'+I_2''=\frac{3a^2-a-4\ln 2}{2}$$

$$I_2=\frac{3a^2-a-4\ln 2}{2}$$

2° $$I_1=I_2\Rightarrow 2(a^2-1)\ln 2=\frac{3a^2-a-4\ln 2}{2}$$

$$\Rightarrow a=0\ \vee\ a=\frac{1}{3-4\ln 2}$$

3° $$P=\frac{(ax-y)(a+1)}{xy},\quad Q=\frac{(x+ay)(a-1)}{xy}.$$

Vrednost integrala u prvom kvadrantu zavisiće samo od početne i krajnje tačke ako je

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{a(a+1)}{y^2};\quad \frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{(-a)(a-1)}{x^2}$$

$$-\frac{a(a+1)}{y^2}=-\frac{a(a-1)}{x^2}\Rightarrow a=0.$$

Dakle vrednost integrala neće zavisiti od puta integracije ako je $a=0$.

1328. 1. 1329. 1. 1330. -2. 1331. $\frac{\pi}{2}$.

1332. $e^a\cos b-1$. 1333. $\int_0^{a+b}\varphi(u)\,du.$

1334. $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx+\int_{y_1}^{y_2}\varphi(y)\,dy$ 1335. $b-a$.

1339. $\frac{10}{3}$. 1340. 0. 1341. $-\frac{9}{2}$. 1342. $(b-a)$.

1344. $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$. 1345. $\iint\limits_D (y-x)e^{xy}\,dx\,dy$. 1346. $\iint\limits_D \frac{y}{1+x^2}\,dx.$

1347. $\oint\limits_c=2\int_1^2 dx\int_x^{4-x}(x-y)\,dy=-4\int_1^2 (x-2)^2\,dx=-\frac{4}{3}(x-2)^3\Big|_1^2=-\frac{4}{3}.$

1348. $\frac{\pi a^4}{2}$. 1349. $-2\pi ab$. 1350. 1° 0; 2° $-\frac{\pi a^3}{8}$. 1351. 0.

1352. 1° 0, ako je koordinatni početak van konture integracije; 2° 2π ako kontura c obuhvata koordinatni početak.

1353. $\frac{\pi ma^2}{8}$. Dopuniti putanju integracije $\widehat{AO}$ pravolinijskim odsečkom OA.

1354. $aP+e^{x_2}f(y_2)-e^{x_1}f(y_1)-a(y_2-y_1)-\frac{a}{2}(x_2-x_1)(y_2+y_1).$

1358. Izvršiti rotaciju koordinatnog sistema tako da x osa u novom koordinatnom sistemu bude paralelna pravcu $\vec{l}$.

1359. $u=2\pi$, ako je tačka $A(x,y)$ unutar konture c; $u=\pi$, ako je tačka $A(x,y)$ na konturi c; $u=0$, ako je tačka $A(x,y)$ van konture c.

1363. Izdvojiti tačku (x,y) iz oblasti D zajedno sa beskonačno malom kružnom okolinom te tačke i primeniti drugu Greenovu formulu na ostatak oblasti D.

1366. Kako je

$$dx=-a\sin t\,dt,\ dy=b\sin t\,dt \Rightarrow P=\frac{1}{2}\oint_c \begin{vmatrix} x & y \\ dx & dy \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\oint_c \begin{vmatrix} a\cos t & b\sin t \\ -a\sin t\,dt & b\cos t\,dt \end{vmatrix} =$$

$$=\frac{1}{2}\oint_c ab\,dt=\frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} dt=\pi ab.$$

1367. Kako je

$$\begin{vmatrix} x & y \\ dx & dy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a(t-\sin t) & a(1-\cos t) \\ a(1-\cos t)\,dt & a\sin t\,dt \end{vmatrix} = a^2(t\sin t+2\cos t-2)\,dt \text{ to je}$$

$$P=\frac{1}{2}\oint_c a^2(t\sin t+2\cos t-2)\,dt=\frac{a^2}{2}\int_{2\pi}^{0}(t\sin t+2\cos t-2)\,dt=3\pi a^2.$$

Integral dnž x ose jednak je nuli.

1368. $\begin{vmatrix} x & y \\ dx & dy \end{vmatrix} = 3a^2\sin^2 t\cos^2 t\,dt \Rightarrow P=\frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=$

$$=\frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)^2 dt=\frac{3}{8}\pi a^2.$$

1369. Podintegralni izraz po luku epicikloide je $x dy - y dx = a^2 m(1+m)(1+2m)(1-\cos t)\,dt$ a odgovarajućeg kruga $x=a\cos mt$, $y=a\sin mt$ je $x\,dy-y\,dx=a^2 mt$. Nakon integracije konačno se dobija $P=\pi a^2 m^2(2m+3)$.

1370. $2a^2$. Staviti $y=x\operatorname{tg} t$; $x=a\sqrt{2}\cos t\sqrt{\cos 2t}$, $y=a\sqrt{2}\sin t\sqrt{\cos 2t}$.

1371. $\frac{3}{2}a^2$. Staviti $y=tx$; $x=\frac{3at}{1+t^3}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$.

1372. $6\pi a^2$. 1373. $\frac{a^2}{6}$. 1374. $6\pi a^2$. 1375. $\frac{1}{210}$.

1376. $\frac{8}{3}\pi$. 1377. $\frac{1}{3}+\frac{4\pi}{9\sqrt{3}}$. 1378. $\frac{1}{30}$. 1379. $\frac{a^2}{2}B(2\beta+1,\ 2\alpha+1)$.

1380. $\dfrac{ab}{2\alpha}\dfrac{\Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{2}{\alpha}\right)}$. Staviti $\frac{x}{a}=\cos^{\frac{2}{\alpha}}\varphi$ i $\frac{y}{b}=\sin^{\frac{2}{\alpha}}\varphi$.

1381. 8. 1382. $3\pi R^2$ 1383. $6\left(3+\frac{5}{4}\ln 5\right)$.

1384. $P=\int_0^{8/9p} y\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^{8/9p} y\sqrt{1+\frac{p^2}{y^2}}\,dx=\int_0^{8/9p}\sqrt{2px+p^2}\,dx=\frac{98}{81}p^2.$

1385. $P=\int_c z\,ds=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2-a^2\cos^2\varphi}\,d\varphi=4a^2\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\,d\varphi=4a^2.$

1386. $P=4\int_c z\,ds=\frac{2}{R}\int_c xy\sqrt{dx^2+dy^2}=R^2\int_0^{\pi/2}\sin 2t\,dt=R^2.$

1387. $P=\int_c (x^{4/3}+y^{4/3})\,ds=4a^{7/3}$. Staviti $x=a\sin^3 t$, $y=a\cos^3 t$.

1388. 1° $P=2(4+\pi)$; 2° 0.

1389. Na osnovu odgovarajuće formule biće

$$m=\int_0^2 x^2\sqrt{1+4x^2}\,dx=\frac{17\sqrt{2}}{32}-\frac{1}{64}\ln(2\sqrt{2}+3).$$

1390. $\frac{2k}{9}(126-10\sqrt{5})$. 1391. $\frac{19}{3}$. 1392. k —(koeficijent proporcionalnosti)

1393. $2b\left(b+a\right)\frac{\arcsin\delta}{\delta}$ gde je $\delta=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a}}$. 1394. $\frac{a}{8}\left[(3\sqrt{3}-1)+\frac{3}{2}\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right]$

1395. Očigledno je $x_0=0$. Ordinata težišta dobija se po formuli $y_0=\dfrac{\int_c y\,ds}{\int_c ds}$ Kako je $\int_c ds=\pi R$, to je prelazeći na parametarski oblik

$$I_0=\frac{1}{\pi R}\int_0^{\pi} R\sin t\,R\,dt=\frac{2R}{\pi}.$$

Na osnovu odgovarajuće formule biće dalje

$$I_x=\int_c y^2\,ds=\int_0^{\pi} R^3\sin^2 t\,dt=\frac{\pi R^3}{2}.$$

1396. Usled simetrije očigledno je $x_0=\pi a$. Dalje je

$$y_0=\frac{1}{8a}\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\,2a\sin\frac{t}{2}\,dt=\frac{a}{4}\int_0^{2\pi} 2\sin^2\frac{t}{2}\sin dt=\frac{4}{3}a.$$

Dužina luka jednog svoda cikloide je $8a$.

1397. Na simetrali ugla na rastojanju $\frac{a\sin\varphi}{\varphi}$ od centra. 1398. $\frac{4}{3}a$.

1399. $y = a\,ch\,\frac{x}{a}$ između tačaka $A(0, a)$ i $B(b, h)$. 1400. $x_0 = y_0 = \frac{4}{3}a$.

1401. $\left(\frac{a\sin m}{m},\ a\frac{1-\cos m}{m},\ \frac{hm}{2}\right)$. 1402. $\left(\frac{2}{5},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{2}\right)$.

1403. $I_x = I_y = \left(\frac{a^2}{2}+\frac{h^2}{3}\right)\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}$; $I_z = a^2\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}$.

1404. $mg(c_1-c_2)$ 1405. $8a^2$. 1406. $Y = \frac{kmM}{a^2\sqrt{2}}$.

1407. Komponentne sile su $X=0$, $Y = \frac{2kmM}{\pi a^2}$.

1408. $A = k\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$ gde je $r_i = \sqrt{x_i^2+y_i^2+z_i^2}$; $i=1, 2, \ldots$

1409. 0. 1411. 1° $\frac{4}{3}$; 2° $\frac{17}{12}$; 3° $\frac{3}{2}$ i 1. 1412. $\frac{2\,Im}{d}$. 1413. $\frac{8\,mI\sqrt{2}}{a}$.

1415. $\frac{2\pi maI}{b^2}$ gde su a i b poluose elipse.

1416. $\frac{2\pi mI}{p}$. 1417. $\frac{2\pi mIR^2}{(h^2+R^2)^{3/2}}$. Za $k = h\sqrt{2}$.

1418. $u = 2\pi\mu R\ln\frac{1}{R}$, ako je $r=\sqrt{x^2+y^2}<R$; $u = 2\pi\mu R\ln\frac{1}{r}$, ako je $r>R$.

1419. $I_1 = \frac{\pi}{n}r^n\cos n\varphi$, $I_2 = \frac{\pi}{n}r^m\sin n\varphi$, ako je $0<r<1$;

$$I_1 = \frac{\pi}{n}\varrho^{-n}\cos n\varphi,\quad I_2 = \frac{\pi}{n}r^{-n}\sin\varphi,\ \text{ako je } r>1.$$

1420. Iz $z = \frac{1}{3}(6-x-2y) \Rightarrow dS = \frac{\sqrt{14}}{3}\,dx\,dy$. Otuda se dobija da je

$$\iint_S (6x+4y+3z)\,dS = \frac{\sqrt{14}}{3}\int_0^3 dy\int_0^{6-2y}(5x+2y+6)\,dx = 2\sqrt{14}\int_0^3 (y^2-$$
$$-10y+21)\,dy = 54\sqrt{14}.$$

1421. $\sqrt{3}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)$. 1422. Iz $x^2+y^2+z^2=a^2 \Rightarrow p = -\frac{x}{z}$ i $q = -\frac{y}{z}$.

Tako se dobija da je $\iint_S (x^2+y^2)\,dS = 2\iint_D (x^2+y^2)\frac{\sqrt{z^2+x^2+y^2}}{|z|}\,dx\,dy =$

$$= 2a\iint_D \frac{x^2+y^2}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}\,dx\,dy = 2a\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}\,r\,dr = \frac{8}{3}\pi a^4.$$

1423. Iz $x^2+y^2=R^2 \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial z}=0$, $\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{y}{x}$ i

$$dS = \sqrt{1+\frac{y^2}{R^2-y^2}}\,dx\,dy,\ \text{odnosno}\ dS = R\frac{dz\,dy}{\sqrt{R^2-y^2}}.$$

Tako se dobija da je

$$\iint_S \frac{dS}{x^2+y^2+z^2} = \iint_D \frac{1}{R^2+z^2}\cdot\frac{R\,dy\,dz}{\sqrt{R^2-y^2}} = R\int_0^R \frac{dy}{\sqrt{R^2-y^2}}\int_0^m \frac{dz}{R^2+z^2} = \frac{\pi}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{m}{R}.$$

1424. $\iint_S = \iint_{S_1} + \iint_{S_2}$ gde je $\iint_{S_1} = a\iint_D \frac{z\,dx\,dz}{\sqrt{a^2-x^2}}$,

$$\text{i}\ \iint_{S_2} = a\iint_D\left(2+\frac{z}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)dx\,dz\ \text{pošto je}\ dS = a\frac{dx\,dz}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Tako se dalje dobija

$$\iint_S = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} = 2a\int_0^h dz\int_{-a}^a\left(1+\frac{z}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)dx =$$
$$= 2a\int_0^h (2a+\pi z)\,dz = ah(4a+\pi h).$$

1425. $\iint_S = \iint_D \frac{\sqrt{1+y^2}}{2+z^2}\,dy\,dz = \int_{-2}^2 \sqrt{1+y^2}\,dy\int_0^1 \frac{dz}{z^2+2} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[y\sqrt{1+y^2}+\ln(y+\sqrt{1+y^2})\right]\Bigg|_{-2}^{2} =$$
$$= \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\ln\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}.$$

1426. $\frac{243}{2}\pi$. 1427. $\frac{4a^4\pi}{3}$.

1428. Kako je $dS = \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}$ to je $\iint_S \frac{dS}{(1+z)^2} =$

$$= \iint_D \frac{1}{(1+\sqrt{1-x^2-y^2})^2}\cdot\frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 \frac{1}{(1+\sqrt{1-r^2})^2}\cdot\frac{r\,dr}{\sqrt{1-r^2}}.$$

Ako se stavi $1-r^2=t^2$ dobija se konačno

$$\iint_S = 2\pi \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^2} = 2\pi\left(-\frac{1}{2}+1\right) = \pi.$$

1429. $$\iint_S \frac{dS}{\sqrt{1+z}} = \iint_D \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{a^2-x^2-y^2}}}\cdot\frac{a\,dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} =$$

$$= a\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{a^2-r^2}}}\cdot\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}.$$

Ako se stavi

$$a^2-r^2=t^2 \Rightarrow \iint_S = 2a\pi \int_0^a \frac{dt}{\sqrt{1+t}} =$$

$$= 2a\pi \int_1^{\sqrt{1+a}} du = 4a\pi(\sqrt{1+a}-1).$$

1430. πR^3. 1431. $\frac{2\pi R^6}{15}$. 1432. $2\pi \operatorname{arc tg} \frac{H}{R}$.

1433. $\pi[R\sqrt{R^2+1}+\ln(R+\sqrt{R^2+1})]$.

1434. $\frac{4\pi}{3}abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$.

1435. Znajući da je jednačina tangentne ravni elipsoida $\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}=1$ nije teško pokazati da se traženi integral svodi na integral

$$I=c\iint_D \left[\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{1}{c^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\right]^2 \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} =$$

$$= c\iint_D (nx^2+my^2+p)^2 \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}},$$

gde je $n=\frac{1}{a^4}-\frac{1}{a^2c^2}$, $m=\frac{1}{b^4}-\frac{1}{c^2b^2}$ i $p=\frac{1}{c^2}$.

Nakon prelaska na generalisane polarne koordinate $x=ra\cos\varphi$, $y=rb\sin\varphi$ biće $I=I_1+I_2+I_3$ gde je:

$$I_1=c\,ab\iint_D [n^2a^4\cos^4\varphi+m^2b^4\sin^4\varphi+2nma^2b^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi]\,\frac{r^5}{\sqrt{1-r^2}}.$$

No kako je $\int_0^{2\pi}\cos^4\varphi\,d\varphi=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\varphi)^2\,d\varphi=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(1+2\cos^2 2\varphi+\cos^2 2\varphi)d\varphi=$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left[1+2\cos 2\varphi+\frac{1}{2}(1+\cos 4\varphi)\right]d\varphi=\frac{1}{4}\left[\varphi+\sin 2\varphi+\frac{1}{2}\left(\varphi+\frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\right]\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{1}{4}\left[2\pi+\frac{1}{2}(2\pi)\right]=\frac{3\pi}{4};\quad \int_0^{2\pi}\sin 4\varphi\,d\varphi=\frac{3\pi}{4};\quad \int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}(\sin^2\varphi-\sin^4\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2\varphi)d\varphi-\frac{3\pi}{4}=\frac{1}{2}\left(\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}-\frac{3\pi}{4}=$$

$$=\pi-\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{4};\quad \int_0^1\frac{r^5}{\sqrt{1-r^2}}dr=\frac{8}{15};\ \text{to je}$$

$$I_1=c\,ab\left(\frac{3\pi}{4}n^2a^4+\frac{3\pi}{4}m^2b^4+\frac{nma^2b^2}{2}\pi\right)\frac{8}{15}=\frac{4c\,ab\,\pi}{15}\left[\frac{3}{2}a^4\left(\frac{1}{a^4}-\frac{1}{a^2c^2}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{b^4}-\frac{1}{b^2c^2}\right)^2+a^2b^2\left(\frac{1}{a^4}-\frac{1}{a^2c^2}\right)\left(\frac{1}{b^4}-\frac{1}{c^2b^2}\right)\right]\ \text{ili}$$

$$I_1=\frac{4c\,ab\,\pi}{15}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)^2+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)^2+\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\right].$$

$$I_2=2\,pcab\iint_D(nx^2+my^2)\frac{dx\,dy}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}=2pc\int_0^{2\pi}(na^2\cos^2\varphi+$$

$$+mb^2\sin^2\varphi)\int_0^1\frac{r^3\,dr}{\sqrt{1-r^2}}=2pc\pi ab\left[a^2\left(\frac{1}{a^4}-\frac{1}{a^2c^2}\right)+b^2\left(\frac{1}{b^4}-\frac{1}{b^2c^2}\right)\right]\frac{2}{3}=$$

$$=\frac{4}{3}\frac{\pi}{c}ab\left[\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)+\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\right]\ \text{ili}\ I_2=\frac{4}{3}\frac{\pi ab}{c}\left[\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)+\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\right]$$

$$I_3=p^2cab\iint_D\frac{r\,dr\,d\varphi}{\sqrt{1-r^2}}=\frac{1}{c^3}ab\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\frac{r\,dr}{\sqrt{1-r^2}}=\frac{2\pi ab}{c^3}\int_0^1\frac{r\,dr}{\sqrt{1-r^2}},\Rightarrow I_3=\frac{2\pi ab}{c^3}.$$

Sabiranjem prethodnih integrala dobija se definitivno u sažetoj formi

$$\iint_S = \frac{4}{15} abc\,\pi \left[3\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}\right)+2\left(\frac{1}{a^2 b^2}+\frac{1}{a^2 c^2}+\frac{1}{b^2 c^2}\right)\right].$$

1436. $\dfrac{2\pi R}{c\,(n-2)}\left[\dfrac{1}{(c-R)^{n-2}}+\dfrac{1}{(c+R)^{n-2}}\right],\ n\neq 2.$

1437. $u=4\pi\varrho_0 \min\left(a, \dfrac{a^2}{d_0}\right)$ gde je $d_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$.

1438. $\dfrac{2\pi}{3}\left[\dfrac{R\,(a^2+b^2+c^2)-d^2}{a^2+b^2+c^2}\right]^{3/2}$

1439. $\dfrac{64}{15}a^4\sqrt{2}$. **1442.** $\dfrac{2\pi(1+6\sqrt{3})}{15}$. **1443.** $\pi^2 R^3$. (Koristiti sferne koordinate)

1444. $\dfrac{8}{3}\pi R^4$. **1445.** $\left(0,\ 0,\ \dfrac{a+h}{2}\right)$. **1446.** $\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{a}{2},\ \dfrac{a}{2}\right)$.

1447. $\dfrac{2a}{3(\pi-2)},\ 0,\ \dfrac{\pi a}{4(\pi-a)}$. **1448.** $\dfrac{1}{2}\pi a^3\sqrt{a^2+h^2}$.

1449. $\dfrac{8}{3}\pi a^4$. **1450.** $\dfrac{4}{15}\pi(1+6\sqrt{3})\,a^4$.

1451. Potrebno je izračunati tri integrala. Tako imamo da je

$$I_1=\iint_S z\,dx\,dy=\iint_D (1+y-x)\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_{x-1}^{0}(1-x+y)\,dy=\frac{1}{6};$$

$$I_2=\iint_S x\,dx\,dz=-\iint_D x\,dx\,dz=-\int_0^1 x\,dx\int_0^{1-x}dz=-\frac{1}{6}$$

jer normala površi zaklapa tup ugao sa ravni xOz;

$$I_3=\iint_S y\,dy\,dz=\iint_D y\,dy\,dz=\int_{-1}^{0} y\,dy\int_0^{1+y}dz=-\frac{1}{6}.$$

Radi toga je konačno

$$\iint = I_1+I_2+I_3=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=-\frac{1}{6}.$$

1452. $\displaystyle\iint_S xyz\,dx\,dy=\iint_{S_1} xyz\,dx\,dy-\iint_{S_2} xyz\,dx\,dy=2\iint_{S_1} xyz\,dx\,dy,$

jer je u osmom oktantu $z<0$. Otuda je dalje

$$\iint_S xyz\,dx\,dy=2\iint_D xy\sqrt{1-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=$$

$$=2\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\,dr=\frac{2}{15}.$$

1453. $\displaystyle\iint_S \sqrt[4]{x^2+y^2}\,dx\,dy=-\iint_D \sqrt[4]{x^2+y^2}\,dx\,dy=$

$$=-\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a \sqrt[4]{r^2}\,r\,dr=-2\pi\left.\frac{r^{5/2}}{\frac{5}{2}}\right|_0^a=-\frac{4}{5}\pi a^{5/2}.$$

1454. $\dfrac{4}{3}\left(\pi-\dfrac{1}{5}\right)$. **1455.** $\left(-\dfrac{1}{6}\right)$. **1456.** $\dfrac{3\pi a^4}{8}$.

1457. Dati integral predstavlja zbir tri integrala. Prvi od njih je

$$\iint_S x\,dy\,dz=2\iint_D \sqrt{a^2-z^2-y^2}\,dy\,dz=2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr=$$

$$=-2\pi\int_0^a (a^2-r^2)^{1/2}\,d(a^2-r^2)=-4\pi\left.(a^2-r^2)^{3/2}\right|_0^a=\frac{4\pi a^3}{3}.$$

Usled simetrije, i ostala dva integrala imaju istu vrednost pa je konačno $\displaystyle\iint_S=4\pi a^3$.

1458. $\dfrac{a^4}{8}$. **1459.** 0. **1460.** $\dfrac{4\pi}{abc}(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$. **1461.** $R^2 h\left(\dfrac{2R}{3}+\dfrac{\pi h}{8}\right)$.

1462. $\displaystyle 2\iint_S (x-y)\,dx\,dy+(y-z)\,dy\,dz+(z-x)\,dx\,dz.$

1463. Prvi način $\displaystyle\oint_c=\int_{c_1}+\int_{c_2}+\int_{c_3}$ gde je

$$\int_{c_1}=-8\int_0^1 2\sqrt{1-x^2}\sqrt{(1-x^2)^3}\,dx+8\int_0^1 2x^2(1-x^2)\,dx=-16\int_0^1[(1-x^2)^2-(x^2-x^4)]\,dx=$$

$$=-16\left.\left(x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right)\right|_0^1=-16\left(1-1+\frac{2}{5}\right)=-\frac{32}{5}.$$

Kako je $\int\limits_{c_2} + \int\limits_{c_3} = 0$ to je konačno $\oint\limits_{c} = -\frac{32}{5}$.

Drugi način. Ako se koristi Stocsesova formula biće

$$\oint\limits_{c} = \iint\limits_{S} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 8y\sqrt{(1-x^2-z^2)^3} & xy^3 & \sin z \end{vmatrix} dS =$$

$$= \iint\limits_{S} -\cos\beta\,(-8y\cdot 3z\sqrt{1-x^2-z^2})\,dS = 24\iint\limits_{D} yz\sqrt{1-x^2-z^2}\,dx\,dz = 48\iint\limits_{D} z(1-x^2-$$

$$-z^2)\,dx\,dz = 48\int\limits_0^{\pi/2} \sin\varphi\,d\varphi \cdot \int\limits_0^1 r^2(1-r^2)\,dr = -48\cos\varphi)\Big|_0^{\pi/2}\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^5}{5}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= -48\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) = -\frac{2\cdot 48}{15} = -\frac{32}{5}.$$

1464. $\left(\frac{ab^2}{6}\right)$.

1465. Prilikom direktnog izračunavanja primetiti da se jednačina

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b} \text{ može napisati u obliku } \frac{2}{a^2}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{2}{b^2}\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=1.$$

Ako se stavi $x=\frac{a}{2}+\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t$, $y=\frac{b}{2}+\frac{b}{\sqrt{2}}\sin t \Rightarrow z=c\left[1+\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t+\cos t)\right]$.

Tako se dobija da je

$$I=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{a^2 b}{4}-\frac{ab}{4}\right)dt=\frac{ab\pi}{2}(a-1).$$

Primenom Stocsesove formule dobija se

$$I=\iint\limits_{D}(2x-1)\,dx\,dy=\frac{ab}{2}(a-1)\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{1/\sqrt{2}}r\,dr=\frac{ab\pi}{2}(a-1).$$

1466. $$\oint = \iint\limits_{(S)} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} dS =$$

$$= \iint\limits_{(S)} [\cos\alpha(-1)-\cos\beta(+1)+\cos\gamma(-1)]\,dS = -\iint\limits_{(S)} (\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\,dS =$$

$$= -\iint\limits_{D}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{3}\,dx\,dy = -3\iint\limits_{D} dx\,dy = -6\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\frac{a}{\sqrt{2+\sin 2\varphi}}} r\,dr =$$

$$= -3\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi\,(r^2)\Big|_0^{\frac{a}{\sqrt{2+\sin 2\varphi}}} = -3\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{a^2}{2\sin 2\varphi}\,d\varphi = 3a^2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{d\varphi}{2+\sin 2\varphi} =$$

$$= -3a^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{du}{1+u^2}}{2+2\frac{u}{1+u^2}} = -\frac{3}{2}a^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{u^2+u+1} =$$

$$= -\frac{3}{2}a^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{\frac{3}{4}t^2+\frac{3}{4}} = -\sqrt{3}a^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= -\sqrt{3}a^2(\operatorname{arc\,tg} t)\Big|_{-\infty}^{\infty} = -\sqrt{3}a^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = -a^2\pi\sqrt{3}.$$

1467. $$\oint (y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz =$$

$$= \iint\limits_{(S)} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} dS = -2\iint\limits_{S}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\,dS =$$

$$= -2\iint\limits_{x^2+y^2\leq a^2}\left(h/\sqrt{a^2+h^2}+a/\sqrt{a^2+h^2}\right)\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}\,dx\,dy =$$

$$= -\frac{2}{a}\iint\limits_{x^2+y^2\leq a^2}(h+a)\,dx\,dy = -2a\pi(a+h).$$

1468. -14. **1469.** $2\pi ab^2$.

1470. $\oint\limits_c (z\cos\beta-y\cos\gamma)\,dx+(x\cos\gamma-z\cos\alpha)\,dy+(y\cos\alpha-x\cos\beta)\,dz=$

$$=\iint\limits_{(S)}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x}\\ z\cos\beta-y\cos\gamma & x\cos\gamma-z\cos\alpha & y\cos\alpha-x\cos\beta\end{vmatrix}dS=$$

$$=2\iint\limits_S(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)\,dS=2\,S.$$

1471. $2\iiint\limits_V(x+y+z)\,dx\,dy\,dz.$

1472. Prvi način. Dati integral razbijamo na tri integrala:

1) $$\oiint y^2z\,dx\,dy=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5$$

gde je

$$I_2=I_3=I_4=I_5=0 \quad\text{a}\quad I_1=\iint\limits_D y^2(x^2+y^2)\,dx\,dy=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\,d\varphi\int\limits_0^1 r^5\,dr=\frac{1}{2}\left(\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/2}\cdot\frac{r^6}{6}\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{\pi}{24};$$

2) $$\oiint xz\,dy\,dz=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5,$$

gde je

$$I_1=-\iint\limits_D\sqrt{z-y^2}\,z\,dy\,dz=-\frac{\pi}{12},\quad I_2=\iint\limits_D z\sqrt{1-y^2}\,dy\,dz=\frac{\pi}{8}\ \text{ i}$$

$$I_3=I_4=I_5=0;\qquad 3)\ \oiint x^2y\,dx\,dz=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5$$

gde je

$$I_1=-\iint\limits_D x^2\sqrt{z-x^2}\,dx\,dz=\frac{\pi}{48},\quad I_2=\iint\limits_D x^2\sqrt{1-x^2}\,dx\,dz=\frac{\pi}{16}\ \text{ i }\ I_3=I_4=I_5=0.$$

Konačno nakon sabiranja dobijenih vrednosti dobija se definitivno $\oiint=\frac{\pi}{8}$.

Drugi način. U našem slučaju je $P=xz$; $Q=x^2y$;

$$R=y^2z\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial x}=z,\ \frac{\partial Q}{\partial y}=x^2\ \text{i}\ \frac{\partial R}{\partial z}=y^2,$$

pa je

$$\oiint\limits_S=\iiint\limits_V(z+x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_D dx\,dy\int\limits_0^{x^2+y^2}(z+x^2+y^2)\,dz=$$

$$=\iint\limits_D dx\,dy\left[\frac{1}{2}z^2+z(x^2+y^2)\right]\Bigg|_0^{x^2+y^2}=\frac{3}{2}\iint\limits_D(x^2+y^2)^2\,dx\,dy=$$

$$=\frac{3}{2}\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^1 r^5\,dr=\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{\pi}{8}.$$

1473. Treba rotirati koordinatni sistem tako da se x osa poklopi sa pravcem $\vec{l}$. Tako se dobija

$$\iint\limits_S\cos(\vec{n},\vec{l})\,dS=\iint\limits_{S_1}\cos\alpha\,dS_1=$$

$$=\iint\limits_{S_1}(\cos\alpha+0\cdot\cos\beta+0\cdot\cos\gamma)\,dS_1=\iiint\limits_V 0\cdot dx\cdot dy\cdot dz=0.$$

1475. $\frac{12}{5}\pi R^5$. **1476.** 0. **1477.** $6a\pi^2b^2$. **1478.** $\left(\frac{3\pi}{32}+\frac{14}{15}\right)$.

1479. $P=-2x^2y$, $Q=-3xz^2$, $R=4xyz$.

Na osnovu formule Ostrogradskog-Grina biće:

$$\iint\limits_{(S)}=\iiint\limits_V(-4xy+0+4xy)\,dx\,dy\,dz=0.$$

što je u skladu sa tvrđenjem u zadatku. Da bismo sada dati površinski integral sveli na krivolinijski koristićemo Stocsesovu formulu

$$\iint\limits_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\,dx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\int\limits_{(c)}P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

Tako imamo sledeće jednačine $\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=-2x^2y$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=4xyz,\quad \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=-3xz^2.$$

Ako se uzme specijalan slučaj $R=0$ onda gornje jednačine imaju oblik

$$\frac{\partial Q}{\partial z}=2x^2y,\quad \frac{\partial P}{\partial z}=-3xz^2,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=4xyz.$$

Iz prve dve od zadnjih jednačina dobijamo posle integracije

$$Q=2x^2yz+\varphi(x,y),\quad P=-xz+\psi(x,y).$$

Ako se iskoristi i treća jednačina biće

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=4xyz+\varphi'_x\quad\text{i}\quad\frac{\partial P}{\partial y}=\psi'_y$$

odnosno

$$4xyz+\varphi'_x-\psi'_y=4xyz,\quad \varphi'_x-\psi'_y=0\Rightarrow\varphi=\psi.$$

Ako se uzme najjednostavniji slučaj $\varphi=\psi=0$ onda krivolinijski integral ima oblik

$$\iint\limits_{(S)}=\int(-xz^2)\,dx+2x^2yz\,dy=\int\limits_{c_1}+\int\limits_{c_2}$$

$$\int_{c_1} = \int_R^{-R}\left(x^4\,dx + 2x^3\sqrt{R^2-x^2}\cdot\frac{x\,dz}{\sqrt{R^2-x^2}}\right) =$$

$$= 3\int_R^{-R} x^4\,dx = \frac{3}{5}x^5\Big|_R^{-R} = -\frac{3}{5}R^5 - \frac{3}{5}R^5 = -\frac{6}{5}R^5$$

$$\int_{c_2} = \int_{-R}^{R}(x^4\,dx + 2x^3\sqrt{R^2-x^2}\cdot\frac{x\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}} = 3\int_{-R}^{R} x^4\,dx = \frac{3}{5}x^5\Big|_{-R}^{R} = \frac{6}{5}x^5, \Rightarrow \int_c = 0$$

što je i jasno jer je podintegralni izraz totalni diferencijal a putanja integracije zatvorena kriva.

1480. Radeći kao i u prethodnom zadatku dobija se:

1° $$2x\varphi + (1+x^2)\varphi' + 2x\varphi - 3 = 0 \Rightarrow \varphi(x) = \frac{x^3+3x}{1+x^2};$$

2° $$I = -3\pi;\ 3° \iint_S = \int_c \frac{2x^2yz(x^2+3)}{(1+x^2)^2}dx - \frac{xz(x^2+3)}{1+x^2}dy.$$

1481. Ako se data površ zatvori ravni $z = h$ i primeni formula Ostrogradskog biće:

$$\iint_{(S)}(x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,dS + \iint_{x^2+y^2\leq h^2} h^2\,dx\,dy =$$

$$= \iiint_V (2x+2y+2z)\,dx\,dy\,dz = 2\iint_D\left[(x+y)z + \frac{z^2}{2}\right]\Bigg|_{\sqrt{x^2+y^2}}^{h} dx\,dy = 2\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^h\left[hr^2(\cos\varphi+\sin\varphi) + \frac{h^2}{2}r - r^3(\cos\varphi+\sin\varphi) - \frac{r^3}{2}\right]dr = \frac{h^4\pi}{2},$$

ili konačno

$$\iint_S = \frac{h^4\pi}{2} - h^4\pi = -\frac{h^4\pi}{2}.$$

1483. 1° $$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \Rightarrow \iint_S \frac{\partial u}{\partial n}dS =$$

$$= \iiint_V\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)dx\,dy\,dz = \iiint_V \Delta u\,dx\,dy\,dz.$$

2° $$\iint_{(S)} u\frac{\partial u}{\partial n}dS = \iiint_V\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz + \iiint_V u\,\Delta u\,dx\,dy\,dz.$$

1485. Razmotrimo dva slučaja: 1° Kada površina S ne obuhvata tačku (x, y, z); 2° kada površina S obuhvata tačku (x, y, z).

1° $$I(x,y,z) = \iint_{(S)}\frac{u_x\cos\alpha + u_y\cos\beta + u_z\cos\gamma}{r^3}dS = \iiint_V\left(\frac{r^3 - 3r^2u_x r'_\xi}{r^6} + \frac{r-3u_y r'_\eta}{r^4} + \frac{r-3u_z r'_z}{r^4}\right)d\xi\,d\eta\,d\zeta = \iiint_V \frac{3r - \frac{3}{r}r^2}{r^4}d\xi\,d\eta\,d\zeta = 0.$$

2° Neka je ϱ poluprečnik sfere S_1 čiji je centar u tački (x, y, z) i takve da je cela u oblasti V. Oblast V/V_1, gde je V_1: $(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2<\varrho^2$ presecimo ravni π i označimo jednu stranu te ravni sa π^+ a drugu sa π^-. Tada je na osnovu formule Ostrogradskog $\iint_S + \iint_{S_1-} + \iint_{\pi+} + \iint_{\pi-} = 0$. No kako je $\iint_{\pi+} + \iint_{\pi-} = 0$ to je $\iint_S = -\iint_{S_1-}$ odnosno

$$\iint_S = \iint_{S_1+} = \iint_{S_1}\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{\varrho^2}dS = \iint_{S_1}\frac{dS}{\varrho}\cdot\frac{1}{\varrho^2}\iint_{S_1+}dS = \frac{1}{\varrho^2}\cdot 4\varrho^2\pi = 4\pi.$$

Uopštiti zadatak.

1486. Ako se stavi $x-y+z=u$, $y-z+x=v$ i $z-x+y=w \Rightarrow x = \frac{1}{2}(u+v)$, $y = \frac{1}{2}(v+w)$, $z = \frac{1}{2}(u+w)$ biće $|u|+|v|+|w| = 1$.

Pa kako je s jedne strane

$$\iint_S = 3\iiint_V dx\,dy\,dz$$

a s druge strane

$$V' = 2\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{5} \text{ i } dx\,dy\,dz = \frac{1}{8}\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix} du\,dv\,dw = \frac{1}{4}du\,dv\,du \text{ to je}$$

$$\iint_S = 3\iiint_V dx\,dy\,dz = 3\iiint_{V'}\frac{1}{4}du\,dv\,dw = \frac{3}{4}V' = 1,$$

Definitivno je $\iint_S = 1$.

1488. Razmotrimo oblast V, ograničenu dvema sferama S^+ i $\overline{S}$ poluprečnika R i ϱ $(\varrho<R)$ sa centrom u tački $M(x_1, y_1, z_1)$. Primenom na tu oblast Greenove formule, uzimajući da je u gore data funkcija, a da je funkcija v zadata na sledeći način

$$v = \frac{1}{r}\ \frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}.$$

Neposrednim diferenciranjem i zamenom možemo se lako uveriti da je

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0.$$

Otuda je

$$\iint\limits_{\underline{S}+\overline{S}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right)dS=0,$$

ili

$$\iint\limits_{\underline{S}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right)dS+\iint\limits_{\overline{S}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right)dS=0.$$

Pošto je veličina $\frac{1}{r}$ konstantna na površinama $\overline{S}$ i $\underline{S}$ $\left(\frac{1}{R}\text{ i }\frac{1}{\varrho}\right)$ to može biti izdvojena pred znak integrala.

No kako je

$$\frac{1}{R}\iint\limits_{\underline{S}}\frac{\partial u}{\partial n}dS=0 \quad\text{i}\quad \frac{1}{\varrho}\iint\limits_{\overline{S}}\frac{\partial u}{\partial n}dS=0,$$

što je lako dokazati, to je

$$-\iint\limits_{S-}u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}dS+\iint\limits_{S+}u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}dS=0.$$

gde je $\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}=\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r}=-\frac{1}{r^2}$.

Otuda je $\iint\limits_{\underline{S}} u\,\frac{1}{r^2}dS-\iint\limits_{\overline{S}} u\,\frac{1}{r^2}dS=0.$

ili

$$\frac{1}{\varrho^2}\iint\limits_{\underline{S}} u\,dS=\frac{1}{R^2}\iint\limits_{\overline{S}} u\,dS \tag{1}$$

Primenom na integral, koji stoji na desnoj strani teoreme o srednjoj vrednosti biće:

$$\frac{1}{\varrho^2}\iint\limits_{\underline{S}} u\,dS=\frac{u(\alpha,\beta,\gamma)}{\varrho^2}\iint\limits_{\overline{S}} dS \tag{2}$$

gde je tačka $u(\alpha,\beta,\gamma)$ tačka na površini sfere poluprečnika ϱ sa centrom u tački $M(x_1, y_1, z_1)$

Ako $\varrho\to 0$ tada

$$u(\alpha,\beta,\gamma)\to u(x_1, y_1, z_1)$$

$$\frac{1}{\varrho^2}\iint\limits_{\overline{S}} dS=\frac{4\pi\varrho^2}{\varrho^2}=4\pi.$$

Otuda kad $\varrho\to 0$ dobijamo

$$\frac{1}{\varrho^2}\iint\limits_{\overline{S}} u\,dS\to u(x_1, y_1, z_1)\,4\pi.$$

Dalje, pošto leva strana jednačine (1) ne zavisi od ϱ onda kad $\varrho\to 0$ konačno dobijamo

$$\frac{1}{R^2}\iint\limits_{\overline{S}} u\,dS=4\pi\,u(x_1, y_1, z_1).$$

ili

$$u(x_1, y_1, z_1)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\overline{S}} u\,dS.$$

Glava V

1489. 1° Iz $\vec a(t)=|\vec a(t)|\,\vec a_0$ sledi da je hodograf poluprava iz koordinatnog početka ili deo te poluprave; 2° Iz $\vec a(t)=a\vec a_0(t)$ sledi da je hodograf kriva na sferi poluprečnika a.

1490. 1° Elipsa; 2° hiperbola.

1491. Množenjem jednačine skalarno sa vektorom $\vec a\times\vec b$ dobijamo $\vec r\cdot(\vec a\times\vec b)=\vec c\cdot(\vec a\times\vec b)$. Ova jednačina je jednačina ravni.

1492. Putanja je prava: $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z}{3}$; brzina $\dfrac{d\vec r}{dt}=-8t\vec j+6t\vec k$ ubrzanje: $\dfrac{d^2\vec r}{dt^2}=-8\vec j+6\vec k$.

1493. Traktorija je kriva $x=2\cos t, y=2\sin t, z=2t$ koja se zove zavojnica. $\vec v=-2\sin t\,\vec i+2\cos t\,\vec j+3\vec k$; $\vec w=-\cos t\,\vec i-2\sin t\,\vec j$. $|\vec v|=\sqrt{13}, |\vec w|=4$. **4194·** $\vec v=\vec v_0-gt\vec k$.

1496. $\vec r=\vec a_1e^{k_1t}+\vec a_2e^{k_2t}$ gde su k_1 i k_2 koreni jednačine $k^2+ak+\lambda=0$.

1497. $\sqrt{a^2\omega^2+v_0^2-2a\omega v_0\cos\omega t}$. **1512.** Uputstvo: Posmatrati skalarnu funkciju $f(t)=\vec a(t)\cdot\vec b$ i primeniti Rollovu teoremu. **1513** Ekviskalarne površi su date jednačinom $\vec a\cdot\vec r=c$ što znači da je to familija ravni normalnih na vektoru $\vec a$.

1514. grad $u(\vec r_0)=9\vec i-3\vec j-3\vec k\cdot\vec r=(a,a,a)$; $\vec r=(x,y,\pm\sqrt{xy})$.

1521. grad $u(\vec r_0)=(6,-6,-2)$; $\dfrac{du}{d\vec e}=2$. **1522.** $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$; $|\operatorname{grad} u|=\sqrt3$.

1523. $\dfrac{du}{d\vec r_0}=\dfrac{2u(\vec r_0)}{(\vec r_0)}$; $\dfrac{du}{d\vec r_0}=\operatorname{grad} u(\vec r_0)$ kada je $a=b=c$. **1534.** $(\vec a\cdot\vec e)$.

1527. Kako je brzina $\vec v=\dfrac{d\vec r}{dt}$ gde je $\vec r$ vektor položaja tačke a t vreme, dobijamo $\dfrac{d\vec r}{dt}=\vec v_0$.

Integracijom ove jednačine dobijamo $\vec r=\int\vec v_0\,dt=t\vec v_0+\vec c$.

1540. 1° Pošto je u pitanju proizvod dve skalarne funkcije operator ∇ ima deferencijalni karakter, tj. dolazi do izražaja samo njegovo diferencijalno svojstvo. Otuda će biti $\nabla(f\varphi)=\varphi\,\Delta f+f\,\Delta\varphi=\varphi\operatorname{grad} f+f\operatorname{grad}\varphi$;

2° $\nabla(f\vec a)=\nabla(\dot f\vec a)+\nabla(f\dot{\vec a})=\vec a\nabla f+f(\nabla\vec a)$; 3° $\nabla\times(f\vec a)=f(\nabla\times\vec a)-\vec a\times(\nabla f)$.

1542. 1° $\nabla(r)=\operatorname{grad} r=\dfrac{\vec r}{r}$; 2° $\nabla\vec r=3$;

3° $\nabla\left(\dfrac1r\right)=-\dfrac{\frac{\vec r}{r}}{r^2}=-\dfrac{\vec r}{r^3}$; 4° $\nabla\left(\dfrac{\vec r}{r^3}\right)=\dfrac{3r^3-3r^2\cdot\frac{\vec r}{r}\vec r}{r^6}=0$.

1543. 1° $\nabla(\vec r_0)=\nabla\left(\dfrac{\vec r}{r}\right)=\dfrac{3r-\frac{\vec r}{r}\cdot\vec r}{r^2}=\dfrac2r$;

2° $\nabla\left(\dfrac{\vec r}{r^2}\right)=\dfrac{3r^2-2\frac{\vec r}{r}\vec r}{r^4}=\dfrac{1}{r^2}$; 3° $2\vec r$.

1544. 1° $\nabla\times\vec r=0$; 2° $\nabla\times\left(\dfrac{\vec r}{r}\right)=\dfrac1r\nabla\times\vec r-\vec r\times\nabla\left(\dfrac1r\right)=0$.

1545. 1° $\Delta r=\nabla(\nabla r)=\nabla(\operatorname{grad} r)=\nabla\dfrac{\vec r}{r}=\dfrac2r$. 2° $\Delta\left(\dfrac1r\right)=\nabla\left[\nabla\left(\dfrac1r\right)\right]=\nabla\left(-\dfrac{\vec r}{r^3}\right)=0$.

1546. $\nabla(\vec u\vec v)=\nabla(\dot{\vec u}\vec v)+\nabla(\vec u\dot{\vec v})$. Da bi transformisali desnu stranu ove jednakosti koristićemo poznati identitet iz vektorske algebre: $\vec a\times(\vec b\times\vec c)=\vec b(\vec a\vec c)-\vec c(\vec a\vec b)\Rightarrow\vec b(\vec a\vec c)=\vec a\times(\vec b\times\vec c)+(\vec a\vec b)\vec c$. Ako se uzme da je $\vec a=\vec u$, $\vec b=\nabla$ i $\vec c=\vec v$ dobija se da je $\nabla(\vec u\dot{\vec v})=\vec u+(\nabla\times\vec v)+(\vec u\nabla)\vec v$ i $\nabla(\dot{\vec u}\vec v)=\vec v\times(\nabla\times\vec u)\times(\vec v\nabla)\vec u$.
Tako se dobija
$\nabla(\vec u\times\vec v)=\vec u\times(\nabla\times\vec v)+\vec v\times(\nabla\times\vec u)+(\vec u\nabla)\vec v+(\vec v\nabla)\vec u$, tj. $\operatorname{grad}(\vec u\vec v)=\vec u\times\operatorname{rot}\vec v+\vec v\times\operatorname{rot}\vec u+(\vec u\nabla)\vec v+(\vec v\nabla)\vec u$.

1547. $\nabla(\vec u\times\vec v)=\nabla(\dot{\vec u}\times\vec v)\times\nabla(\vec u\times\dot{\vec v})=\nabla(\dot{\vec u}\times\vec v)-\nabla(\dot{\vec v}\times\vec u)$. Kako je $\nabla(\dot{\vec u}\times\vec v)=\vec v(\nabla\times\vec u)$ i $\nabla(\dot{\vec v}\,\vec u)=(\nabla\times\vec v)\vec u$ to je $\nabla(\vec u\times\vec v)=\vec v\cdot(\nabla\times\vec u)-\vec u(\nabla\times\vec v)=\vec v\operatorname{rot}\vec u-\vec u\operatorname{rot}\vec v$.

1548. $\Delta\times(\vec u\times\vec v)=\nabla\times(\dot{\vec u}\times\vec v)+\nabla\times(\vec u\times\dot{\vec v})$
Kako je $\nabla\times(\dot{\vec u}\times\vec v)=(\vec v\nabla)\vec u-\vec v(\nabla\vec u)$ i $\nabla\times(\vec u\times\dot{\vec v})=-\nabla\times(\dot{\vec v}\times\vec u)=\vec u(\nabla\vec v)-(\vec u\nabla)\vec v$, onda zamenom u prvi izraz dobijamo da je $\nabla\times(\vec u\times\vec v)=(\vec v\nabla)\vec u-\vec v(\nabla\vec u)+\vec u(\nabla\vec v)-(\vec u\nabla)\vec v$ odnosno $\operatorname{rot}(\vec u\times\vec v)=(\vec v\nabla)\vec u-(\vec u\nabla)\vec v-\vec v\operatorname{div}\vec u+\vec u\operatorname{div}\vec v$.

1549. Budući da se operator ∇ primenjuje samo na vektor $\vec b$ imaćemo

$$(\vec a\times\nabla)\times\vec b=\nabla(\vec a\dot{\vec b})-\vec a(\nabla\vec b)$$

gde tačkica iznad vektora $\vec b$ znači da se operator ∇ primenjuje na skalarni proizvod $\vec a\vec b$ ili tako, da se $\vec a$ smatra konstantnim vektorom. Izvesti obrazac za $\nabla(\vec a\vec b)$ u slučaju kada je $\vec a$ konstantan vektor svodi se na $\nabla(\vec a\vec b)=(\vec a\nabla)\vec b+\vec a\times(\nabla\times\vec b)$.

Otuda je

$$(\vec a\times\nabla)\times\vec b=(\vec a\,\nabla)\vec b+\vec a\times(\Delta\times\vec b)-\vec a(\nabla\vec b)=(\vec a\,\nabla)\vec b+\vec a\times\operatorname{rot}\vec b-\vec a\operatorname{div}\vec b.$$

1553. Dobija se $(\vec a\,\nabla)(\vec b\,\vec c)=\vec b[\vec a\,\nabla(\vec c)]+\vec c[(\vec a\,\nabla)\vec b]$. Ovde se koristi svojstvo aditivnosti prvo se operator primeni na jedan vektor dok drugi ostaje konstantan i obrnuto.

1554. Nalazimo da je $(\vec a\times\nabla)\vec r=\vec a(\nabla\times\vec r)=\vec a\operatorname{rot}\vec r=0$ pošto je $\operatorname{rot}\vec r=0$. Koristi se svojstvo mešovitog vektorskog proizvoda.

1555. Koristeći obrazac vektorske algebre za dvostruki vektorski proizvod nalazimo

$$(\vec a\times\nabla)\times\vec r=\nabla(\vec a\,\vec r)-\vec a(\nabla\vec r)=(\vec a\,\nabla)\vec r-\vec a(\nabla\vec r).$$

Pošto je $(\vec a\,\nabla)\vec r=\vec a$, $\nabla\vec r=3$, to je $(\vec a\times\nabla)\times\vec r=-2\vec a$.

1556. Iz $\nabla\times(\lambda\vec a)=\lambda(\nabla\times\vec a)-(\vec a\times\nabla\lambda)$ za $\lambda=f(r)$ i $\vec a=\vec r$ dobija se

$$\nabla\times(f(r)\vec r)=f(r)(\nabla+\vec r-(\vec r\times\nabla f(r)).$$

No pošto je $\nabla\times\vec r=0$ a $\nabla f(r)=f'(r)\nabla r$ to je $\nabla\times(f(r)\vec r)=-f'(r)(\vec r\times\operatorname{grad} r)=$ $=-f'(r)(\vec r\times\operatorname{ort}\vec r)=0$.

1558. $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=0.$

1559. $\Delta f\varphi=\nabla(\nabla f\varphi)=\nabla(f\nabla\varphi+\varphi\nabla f)=\nabla(f\nabla\varphi)+\nabla(\varphi\nabla f)=f\nabla^2\varphi+\nabla f\nabla\varphi+\nabla\varphi\nabla f+$ $+\varphi\Delta^2 f=f\Delta\varphi+\varphi\Delta f+2\nabla f\nabla\varphi.$

1563. 1° Prema teoremi Ostrogradskog je

$$\oint\!\!\oint_S\varphi\,\vec a\,d\vec S=\iiint_V\operatorname{div}(\varphi\,\vec a)\,dV$$

Pošto je $\operatorname{div}(\varphi\vec a)=\nabla(\varphi\vec a)=\varphi(\nabla\vec a)+\vec a\,\nabla\varphi)=\varphi\operatorname{div}\vec a+\vec a\operatorname{grad}\varphi$ to zamenom u prethodnu relaciju dobijamo:

$$\oint\!\!\oint_{(S)}\varphi\,\vec a\,d\vec S=\iiint_V\varphi\operatorname{div}\vec a\,dV+\iiint_V\vec a\operatorname{grad}\varphi\,dV,$$

odakle je

$$\iiint_V\varphi\operatorname{div}\vec a\,dV=\oint\!\!\oint_S\varphi\,\vec a\,d\vec S-\iiint_V\vec a\operatorname{grad}\varphi\,dV.$$

2° Koristeći opet teoremu Ostrogradskog, prvo nalazimo

$$\oint\!\!\oint_S(\vec a\times\vec b)\,d\vec S=\iiint_V\nabla(\vec a\times\vec b)\,dV.$$

No kako je $\nabla(\vec a\times\vec b)=\vec b(\nabla\times\vec a)-\vec a(\nabla\times\vec b)=\vec b\operatorname{rot}\vec a-\vec a\operatorname{rot}\vec b$ to je

$$\oint\!\!\oint_S(\vec a\times\vec b)\,d\vec S=\iiint_V\vec b\operatorname{rot}\vec a\,dV-\iiint_V\vec a\operatorname{rot}\vec b\,dV$$

odakle je

$$\iiint_V\vec a\operatorname{rot}\vec b\,dV=\iiint_V\vec b\operatorname{rot}\vec a\,dV-\oint\!\!\oint_S d\vec S(\vec a\times\vec b).$$

1564. Data jednakost je $\oint\!\!\oint_S\left[\varphi\,\nabla\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\nabla\varphi\right]d\vec S=-\iiint_V\frac{1}{r}\nabla^2\varphi\,dV$. Ako na levu stranu ove jednakosti primenimo formulu Ostrogradskog dobiće se dalje

$$\oint\!\!\oint_S\left[\varphi\,\nabla\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\nabla\varphi\right]d\vec S=\iiint_V\operatorname{div}\left[\varphi\,\nabla\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\nabla\varphi\right]dV=$$

$$=\iiint_V\nabla\left[-\varphi\frac{\vec r}{r^3}-\frac{1}{r}\nabla\varphi\right]dV=-\iiint_V\left[\frac{\vec r}{r^3}\nabla\varphi+\varphi\,\nabla\frac{\vec r}{r^3}+\frac{1}{r}\nabla^2\varphi+\right.$$

$$\left.+\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\nabla\varphi\right]dV=-\iiint_V\left[\frac{\vec r}{r^3}\nabla\varphi-\frac{\vec r}{r^3}\nabla\varphi+\frac{1}{r}\nabla^2\varphi\right]dV=-\iiint_V\frac{1}{r}\nabla\varphi\,dV,$$

što je i trebalo dokazati.

1565. Kako je $\dfrac{\partial\psi}{\partial n}=\operatorname{grad}\psi\cdot\vec n_0$ to je $\oint\!\!\oint\varphi\operatorname{grad}\psi\,\vec n_0\,dS=\iiint_V\nabla(\varphi\operatorname{grad}\psi)\,dV=$

$$\iiint_V(\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi+\varphi\Delta\psi)\,dV.$$

1566. Data jednakost je $\oint\!\!\oint_S\{(\vec c\,d\vec S)\vec a-d\vec S(\vec a\,\vec c)\}=0$ tj. $\oint\!\!\oint\vec c\times(\vec a\times d\vec S)=0$, ili zbog konstantnosti vektora $\vec c$

$$\vec c\times\oint\!\!\oint_S(\vec a\times d\vec S)=0.$$

Ako sa V, označimo veličinu oblasti obuhvaćene zatvorenom površinom S biće takođe

$$\vec c\times\frac{\oint\!\!\oint_S d\vec S\times\vec a}{V}=0,$$

a isto tako i

$$\vec c\times\lim_{V\to 0}\frac{\oint\!\!\oint_S d\vec S\times\vec a}{V}=0,$$

tj. $\vec c\times\operatorname{rot}\vec a=0$. Odavde očigledno sledi da vektor $\vec a$ mora imati jednu od sledećih osobina: 1° ili je $\operatorname{rot}\vec a=0$, tj. polje mora biti potencijalno; 2° ili mora biti $\operatorname{rot}\vec a$ kolinearan sa vektorom $\vec c$.

1569. Ako se stavi $\vec{I}=\oint\limits_c d\vec{r}\times\vec{a}$ pa se ova jednakost skalarno pomnoži sa konstantnim vektorom $\vec{c}$ dobijamo

$$\vec{c}\,\vec{I}=\vec{c}\oint\limits_c(d\vec{r}\times\vec{a})=\oint\limits_c\vec{c}\,(d\vec{r}\times\vec{a})=\oint\limits_c d\vec{r}\,(\vec{a}\times\vec{c}).$$

Primenom Stocsesove formule dobija se dalje

$$\vec{c}\oint\limits_c d\vec{r}\times\vec{a}=\oiint\limits_S d\vec{S}\,[\nabla\times(\vec{a}\,\vec{c})]=\vec{c}\oiint\limits_S[(d\vec{S}\times\nabla)\times\vec{a}]\,.$$

Iz zadnje jednakosti, pošto ona važi za bilo kakav konstantan vektor $\vec{c}$, sledi

$$\oint\limits_c d\vec{r}\times\vec{a}=\oiint\limits_c[(d\vec{S}\times\nabla)\times\vec{a}]=\oiint\limits_S[\operatorname{grad}(d\vec{S}\,\vec{a})-d\vec{S}\operatorname{div}\vec{a}]$$

pri čemu se u izrazu $\operatorname{grad}(d\vec{S}\,\vec{a})$ vektorski površinski element tretira kao konstanta Otuda je

$$\oint\limits_c d\vec{r}\times\vec{a}=\oiint\limits_S[(d\vec{S}\times\nabla)\times\vec{a}]=\oiint\limits_S(d\vec{S}\nabla)\,\vec{a}-\oiint\limits_S d\vec{S}\,\nabla\vec{a}\,.$$

1° U specijalnom slučaju kada je $\vec{a}=\vec{r}$ prethodna jednakost daje

$$\oint d\vec{r}\times\vec{r}=\oiint\limits_S[(\overrightarrow{dS}\Delta)]\,\vec{r}-\overrightarrow{dS}\cdot\nabla\vec{r}].$$

No kako je $(d\vec{S}\nabla)\,\vec{r}=d\vec{S}$ i $\nabla\vec{r}=3\Rightarrow\oint d\vec{r}\times\vec{r}=2\oiint d\vec{S}.$

Ova jednakost se takođe može dobiti služeći se geometrijskom interpretacijom.

2° Ako se u istoj jednakosti stavi $\vec{a}=\vec{c}\times\vec{r}$. gde je $\vec{c}$ konstatan vektor dobiće se

$$\oint\limits_c d\vec{r}\times(\vec{c}\times\vec{r})=\oiint\limits_S(d\vec{S}\times\nabla)\times(\vec{c}\times\vec{r})=\oiint\limits_S[\vec{c}\,d\vec{S}\,\nabla\vec{r}-\vec{c}\,d\vec{S}\,\nabla\vec{r}].$$

pošto je

$$d\vec{S}\,\nabla\vec{r}=d\vec{S}\cdot(\nabla\times\vec{r})=d\vec{S}\,\operatorname{rot}\vec{r}=0;\ \vec{c}\,d\vec{S}\,\nabla\cdot\vec{r}=\vec{c}\times d\vec{S}$$

to prethodna jednakost postaje

$$\oint\limits_c d\vec{r}\times(\vec{c}\times\vec{r})=-\oiint\limits_S\vec{c}\times d\vec{S}=\oiint d\vec{S}\times\vec{c}\,.$$

1570. $\vec{A}=\dfrac{(\sqrt{x^2+y^2}+y\,z)\,\vec{i}-(\sqrt{x^2+y^2}+x\,z)\,\vec{j}+(x-y)\,z\cdot\vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}\,.$

1571. Prvi način $\Phi=\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3+\Phi_4$, gde je

$$\Phi_1=\iint\limits_D[(x-2z)\,\vec{i}+(3z-4x)\,\vec{j}+(5x+y)\,\vec{k}]\,\frac{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{3}}\sqrt{3}\,dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_D[(x-2z)+(3z-4x)+(5x+y)]\,dx\,dy=\int\limits_0^1(x+1)\,dx\int\limits_0^{1-x}dy=\frac{2}{3};$$

$$\Phi_2=\iint\limits_D[(x-2z)\,\vec{i}+(3z-4x)\,\vec{j}+(5x+y)\,\vec{k}]\,(-\vec{i})\,dz\,dy=\iint\limits_D 2z\,dy\,dz=$$

$$=2\int\limits_0^1 z\,dz\int\limits_0^{1-z}dy=2\int\limits_0^1 z\,(1-z)\,dz=\frac{1}{3};$$

$$\Phi_3=\iint\limits_D(4x-3z)\,dx\,dz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}(4x-3z)\,dz=\frac{1}{6}$$

$$\Phi_4=-\iint\limits_D(5x+y)\,dx\,dy=-\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}(5x+y)\,dy=-1$$

Tako se konačno dobija $\Phi=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-1=\frac{1}{6}$

Drugi način. Primenom formule Ostrogradskog biće

$$\Phi=\iiint\limits_V(1+0+0)\,dx\,dy\,dz=V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

1572. $\frac{3\pi}{16}$. **1573.** $\frac{64\pi}{3}$.

1574. $\vec{n}=\dfrac{x\,\vec{i}+y\,\vec{j}-z\,\vec{k}}{|z|\sqrt{2}}$, $dS=\sqrt{2}\,dx\,dy\Rightarrow\Phi=\displaystyle\iint\limits_D\frac{(x\,y+y)\sqrt{x^2+y^2}-xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy=$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1(r^3\sin\varphi\cos\varphi-r^2\sin\varphi-r^2\sin\varphi\cos\varphi)\,d\varrho=0.$$

1575. $\frac{1}{15}$.

1576. $-b^2a^2\frac{\pi}{2}$. Zatvoriti površ sa ravni $z=b$, a zatim primeniti formulu Ostrogradskog.

1577. $\oiint\vec{a}\,d\vec{S}=-4\pi f e$, jer je $\vec{r}_0\,d\vec{S}=d\,S$. **1578.** $\sum\limits_{i=1}^{n}e_i$.

1580. $c\varrho\,\frac{\partial u}{\partial z}=\operatorname{div}\,(k\operatorname{grad}u)$, gde je c specifična provodljivost toplote a ϱ gustina tela.

1581. $I=\int\limits_c x\,dx+y\,dy+(x+y-1)\,dz$. No kako je $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}\Rightarrow y=2x-1,\ dy=2\,dx,$

$z=3x-2,\ dz=3\,x$, pa je $I=2\int\limits_1^2(7x-4)\,dx)=13.$ **1582.** $6+\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(4\sqrt{3}+7)$.

1583. πa^2. **1584.** $\frac{1}{6}a^2(3-2a)$. **1585.** $\int\limits_{r_A}^{r_B} f(r)\,dr$.

1586. Prvi način $\oint\limits_c=\int\limits_{c_1}+\int\limits_{c_2}+\int\limits_{c_3}$ gde je $\int\limits_{c_1}=\int\limits_1^0(x^4+2x^3-2x^2+1)\,dx=-\frac{41}{30}$;

$$\int\limits_{c_2}=\int\limits_0^1 z^2\,dz=\frac{1}{3};\quad \int\limits_{c_3}=\int\limits_1^0 z^2\,dz=-\frac{1}{3}.\quad \text{Definitivno je } \oint\limits_c=-\frac{31}{30}.$$

Drugi način. Iz jednačine $x^2+y+z^2-1=0\Rightarrow \vec{n}=\frac{2x\vec{i}+\vec{j}+2z\vec{k}}{\sqrt{4x^2+1+4z^2}}$,

$$\operatorname{rot}\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2 & -x^2 & z^2\end{vmatrix}=-2(x+y)\vec{k},\ d\vec{S}=\frac{\sqrt{4x^2+1+4z^2}}{2|z|}\,dx\,dy.$$

Na taj način će biti

$$\oint\limits_c \vec{A}\,d\vec{r}=-2\iint\limits_D(x+y)\,dx\,dy=-2\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x^2}(x+y)\,dy=$$

$$=-2\int\limits_0^1\left(x-x^3+\frac{1-2x^2+x^4}{2}\right)dx=-\frac{31}{30}.$$

1587. $-\pi a^4$. **1588.** -4π. **1589.** 1° 2π; 2° 2π.

1590. 1° 0; 2° $2\pi n$, gde je n broj obilaženja konture c oko ose Oz.

1591. $Q=\iint\limits_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy;\ C=\iint\limits_D\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy;\ \frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}.$

1592. $\operatorname{rot} f(r)\vec{r}=f(r)\operatorname{rot}\vec{r}+\operatorname{grad} f(r)\times\vec{r}$. No kako je $\operatorname{rot}\vec{r}=0$, a $\operatorname{grad} f(r)=f'(r)\frac{\vec{r}}{r}$ ispada da je

$$\operatorname{rot} f(r)\vec{r}=0+f'(r)\frac{\vec{r}}{r}\times\vec{r}=0+0=0$$

što znači da je polje zaista potencijalno. Njegov potencijal je

$$u(M)=\int\limits_{M_0}^{M} f(r)\vec{r}\,d\vec{r}=\int\limits_{M_0}^{M} f(r)\,r\,dr$$

jer je $\vec{r}\,d\vec{r}=r\,dr$. Ovaj identitet dobija se polazeći od jednakosti $\vec{r}\,\vec{r}=r^2$. Ako se ova jednakost diferencira dobija se $2\vec{r}\,d\vec{r}=2r\,dr\Rightarrow\vec{r}\,d\vec{r}=r\,dr$, što je i trebalo dokazati.

1593. $\operatorname{rot}\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y+z & x+z & x+y\end{vmatrix}=0$

$$u(M)=\int\limits_0^x 0\,dx+\int\limits_0^y x\,dy+\int\limits_0^z(x+y)\,dz\Rightarrow u(M)=xy+(x+y)z+c.$$

Ako, provere radi, nađemo grad u biće:

$$\operatorname{grad} u=(y+z)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(x+y)\vec{k}$$

što je i trebalo dokazati.

1595. Da bi polje bilo potencijalno mora biti $\operatorname{rot}\vec{A}=0$ tj.

$$\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x+2y+az & bx-3y-z & 4x+cy+2z\end{vmatrix}=0\Rightarrow(c+1)\vec{i}-(4-a)\vec{j}+(b-2)\vec{k}=0$$

što je ispunjeno jedino ako je $c=-1$, $a=4$ i $b=2$. Na taj način imamo da je

$$\vec{A}=(x+2y+4z)\vec{i}+(2x-3y-z)\vec{j}+(4x-y+2z)\vec{k}$$

njegov potencijal je

$$u(M)=\int\limits_0^x(x+4)\,dx+\int\limits_0^y(2x-3y)\,dy+\int\limits_0^z(4x-y+2z)\,dz=$$

$$=\frac{1}{2}x^2+2xy-\frac{3}{2}y^2+4xz-yz+z^2+c$$

tj. konačno je

$$u(M)=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}y^2+z^2+2xy+4xz-yz+c.$$

1596. Mi ćemo ispitati samo pod 1° i 2°, a ostalo će ispitati čitalac.

1° Prvi način. Kako je $\vec{c}\,\vec{r}=c_1x+c_2y+c_3z=u$ to je $\vec{A}=u\vec{r}=ux\vec{i}+uy\vec{j}+uz\vec{k}$ pa je

$$\operatorname{rot}\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ ux & uy & uz\end{vmatrix}=\left(z\frac{\partial u}{\partial y}-y\frac{\partial u}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\qquad\right)\vec{j}+\left(\qquad\right)\vec{k},$$ pri čemu

je $\frac{\partial u}{\partial x}=c_1$, $\frac{\partial u}{\partial y}=c_2$ i $\frac{\partial u}{\partial z}=c_3$. Odavde sledi da je $\operatorname{rot}\vec{A}\neq0$, što znači da polje nije potencijalno.

Drugi način. Zadatak ćemo rešiti primenom operatora ∇. Tako će biti

$$\operatorname{rot}(\vec{c}\,\vec{r})\vec{r}=\operatorname{rot}(u\vec{r})=\nabla\times(u\vec{r})=u\operatorname{rot}\vec{r}-\vec{r}\times\operatorname{grad} u=0-\vec{r}\times\operatorname{grad} u;$$

no kako je $\operatorname{grad}(\vec{c}\,\vec{r})=\vec{c}\times\operatorname{rot}+\vec{r}\times\operatorname{rot}\vec{c}+(\vec{r}\,\nabla)\vec{c}+(\vec{c}\,\nabla)\vec{r}=0+0+0+\vec{c}$ pa je i konačno

$$\operatorname{rot}(\vec{c}\,\vec{r})\vec{r}=-\vec{r}\times\vec{c}\neq0$$

2°. Prvi način. Kako je $\vec A=(\vec c\,\vec r)\vec c$ to je $\vec A=u\vec c$ pri čemu je $u=c_1x+c_2y+c_3z$ i $\frac{\partial u}{\partial x}=c_1$,

$\frac{\partial u}{\partial y}=c_2$, $\frac{\partial u}{\partial z}=c_3$. Otuda je

$$\operatorname{rot}\vec A=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ uc_1 & uc_2 & uc_3\end{vmatrix}=\left(c_3\frac{\partial u}{\partial y}-c_2\frac{\partial u}{\partial z}\right)\vec i+$$

$$+(\quad)\vec j+(\quad)\vec k=(c_3c_2-c_2c_3)\vec i+(\quad)\vec j+(\quad)\vec k=0+0+0=0.$$

Odavde sledi da je polje potencijalno.

Drugi način.

$\operatorname{rot}\vec A=\nabla\times(u\vec c)=u\operatorname{rot}\vec c-\vec c\times\operatorname{grad}u=0-\vec c\times\operatorname{grad}(\vec c\,\vec r)=-\vec c\times\nabla(\vec c\,\vec r)=-\vec c\times(0+0+$ $+0+\vec c)=0$, što je trebalo dokazati. Potencijal polja $\vec A=u\,c_1\vec i+u\,c_2\vec j+u\,c_3\vec k$ biće

$$u(M)=c_1\int_0^x u\,dx+c_2\int_0^y(c_2y+c_3z)\,dy+c_3^2\int_0^z z\,dz=$$

$$=c_1\left(\frac{c_1}{2}x^2+c_2xy+c_3zx\right)+c_2\left(\frac{c_2}{2}y^2+c_3zy\right)\pm\frac{c_3}{2}z^2+c.$$

1597. $\displaystyle\int_0^\infty\vec v\,d\vec r=\frac{3}{2}a^2.$

1598. $\operatorname{div}\vec A=\operatorname{div}f(r)\vec r=3f(r)+rf'(r)$. Iz jednačine $3f(r)+rf'(r)=0\Rightarrow\frac{df}{f}=-3\frac{dr}{r}$, odnosno

$\ln f=-3\ln r+\ln k$ tj. $f(r)=\frac{k}{r^3}$

1599. $f'(x)+\frac{2x}{1+x^2}f(x)-\frac{3}{1+x^2}=0$, $\Rightarrow f(x)=\frac{3x+c}{1+x^2}$ ili s obzirom na početne uslove $f(x)=\frac{3x+c}{1+x^2}$. $(c=c)$

Vektorski potencijal ovoga polja određuje se iz jednakosti

$$3\frac{x}{1+x^2}\vec i+6\frac{x^2y}{(1+x^2)^2}\vec j-3\frac{z}{1+x^2}\vec k=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix},\Rightarrow\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=3\frac{x}{1+x^2},$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=6\frac{x^2y}{(1+x^2)^2},\quad\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=3\frac{z}{1+x^2}.$$

Ako se stavi naprimer

$R=0$ dobija se $\frac{\partial Q}{\partial z}=-3\frac{x}{1+x^2}$, $\frac{\partial P}{\partial z}=6\frac{x^2y}{(1+x^2)^2}$, $\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=3\frac{z}{1+x^2}$. Nakon integracije,

iz prave dve jednačine dobija se $Q=-3\frac{xz}{1+x^2}+\varphi(x,y)$ i $P=6\frac{x^2yz}{(1+x^2)^2}+\psi(x,y)$.

Zamenom u trećoj od jednačina biće $\frac{6x^2z}{(1+x^2)^2}+3\frac{z}{1+x^2}+\varphi'-\frac{3x^2z}{(1+x^2)^2}$, $-\psi'=3\frac{z}{1+x^2}$,

$\Rightarrow\varphi'=\psi'$ ili $\varphi=\psi$. Ako se stavi $\varphi=\psi=0$ konačno se dobija traženi vektorski potencijal

$$\vec u=6\frac{x^2yz}{(1+x^2)^2}\vec i-3\frac{xz}{1+x^2}\vec j.$$

1600. $\operatorname{rot}\vec A=\nabla\times r(\vec c\times\vec r)=\nabla\times(r\vec B)=r\operatorname{rot}\vec B-\vec B\times\operatorname{grad}r=r\nabla\times(\vec c\times\vec r)-(\vec c\times\vec r)\times\frac{\vec r}{r}=$

$=r[(\vec r\nabla)\vec c-(\vec c\nabla)\vec r-r\operatorname{div}\vec c+\vec c\operatorname{div}r]-(\vec c\times\vec r)\times\frac{\vec r}{r}=r[0-\vec c-0+3\vec c]-(\vec c\times\vec r)\times\frac{\vec r}{r}=$

$=2r\vec c-(\vec c\times\vec r)\times\frac{\vec r}{r}\neq0.$

Pošto polje nije potencijalno, proverićemo da li je solenoidalno tj da li je $\operatorname{div}\vec A=0$. Tako imamo $\operatorname{div}r(\vec c\times\vec r)=\operatorname{div}(r\vec B)=\nabla(r\vec B)=(\nabla r)\vec B+r[\nabla(\vec c\times\vec r)]=0+r$ $(\vec r\operatorname{rot}\vec c-\vec c\operatorname{rot}r)=0$. To znači da je polje solenoidalno i njegov potencijal se određuje iz jednakosti

$$r(\vec c\times\vec r)=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

gde su P, Q i R nepoznate funkcije koje treba odrediti.

1603. $\displaystyle u(M)=\int_{M_0}^{M}\frac{dr}{r^2}=-\frac{1}{r}\Big|_{M_0}^{M}=-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}$. Dalji postupak je jasan.

1605. $a_1=\varphi_1(z)$, $a_2=x+\varphi_2(z)$, $a_3=\varphi_3(x,y)$.

Glava VI

1607. Iz $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=b\sin 2t$ sledi $x^2+y^2=a^2$ i $z=\dfrac{b}{a^2}xy$.

1608. $\dot{x}=1$, $\dot{y}=2t$, $\dot{z}=2t^2$. $s=\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1+4t^2+4t^4}\,dt=\int_0^2 (1+2t^2)\,dt=t+\frac{2t^3}{3}\Bigg|_0^2=\frac{22}{3}$.

1609. $\sqrt{3}(e^t-1)$. 1610. $\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{t}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$. 1611. 5. 1612. $|\vec{a}-\vec{b}|t+c$.

1619. Tangenta: $\dfrac{x-a\cos t}{-a\sin t}=\dfrac{y-a\sin t}{a\cos t}=\dfrac{z-bt}{b}$; binormala: $\dfrac{x-a\cos t}{b\sin t}=\dfrac{y-a\sin t}{-b\cos t}=\dfrac{z-bt}{a}$;

glavna normala: $\dfrac{x-a\cos t}{\cos t}=\dfrac{y-a\sin t}{\sin t}=\dfrac{z-bt}{0}$. 1620. $\dfrac{\pi}{4}$.

1622. Normalna ravan: $2x-z=0$; oskulatorna ravan: $y-1=0$; rektifikaciona ravan: $12x-6y+z-8=0$.

1624. 1° $x-y=z\sqrt{2}$; 2° $4x-y-z-9=0$. 1625. $z=0$.

1627. $\left(\dfrac{1}{4},\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$ i $\left(4,\ -\dfrac{8}{3},\ 2\right)$. 1628. $\varphi(t)=\dfrac{1}{k}\displaystyle\int \sqrt{1-k^2\cos^2 t}\,dt$.

gde je $k=\dfrac{1}{\sqrt{c^2-1}}$, $c=\text{const}$.

1629. Neka je α ugao koji normalni vektor oskulatorne ravni zaklapa sa z-osom. Tada je $f(t)=c_2-\operatorname{tg}\alpha\cos(c_1+t_2)$ ili $f(t)=c_2+\operatorname{tg}\alpha\cos(c_1-t)$.

1634. $(0,\ 0,\ 0)$. 1636. Iz $k=0$ sledi $\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2}=0$ odakle je $\dfrac{d\vec{r}}{ds}=\vec{c}_1$ pa je $\vec{r}=\vec{c}_1 s+\vec{c}_2$.

1639. Sledi iz prethodnog zadatka. 1640. $2x+3y+19z-27=0$.

1641. 2° Za $t_2\to t_1$ i $t_3\to t_1$ dobijamo $3a_2a_3t_1^2x-3a_1a_3t_1y+a_1a_2z-a_1a_2a_3t_1^3$.

1642. $\sqrt{2}$. 1643. $K=T=\dfrac{at^2}{(a^2+t^2)^2}$. 1649. 1° $4a\Big/\sqrt{1+\sin^2\dfrac{t}{2}}$;

2° $\vec{r}=\left\{at,\ a,\ 3a\sin\dfrac{t}{2}\right\}$. 1654. $K=\dfrac{1}{f}\sqrt{\dfrac{1+\psi^2+\psi'^2}{(1+\psi^2)^3}}$,

$T=\dfrac{1}{f}\,\dfrac{\psi''+\psi}{1+\psi^2+\psi'^2}$. 1655. $T_1=T_2=0$. Krive su ravne krive.

1656. $\dfrac{\sqrt{R^2+\varrho^2}}{\varrho(c-s)}$ $(c=\text{const})$. 1657. $\dfrac{KT'-K'T}{(K^2+T^2)(c-s)K}$ $(c=\text{const}$, s dužina luka, a naznačeni izvodi su po $s)$.

1661. 2° Prava. 1663. 1° $\vec{r}=\displaystyle\int c(t)\,\vec{t}(t)\,dt$ gde su $c(t)$ proizvoljne skalarne funkcije a $\vec{t}(t)$ radijus vektor indikatrise. 2° U ovom slučaju je kriva cilindarska zavojnica. 3° Ako su R i ϱ poluprečnik krivine odnosno torzije, tada je jednačina krive:

$$\vec{r}=\left\{a^2\int R\cos t\,dt,\ a^2\int R\sin t\,dt,\ ab\int R\,dt\right\}$$

$$\vec{r}=\left\{ab\int \varrho\cos t\,dt,\ ab\int \varrho\sin t\,dt,\ b^2\int \varrho\,dt\right\}.$$

U specijalnom slučaju za $R=\dfrac{1}{a\cos t}$ dobijamo: $\vec{r}=\Big\{at,\ -a\ln\cos t,$

$\pm\sqrt{1-a^2}\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{t}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\Big\}$. 4° $\vec{r}=R\displaystyle\int \vec{t}\,ds$ gde je $\vec{t}$ proizvoljan jedinični vektor a s luk

krive koju određuje radijus vektor $\vec{t}$.

1664. 1° $\vec{r}=\displaystyle\int \varrho\left(\vec{\beta}\times\frac{d\vec{\beta}}{dt}\right)dt$ gde je $\vec{\beta}=\vec{\beta}(t)$ jedinični vektor indikatrise binormala.

2° Zavojnica. 3° $\vec{r}=\varrho\displaystyle\int\left(\vec{\beta}\times\frac{d\vec{\beta}}{dt}\right)dt$ gde je $\vec{\beta}$ proizvoljan jedinični vektor.

1665. $f(x)=ax^{n-1}+bx$, a i b proizvoljne konstante.

1667. 1° Eliminacijom parametara u i v iz jednačina $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=\sqrt{a^2-u^2}$ dobijamo jednačinu $x^2+y^2+z^2=a^2\ (z>0)$. Prema tome površ je gornja polusfera poluprečnika a. 2° Kako je $\dfrac{y}{x}=\operatorname{tg}v$ to su koordinatne krive $v=c$ veliki polukrugovi po kojima ravni $y=\operatorname{tg}cx$ seku polusferu. Zovu se meridijani. $u=c$ su krugovi na polusferi na rastojanju $z=\sqrt{a^2-c^2}$ od ravni xOy. Zovu se paralele. 3° u je rastojanje tačke (u,v) na polusferi od z-ose a v je njena geografska dužina.

1668. 1° $x^2+y^2+z^2=1$ (sfera). 2° $v=c$ — meridijani, $u=c$ — paralele. 3° u i v su geografske koordinate.

1669. 1° $u=\text{const}$ su krugovi čiji su centri na z-osi. Površ je, prema tome, rotaciona. Nastaje rotacijom krive $z=f(x)$, $y=0$ oko z-ose. 2° $z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$. 3° Ako je osa konusa z-osa, a vrh koordinatni početak, tada je njegova jednačina $x^2+y^2=z^2\operatorname{tg}^2\alpha$.

1671. $\vec{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ \sqrt{r^2-(R-u)^2}\}$.

1674. $ax\cos v_0+ay\sin v_0-z=0$ — tangentne ravni, $\dfrac{x-x_0}{\cos v_0}=\dfrac{y-y_0}{\sin v_0}=a(z-z_0)$ — normala površi.

1682. $(\sqrt{x^2+y^2}-r)^2+z^2=R^2$. 1683. $(x+y+z)^2+4(mx+ny+lz)=0$.

1684. 1° $(xy-z)^2-4(x^2-y)(y^2-xz)=0$. 2° $\vec{r}=\{u,\ u^2,\ u^3\}$. 1685. $z=xy$.

1686. $27(x-a)(y-b)(z-c)=-v$ gde je v data zapremina a a, b i c ivice paralelepipeda.

1687. 1° $p=c\pm t^2/2$ ($c=\text{const}$). 2° $\vec{r}=\left\{c\mp\dfrac{t^2}{2},\ -\dfrac{t^3}{6}\mp ct\mp t\right\}$.

3° $9(xz-y)^2-4z^6=0$. 4° $8(x-c)^3=9y^2$.

1688. 1° Projekcija krive na ravan xOy je spirala $\varrho=\dfrac{\varphi}{k}$. Osim toga ona je na paraboloidu $2z=x^2+y^2$. 2° $s=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+(1+k^2)t^2}+\dfrac{1}{2\sqrt{1+k^2}}\ln\left(\sqrt{1+k^2}\,t+\sqrt{1+(1+k^2)t^2}\right)$.

1689. 2° Koordinatne krive $u=\text{const}$.

1690. Prva kvadratna metrička forma površi $z=f(x,y)$ je $ds^2=(1+p^2)dx^2+2pq\,dx\,dy+(1+q^2)dy^2$. Upoređujući je sa datom metričkom formom dobijamo jednačine

$$1+p^2=\frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2},\quad pq=\frac{xy}{x^2+y^2},\quad 1+q^2=\frac{x^2+2y^2}{x^2+y^2},$$

odakle je

$$p=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad q=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\quad \text{ili}\quad p=-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad q=-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

pa je

$$dz=\pm\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\pm\frac{d(x^2+y^2)}{2\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Odavde se dobija $z=c^2\pm\sqrt{x^2+y^2}$. Koristeći ostale uslove određuje se konstanta c tako da se konačno dobija

$$z=\sqrt{x^2+y^2}\quad \text{ili}\quad z=2-\sqrt{x^2+y^2}.$$

1691. $g(u)=ku$. 1692. 1° $v=e^{c\pm u}$. 2° $\vec{r}=\{e^{\pm u}\cos u,\ e^{\pm u}\sin u,\ \sqrt{2}\,e^{\pm u}\}$.

1693. U okolini tačke (0, 0, 0) površ se nalazi sa jedne strane.

1694. Glavni pravci su određeni jednačinom $1+y^2-(1+x^2)m^2=0$ i jednačinom površi.

$$R_1=[xy+\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}]\sqrt{1+x^2+y^2},\quad R_2=[xy-\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}]\sqrt{1+x^2+y^2}.$$

1695. $\left(\pm a\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},\ 0,\ \pm c\sqrt{\dfrac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\right)$ gde važe sve kombinacije znakova.

1697. $x=\pm y=\pm z=a,\ -x=\pm y=\pm z=a$.

1699. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right)=-\dfrac{uv}{(1+u^2+v^2)^{3/2}},\quad \dfrac{1}{R_1R_2}=\dfrac{-1}{(1+u^2+v^2)^2}$.

1700. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right)=0,\quad \dfrac{1}{R_1R_1}=-\dfrac{1}{9}$.

1701. Srednja krivina: $k_s=\dfrac{4ab}{\sqrt{g^3}}(a^2-b^2+uv)$, Gaussova krivina: $K_g=-\dfrac{4a^2b^2}{g^2}$ gde je

$$g=4a^2b^2+a^2(u-v)^2+b^2(u+v)^2.$$

1702. $K_s=0,\ K_g=-\left(\dfrac{a\sec au\sec av}{1+\operatorname{tg}^2 au+\operatorname{tg}^2 av}\right)^2$. 1703. $\vec{r}=\left\{u\cos v,\ u\sin v,\ c_1\operatorname{arcch}\dfrac{u}{2}+c_2\right\}$.

1704. $E=(\vec{a}+\cos u\,\vec{b})^2,\ F=\vec{a}\cdot\vec{c}+\cos u\,\vec{b}\cdot\vec{c},\ G=(\vec{c})^2$.

Koordinatne krive su ortogonalne u slučaju kada je $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$.

1705. $E=(\vec{a}+2u\vec{b}+v\vec{c})^2,\ F=(\vec{a}+2u\vec{b}+v\vec{c})\cdot(2v\vec{a}+\vec{b}+u\vec{c}),\ G=(2v\vec{a}+\vec{b}+u\vec{c})^2$,

$$d\vec{\sigma}=(1-4uv)\,\vec{a}\times\vec{b}+(2u^2-v)(\vec{b}\times\vec{c})+(2v^2-u)(\vec{c}\times\vec{a}).$$

1706. $E=1+\psi'^2,\ F=0,\ G=\psi^2,\ L=-\dfrac{\psi''}{\sqrt{1+\psi'^2}},\ M=0,\ N=\dfrac{\psi}{\sqrt{1+\psi'^2}}$.

Glavni pravci: $u=\text{const}$ i $v=\text{const}$. Glavne krivine:

$$K_1=-\frac{\psi''}{(1+\psi'^2)^{3/2}},\quad K_2=\frac{1}{\psi(1+\psi'^2)^{1/2}}.$$

1707. Rešenje diferencijalne jednačine $1+\psi'^2-\psi\psi''=0$.

Za $u=z$ ova jednačina daje krivu $x=\varphi(z)=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}}+e^{-\frac{z}{a}}\right)$ $(a=\text{const})$ koja rotacijom opisuje minimalnu površ, koja se u ovom slučaju zove katenoid.

1708. 1° $K_g^*=\dfrac{K_g}{1-aK_s+a^2K_g}$. 2° $K_s^*=\dfrac{K_s-2aK_g}{1-aK_s+a^2K_g}$. **1710.** $-\varrho''/\varrho$.

1711. 1° $-\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}$; 2° $-\dfrac{1}{2\lambda}\left(\dfrac{\partial^2\ln\lambda}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2\ln\lambda}{\partial v^2}\right)$; 3° $-\dfrac{1}{F}\dfrac{\partial^2\ln F}{\partial u\,\partial v}$.

1712. 1° $\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$, $(0,0,a)$, $(0,0,-a)$; 2° $c_1:\vec{r}_1=\{a\cos^2u,\ a\sin u\cos u,\ a\sin u\}$

$c_2:\vec{r}_2=\{a\sin u\cos u,\ a\sin^2u,\ a\cos u\}$. $\dfrac{d\vec{r}_1}{du}=\{-a\sin 2u,\ a\cos 2u,\ a\cos u\}$

$$\frac{d\vec{r}_2}{du}=\{a\cos 2u,\ a\sin 2u,\ -a\sin u\}.$$

U tački $u=\frac{\pi}{4}$ imamo: $\dfrac{d\vec{r}}{du}=\left\{-a,\ 0,\ \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right\}$, $\dfrac{d\vec{r}_2}{du}=\left\{0,\ a,\ -\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right\}$.

$$\cos\alpha=\frac{\left(\frac{d\vec{r}_2}{du}\cdot\frac{d\vec{r}_1}{du}\right)}{\left|\frac{d\vec{r}_1}{du}\right|\left|\frac{d\vec{r}_2}{du}\right|}=-\frac{1}{3}.$$

U tačkama $(0,0,a)$ i $(0,0,-a)$ seku se pod pravim uglom.

1713. 1° $u=\pm 1/\sqrt{1+a^2}$, $v=\pm 1/\sqrt{1+a^2}$. Treba uzeti ili samo + ili samo −.

2° $\theta=\dfrac{\sin 4\varphi}{4\sqrt{2}\sqrt{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}\sqrt{1+\sin^2 2\varphi}}$ gde je $\operatorname{tg}\varphi=a$. 3° $a\in\{0,1,-1\}$.

1715. $2u+v=a$, $u=\operatorname{tg}(b-v)$ $(a,b=\text{const})$.

1716. $v=au+c_1$, $v=a\sqrt{2}\operatorname{tg}(u\sqrt{2}+c_2)$ $(c_1,c_2=\text{const})$. **1717.** $\varphi=\operatorname{tg}\theta+c$ $(c=\text{const})$.

1720. $u\pm\ln\operatorname{tg}\frac{v}{2}=c$. **1721.** $\sqrt{2}\ln(u+\sqrt{u^2+1})\pm v=c$.

1722. $v^2-u^2=c$ $(c=\text{const})$ **1723.** $\vec{r}=\{c\cos v,\ c\sin v,\ av\}$.

1724. Diferencijalna jednačina projekcije linija krivina površi $z=f(x,y)$ na xOy ravan je

$$\begin{vmatrix} y'^2 & -y' & 1\\ 1+p^2 & pq & 1+q^2\\ r & s & t\end{vmatrix}=0.$$

U našem slučaju je

$$\begin{vmatrix} y'^2 & -y' & 1\\ 1+4x^2 & 4xy & 1+4y^2\\ 2 & 0 & 2\end{vmatrix}=0$$

odakle je $y=c_1x$ i $x^2+y^2=c_2$.

1725. Rešenje diferencijalne jednačine $\dfrac{du}{dv}=\pm\sqrt{u^2+a^2}$. **1726.** $u=c_1$, $v=c_2$.

1727. Rešenja diferencijalne jednačine $4a^2b\,uv\,du^2+(a-b+4ab^2v^2-4a^2bu^2)\,du\,dv-4ab^2uv\,dv^2=0$.

1728. $c_1:\vec{r}\{u,\ cu,\ f(c)\}$, $c_2:\vec{r}=\{cf'(v),\ cv^2f'(v),\ f(v)\}$.

1729. $u=ce^{v\sqrt{2}}$ i $u=ce^{-u\sqrt{2}}$.

1730. $v=c$ i $u=\dfrac{c\sqrt{\operatorname{ch}v}-\sqrt{\operatorname{sh}v}}{c\sqrt{\operatorname{ch}v}+\sqrt{\operatorname{sh}v}}$. **1731.** $u+v=c$, $u-v=c$. **1732.** $\varrho=\dfrac{c}{1\pm\cos\varphi}$.

1733. $y=cx^a$, $y=cx^b$ gde je $a=\dfrac{-m+\sqrt{mn(m+n-1)}}{n(n-1)}$, $b=\dfrac{-m-\sqrt{mn(m+n-1)}}{n(n-1)}$.

1735. Asimptotske linije su $(l_1):\vec{r}=\left\{c_1e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\cos t,\ c_1e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\sin t,\ \frac{1}{c_1}e^{-\frac{t}{2}}\right\}$,

(l_2): $\vec{r}=\left\{c_2e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}}\cos t,\ c_2e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}}\sin t,\ \frac{1}{c^2}e^{\frac{t}{2}}\right\}$. Za (l_1) je $T=-\dfrac{c_1\sqrt{2}\,e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}}{1+c_1^4e^{\frac{4t}{\sqrt{2}}}}$.

1736. 1° $z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$. 2° Tačke koje pripadaju i cilindru $x^2+y^2=\sqrt[3]{2}$.

4° Projekcija asimptotskih linija se nalazi iz jednačina $y'=\dfrac{4xy\pm\sqrt{3}(x^2+y^2)}{3y^2-x^2}$.

1737. $\varphi(v)=c_1v+1-c_1$. **1738.** 1° $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}-1=0$ – eliptički hiperboloid. 2° $a^2=b^2$.

3° $v=\operatorname{tg}\left(c\pm\frac{u}{2}\right)$.

1741. $v=\displaystyle\int\frac{c_1\,du}{\sqrt{(u^2+a^2)(u^2+a^2-c_1^2)}}+c_2$. **1742.** $\dfrac{c_1}{u}=\sin\dfrac{c_2\pm v}{\sqrt{2}}$.

Glava VII

1745. 1° $\frac{\partial f}{\partial x^i}\partial x^i$; 2° $\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^m}\frac{dx^m}{dt}$ 3° $x^i x^i$; 4° $g_{pq}dx^p dx^q$; 5° $g^{2i}g_{ii}(N=4)$; 6° a^{p2r}_{pr} $(N=2)$.

1746. 1° $\sum_{i=1}^{3}\left(g_{j1}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^r}\frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^s}+g_{j2}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^r}\frac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^s}+g_{j3}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^r}\frac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^s}\right)=$

$$=g_{11}\frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^r}\frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^s}+g_{12}\frac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^r}\frac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^s}+g_{13}\frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^r}\frac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^s}+g_{21}\frac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^r}\frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^s}+g_{22}\frac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^r}\frac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^s}+$$

$$+g_{23}\frac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^r}\frac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^s}+g_{31}\frac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^r}\frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^s}+g_{32}\frac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^r}\frac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^s}+g_{33}\frac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^r}\frac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^s};$$

2° $\frac{\partial}{\partial x^1}(\sqrt{g}A^1)+\frac{\partial}{\partial x^2}(\sqrt{g}A^2)+\frac{\partial}{\partial x^3}(\sqrt{g}A^3)$;

3° $A^{11}B^p_1C_1+A^{21}B^p_1C_2+A^{12}B^p_2C_1+A^{22}B^p_2C_2$.

1747. Elementi δ_{ij} su elementi jednačine matrice $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\cdots 0\\ 0 & 1 & 0\cdots 0\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0\cdots 1\end{bmatrix}$.

1748. Kako je po definiciji $e_{ijk}=-e_{jik}=-e_{kij}=-e_{ikj}$ to je

$$e_{123}=1=-e_{213}=-e_{312}=-e_{132} \text{ tj. } e_{213}=e_{312}=e_{132}=-1.$$

Isto tako je $e_{iik}=-e_{iik}$ i $e_{ijj}=-e_{ijj}$ pa je

$$e_{111}=e_{112}=e_{121}=e_{122}=e_{113}=e_{131}=e_{133}=e_{211}=e_{221}=e_{212}=e_{222}=$$
$$=e_{233}=e_{323}=e_{332}=e_{311}=e_{322}=e_{313}=e_{331}=e_{323}=e_{332}=e_{333}=0.$$

Takođe je $e_{123}=e_{231}=e_{321}=1$.

1749. $k+1$. 1750. $\binom{n+k-1}{k}$. 1758. $\Phi=\frac{1}{2}(a_{ij}+a_{ji})u^iu^j=b_{ij}u^iu^j$.

1766. Komponente su 0 ako su dva ili više gornjih (ili donjih) indeksa jednaki; komponente su 1 ako su ijk i lmn istovremeno parne ili neparne permutacije od 123; i komponente su -1 ako su gornji indeksi parna a donji neparna permutacija od 123 ili obrnuto.

1786. 1° $\overline{A}^p_{qp}=A^l_{jk}\frac{\partial \overline{x}^p}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^q}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^r}$; 2° $\overline{B}^{pq}_{rst}=B^{mn}_{ijk}\frac{\partial \overline{x}^p}{\partial x^m}\frac{\partial \overline{x}^q}{\partial x^n}\frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^r}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^s}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^t}$;

3° $\overline{C}^{pqr}_s=c^{ijk}_m\frac{\partial \overline{x}^p}{\partial x^i}\frac{\partial \overline{x}^q}{\partial x^j}\frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^k}\frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^m}$.

1787. 1° Iz $\overline{x}^i=\overline{x}^i(x^1, x^2, \ldots x^N)$ sledi $d\overline{x}^i=\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k}dx^k$ pa je to kontravarijantni tenzor prvog reda; 2° kovarijantni tenzor prvog reda.

1788. Iz $\overline{A}_j=\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^j}A^p$ sledi da je $\frac{\partial \overline{A}_j}{\partial \overline{x}^k}=\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^k}\frac{\partial A_p}{\partial x^q}+\frac{\partial^2 x^p}{\partial \overline{x}^k\partial \overline{x}^j}A_p$.

1791. Brzina fluida u nekoj tački ima komponente $\frac{dx^k}{dt}$ u koordinatnom sistemu $\overline{x}^j$. U koordinatnom sistemu $\overline{x}^j$ je $\frac{d\overline{x}^j}{dt}$. Tada je $\frac{d\overline{x}^j}{dt}=\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt}$.

1800. Iz $\overline{A}^{jk}_l=\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^l}A^{pq}_r$ i $\overline{B}^{jk}_l=\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^l}B^{pq}_r$

sledi

$$\overline{A}^{ij}_l\pm\overline{B}^{ij}_l=\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^l}(A^{pr}_r\pm B^{pq}_r).$$

1801. Iz $\overline{A}^{jk}_l=\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^l}A^{pq}_r$ i $\overline{B}^m_n=\frac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^s}\frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^n}B^s_t$

sledi

$$\overline{A}^{jk}_l\overline{B}^m_n=\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^l}\frac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^s}\frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^n}A^{pq}_r\, B^s_t$$

što pokazuje da je $A^{pq}_r B^s_t$ tenzor.

1802. 1° Trećeg reda; 2° prvog reda.

1803. Proizvod je tenzor $A^p B_q$. Pri transformaciji on prelazi u $\overline{A}^i\overline{B}_j=\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j}A^p B_q$.

Ako se ovde stavi $i=j$ dobiće se $\overline{A}^i\overline{B}_i=\delta^q_p A^p B_q$ što znači da je $A^p B_q$ invarijanta ili tenzor nultog reda.

1804. Tri i jedan respektivno. 1809. Jeste.

1822. Na osnovu zadataka 1791 sledi da je g_{ij} simetričan sistem. Iz $\overline{g}_{ij}d\overline{x}^i d\overline{x}^j=g_{pq}dx^p dx^q$ sledi da je $\overline{g}_{ij}=g_{pq}\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j}$ što znači da je g_{ij} tenzor drugog reda.

1823. 1° Ako su x^1 i x^2 afine koordinate tačke u datom sistemu onda se svaka tačka može predstaviti vektorom $\vec{r}=\vec{r}_0+x^1\vec{e}_1+x^2\vec{e}_2$. Tada je $g_{ik}=\vec{e}_i\cdot\vec{e}_k$ tj. $g_{11}=e_1^2$, $g_{12}=g_{21}=e_1e_2\cos\omega$, $g_{22}=e_2^2$.

$$ds^2=e_1^2(dx^1)^2+2e_1e_2\,dx^1\,dx^2+e_2^2(dx^2)^2.$$

Ako su koordinate Descartesove pravougle, tada je $e_1=e_2=1$ i $\omega=\dfrac{\pi}{2}$ pa je $ds^2=(dx^1)^2+(dx^2)^2$. 2° Neka su date tačke $M(x^1,x^2)$ i $M'(\bar{x}^1,\bar{x}^2)$. Tada je

$$\overline{MM'}=d=e_1^2(\bar{x}^1-x^1)^2+2e_1e_2\cos\omega\,(\bar{x}^1-x^1)(\bar{x}^2-x^2)+e_2^2(\bar{x}^2-x^2)^2.$$

$3°\ s=\int\sqrt{1+2\cos\omega\,y'+y'^2}\,dx.$

1824. $\vec{e}_1{}'=(\cos\psi\cos\varphi-\sin\varphi\sin\psi\cos\theta)\vec{e}_1+(\cos\varphi\sin\psi+\sin\varphi\cos\psi\cos\theta)\vec{e}_2+$

$+\sin\varphi\sin\theta\,\vec{e}_3;\quad \vec{e}_2{}'=(-\cos\psi\sin\varphi-\sin\psi\cos\varphi\cos\theta)\vec{e}_1+(\cos\varphi\cos\psi\cos\theta-$

$-\sin\varphi\sin\psi)\vec{e}_2+\sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_3;\quad \vec{e}_3{}'=\sin\psi\sin\theta\,\vec{e}_1-\cos\psi\sin\theta\,\vec{e}_2+\cos\theta\,\vec{e}_3.$

1827. Ako je $x^1=\varrho$, $x^2=\varphi$, $x^3=z$ tada je $g_{11}=1$, $g_{22}=\varrho^2$, $g_{33}=1$, $g_{12}=g_{21}=g_{23}=g_{32}=g_{13}=g_{31}=0$; $ds^2=(d\varrho)^2+\varrho^2(d\varphi)^2+(dz)^2$.

1828. Ako je $x_1{}'=r$, $x^2=\theta$, $x^3=\varphi$ tada je

$$g_{11}=1,\ g_{22}=r^2,\ g_{33}=r^2\sin^2\theta,\ g_{ij}=0\qquad (i\neq j).$$

1829. $g_{11}=g_{22}=u^2+v^2$, $g_{33}=1$, $g_{ij}=0$ za $i\neq j$.

$$g^{11}=g^{22}=\frac{1}{u^2+v^2},\ g^{33}=1,\ g^{ij}=0 \text{ za } i\neq j.$$

1830. $g_{11}=g_{22}=a^2(\operatorname{sh}^2u+\sin^2v)$, $g_{33}=1$, $g_{ij}=0$ $(i\neq j)$, $g^{11}=g^{22}=\dfrac{1}{g_{11}}$, $g^{33}=g_{33}$.

1833. $g=6$; $g^{11}=\dfrac{4}{3}$; $g^{22}=\dfrac{1}{2}$, $g^{33}=g^{13}=g^{31}=1$.

Ostale komponente su jednake nuli. **1837.** $A^p/\sqrt{A^pA_p}$.

1842. Iz $A_j=g_{jk}A^k$ sledi $g^{jq}A_j=g^{jq}g_{jk}A^k=\delta_k^qA^k=A^q$.

1845. 1° $A^{jkl}=g^{ip}g^{kq}g^{lr}A_{pqr}$ ili $A_{pqr}=g_{ip}g_{kq}g_{lr}A^{jkl}$;

2° $A_{l\cdot j}^{\cdot k}=g_{jq}g_{lr}A^{qkr}$ ili $A^{qkr}=g^{jq}g^{lr}A_{j\cdot r}^{\cdot k}$;

3° $A_{\cdot q\cdot\cdot t}^{\cdot rs\cdot}=g^{pj}g^{rk}g_{tl}A_{jqk}^{\cdot\cdot\cdot sl}$ ili $A_{jqk}^{\cdot\cdot\cdot sl}=g_{pj}g_{rk}g^{tl}A_{\cdot q\cdot\cdot t}^{p\cdot rs\cdot}$.

1848. Tačne su.

1850. 1° $[pq,r]=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{pr}}{\partial x^q}+\dfrac{\partial g_{qr}}{\partial x^p}-\dfrac{\partial g_{pq}}{\partial x^r}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{qr}}{\partial x^p}+\dfrac{\partial g_{pr}}{\partial x^q}-\dfrac{\partial g_{pq}}{\partial x^r}\right)=[qp,r]$;

2° $\left\{{s\atop pq}\right\}=g^{sr}[pq,r]=g^{sr}[qp,r]=\left\{{s\atop qp}\right\}$; 3° $g_{ks}\left\{{s\atop pq}\right\}=g_{ks}g^{sr}[pq,r]=$

$=\delta_k^r[pq,r]=[pq,k]$ ili $[pq,k]=g_{ks}\left\{{s\atop pq}\right\}$.

1851. 1° $[pm,q]+[qm,p]=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{pq}}{\partial x^m}+\dfrac{\partial g_{mq}}{\partial x^p}-\dfrac{\partial g_{pm}}{\partial x^q}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{qp}}{\partial x^m}+\dfrac{\partial g_{mp}}{\partial x^q}-\dfrac{\partial g_{qm}}{\partial x^p}\right)=\dfrac{\partial g_{pq}}{\partial x^m}$;

2° Iz $\dfrac{\partial}{\partial x^m}(g^{jk}g_{ij})=\dfrac{\partial}{\partial x^m}(\delta_i^k)=0$ sledi $g^{jk}\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}+\dfrac{\partial g^{jk}}{\partial x^m}g_{ij}=0$

ili $g_{ij}\dfrac{\partial g^{jk}}{\partial x^m}=-g^{jk}\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}$. Množenjem ove jednakosti sa g^{ir} dobijamo $\delta_j^r\dfrac{\partial g^{jk}}{\partial x^m}=$

$$=-g^{ir}g^{jk}([im,j]+[jm,i])\ \text{ili}\ \frac{\partial g^{rk}}{\partial x^m}=-g^{ir}\left\{{k\atop im}\right\}-g^{jk}\left\{{r\atop jm}\right\};$$

3° Pođimo od jednakosti $g=g_{jk}G^{jk}$ gde se sabiranje vrši samo po k.

Sledi $\dfrac{\partial g}{\partial g_{jr}}=G^{jr}$ i $\dfrac{\partial g}{\partial x^m}=\dfrac{\partial g}{\partial g_{jr}}\dfrac{\partial g_{jr}}{\partial x^m}=G^{jr}\dfrac{\partial g_{jr}}{\partial x^m}=gg^{jr}\dfrac{\partial g_{jr}}{\partial x^m}=$

$$=gg^{jr}([jm,r]+[rm,j])=g\left(\left\{{j\atop jm}\right\}+\left\{{r\atop rm}\right\}\right)=2g\left\{{j\atop jm}\right\}.$$

Sada iz $\dfrac{\partial g}{\partial g_{jr}}=2g\left\{{j\atop jm}\right\}$ sledi $\dfrac{1}{2g}\dfrac{\partial g}{\partial g_{jr}}=\left\{{j\atop jm}\right\}$ ili $\left\{{j\atop jm}\right\}=\dfrac{\partial(\ln\sqrt{g})}{\partial x^m}$.

1855. 1° $[pq,r]=0$; 2° $[22,1]=\varrho$, $[12,2]=[21,2]=\varrho$. Ostale su nule. 3° $[22,1]=-r$, $[33,1]=-r\sin^2\theta$, $[33,2]=-r^2\sin\theta\cos\theta$, $[21,2]=[12,2]=r$, $[31,3]=[13,3]=r^2\sin^2\theta$, $[32,3]=[23,3]=r^2\sin\theta\cos\theta$. Ostale su jednake nuli.

1856. 1° $\left\{{p\atop qr}\right\}=0$; 2° $\left\{{1\atop 22}\right\}=-\varrho$; $\left\{{2\atop 21}\right\}=\left\{{2\atop 12}\right\}=\dfrac{1}{\varrho}$.

Ostale su jednake nuli. 3° $\left\{{1\atop 22}\right\}=-r$, $\left\{{2\atop 21}\right\}=\left\{{2\atop 12}\right\}=\dfrac{1}{r}$, $\left\{{1\atop 33}\right\}=-r\sin^2\theta$,

$$\left\{{2\atop 33}\right\}=-\sin\theta\cos\theta,\ \left\{{3\atop 31}\right\}=\left\{{3\atop 13}\right\}=\frac{1}{r},\ \left\{{3\atop 32}\right\}=\left\{{3\atop 23}\right\}=\operatorname{ctg}\theta.$$

Ostale su jednake nuli.

1857. $\left\{{1\atop 11}\right\}=\dfrac{\operatorname{sh}u\operatorname{ch}u}{\operatorname{sh}^2u+\operatorname{sh}^2v}$, $\left\{{2\atop 22}\right\}=\dfrac{\sin v\cos v}{\operatorname{sh}^2u+\operatorname{sh}^2v}$, $\left\{{1\atop 22}\right\}=-\left\{{1\atop 11}\right\}$,

$$\left\{{2\atop 11}\right\}=-\left\{{2\atop 22}\right\},\ \left\{{1\atop 21}\right\}=\left\{{1\atop 12}\right\}=\left\{{2\atop 22}\right\},\ \left\{{2\atop 21}\right\}=\left\{{2\atop 12}\right\}=\left\{{1\atop 11}\right\}.$$

Ostale su jednake nuli.

1858. $\left\{ {1 \atop 22} \right\} = -x^1, \quad \left\{ {2 \atop 12} \right\} = \left\{ {2 \atop 21} \right\} = \frac{x^1}{(x^1)^2-(x^2)^2}, \quad \left\{ {2 \atop 22} \right\} = \frac{x^2}{(x^2)^2-(x^1)^2}.$

Ostale su jednake nuli.

1868. Sve su jednake nuli.

1875. 1° $A_{jk,q} = \frac{\partial A_{jk}}{\partial x^q} - \left\{ {s \atop jq} \right\} A_{sk} - \left\{ {s \atop kq} \right\} A_{js};$

2° $A^{jk}_{,q} = \frac{\partial A^{jk}}{\partial x^q} + \left\{ {j \atop qs} \right\} A^{sk} + \left\{ {k \atop qs} \right\} A^{js};$

3° $A^j_{k,q} = \frac{\partial A_k^j}{\partial x^q} - \left\{ {s \atop kq} \right\} A^j_s + \left\{ {j \atop qs} \right\} A^s_k;$

4° $A^j_{kl,q} = \frac{\partial A^j_{kl}}{\partial x^q} - \left\{ {s \atop kq} \right\} A^j_{sl} - \left\{ {s \atop lq} \right\} A^j_{ks} + \left\{ {j \atop qs} \right\} A^s_{kl};$

5° $A^{jkl}_{mn,q} = \frac{\partial A^{jkl}_{mn}}{\partial x^q} - \left\{ {s \atop mq} \right\} A^{jkl}_{sn} - \left\{ {s \atop nq} \right\} A^{jkl}_{ms} + \left\{ {j \atop qs} \right\} A^{skl}_{mn} + \left\{ {k \atop qs} \right\} A^{jsl}_{mn} + \left\{ {l \atop qs} \right\} A^{jks}_{mn}.$

1887. 1° $x^1 = \varrho,\ x^2 = \varphi,\ x^3 = z.\ A_\varrho = A^1,\ A_\varphi = \varrho A^2,\ A_z = A^3.$

$$\operatorname{div} A^p = \frac{1}{\varrho}\left[\frac{\partial(\varrho A_\varrho)}{\partial \varrho} + \frac{\partial (A_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial (\varrho A_z)}{\partial z}\right].$$

2° $x^1 = r,\ x^2 = \theta,\ x^3 = \varphi.\ A_r = A^1,\ A_\theta = rA^2,\ A_\varphi = r\sin\theta\, A^3.$

$$\operatorname{div} A^p = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(A_\varphi)}{\partial\varphi}.$$

1888. 1° $\nabla^2 \Phi = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial\Phi}{\partial\varrho}\right) + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}.$

$$2°\quad \nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}\, g^{kr}\frac{\partial\Phi}{\partial x^r}\right).$$

1894. $\int\limits_c A_p \frac{dx^p}{ds} ds = -\iint\limits_S \sqrt{g}\, e^{pqr} A_{q,r}\, \nu_p\, dS$ gde je $\frac{dx^p}{ds}$ jedinični vektor tangente zatvorene

krive c a ν^p je jedinični vektor pozitivne normale površi S koju ograničava kriva c.

1895. 1° $\frac{d^2\varrho}{ds^2} - \varrho\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0,\quad \frac{d^2\varphi}{ds^2} + \frac{2}{\varrho}\frac{d\varrho}{ds}\frac{d\varphi}{ds} = 0,\quad \frac{d^2 z}{ds^2} = 0;$

2° $\frac{d^2 r}{ds^2} - r\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 - r\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds} - \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\varphi}{ds} + 2\operatorname{ctg}\theta\frac{d\theta}{ds}\frac{d\varphi}{ds} = 0.$$

1904. $\cos\theta = \frac{p_1 p_2}{\sqrt{(1+p_1^2)(1+p_2^2)}}$ gde je $p_\alpha = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$.

1905. $\cos\theta = \frac{g^{ij} p_{1i} p_{2j}}{\sqrt{g^{ij} p_{1i} p_{1j}}\ \sqrt{g^{ij} p_{2i} p_{2j}}}.$

1907. Za $u^2 =$ const: $\frac{g_{1i}\, du^i}{\sqrt{g_{11}}\ \sqrt{g_{ik}\, du^i du^k}} = \cos\theta \qquad (\theta = \text{const})$

Za $u^1 =$ const: $\frac{g_{2i}\, du^i}{\sqrt{g_{22}}\ \sqrt{g_{ij}\, du^i du^j}} = \cos\theta.$

1908. $g_{11}(du^1)^2 - g_{22}(du^2)^2 = 0.$

1909. $a^2 \sin\omega\cos\omega\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial(u^2)^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial(u^1)^2}\right).$

1911. $\frac{1}{a^2}.$

1914. $g_{11}R - g_{12}G + g_{22}P = 0.$

1918. Fizičke komponente brzine su: $\sqrt{g_{11}}\frac{dx^1}{dt} = \frac{d\varrho}{dt},\quad \sqrt{g_{22}}\frac{dx^2}{dt^2} = \varrho\frac{d\varphi}{dt},\quad \sqrt{g_{33}}\frac{dx^3}{dt} = \frac{dz}{dt}$

Fizičke komponente ubrzanja su $\ddot\varrho - \varrho\dot\varphi^2,\ \varrho\ddot\varphi + 2\dot\varrho\dot\varphi,\ \ddot z.$

1919. 1° $B^k_{,k} = 0$; 2° $D^k_{,k} = 4\pi\varrho$; 3° $\sqrt{g}\, e^{jkq} E_{k,q} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B^j}{\partial t}$; 4° $\sqrt{g}\, e^{jkq} H_{k,q} = -\frac{4\pi I^j}{c}.$

c

Glava VIII

1922. $y'=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2-1}}$. **1923.** $y=e^{\frac{xy'}{y}}$. **1924.** $y^2+y'^2=1$.

1925. $x^2y'-xy=yy'$. **1926.** $2\,x\,yy'-y^2=2\,x^3$. **1927.** $y'^3=4\,y\,(xy'-2\,y)$.

1928. $y'=\cos\dfrac{x\sqrt{1-y'^2}}{y}$. **1929.** $y=\pm\sqrt{x^2+c}$.

1930. $y=1+\dfrac{(x+c)^2}{4}$, singularni integral je $y=1$. **1931.** $\dfrac{y^2}{2}=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+c$.

1932. $y=\sin(c\pm x)$, singularni integral je $y=\pm 1$.

1933. $y+x=\ln c\,(1+x)\,(1+y)$. **1934.** $xy=c;\ x^2+y^2=c$.

1935. $\arcsin x+\arcsin y=c$. **1936.** $\sqrt{1-y^2}+\sqrt{1-x^2}=c$.

1937. $s^2=\dfrac{t^2+ct-1}{t}$. **1938.** $y=x-\dfrac{1}{x+c}$. **1939.** $x+c=\operatorname{ctg} x\left(\dfrac{y-x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

1940. $ax+by+c=\sqrt{\dfrac{a}{b}}\operatorname{tg}(c+x\sqrt{ab}.)$

1941. Opšte rešenje je $y=ce^{\sqrt{x}}$ a partikularno $y=e^{\sqrt{x}-2}$.

1942. Opšti integral je $e^y-1=ce^{-x}$ a partikularni $e^y-1=e^{-x}$.

1943. $\ln y=c\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ a partikularni integral $y=\pm 1$.

1944. $x=a;\ y=a\operatorname{tg}\sqrt{\dfrac{a-x}{x}}$. **1945.** $y-a=\dfrac{(1-a^2)\,x}{ax+1}$.

1946. $y=\operatorname{arc\,tg}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)+2\,\pi$. **1947.** 2.

1948. Pošto je koeficijenat pravca tangente y' a radijus vektora $\dfrac{y}{x}$ to je, prema uslovu zadatka,

$$y'=3\frac{y}{x}\Rightarrow\frac{dy}{y}=3\frac{dx}{x}\Rightarrow y=cx^3;\ y=\frac{1}{3}x^3.$$

1949. $y=ce^{\frac{x}{a}}$. **1950.** $(c\pm x)\,y=2\,a^2$. **1951.** $y=cx;\ y=\dfrac{c}{x}$.

1952. Treba rešiti jednačinu $\dfrac{dm}{dt}=-km$ gde je m masa a $k>0$ koeficijenat proporcionalnosti dobija se $m=m_0\,e^{-kt}$.

1953. 1° $v=\dfrac{gm}{k}\left(1-e^{-\frac{kt}{m}}\right)$, $s=\dfrac{gm}{k}\,t-\dfrac{gm^2}{k^2}\left(1-e^{-\frac{kt}{m}}\right)$;

2° $v=\sqrt{\dfrac{g}{k}}\operatorname{tg}\left(t\dfrac{\sqrt{gk}}{m}\right)$; $s=\dfrac{m}{k}\ln\operatorname{ch}\left(t\dfrac{\sqrt{gk}}{m}\right)$.

1954. Diferencijalna jednačina kretanja je

$$m\frac{dv}{dt}=-kv\Rightarrow v=ce^{-\frac{k}{m}t};\quad v\approx 1{,}28\text{ km/čas.}$$

1955. Odgovarajuća diferencijalna jednačina je

$$y'(t)=0{,}6-0{,}2\,y\,(t)\Rightarrow y\,(t)=3-ce^{-0{,}2t}.$$

Iz početnih uslova

$$y\,(0)=0\Rightarrow c=3\ \text{ i }\ y\,(t)=3-3\,e^{-0{,}2t}$$

za $t=5$ u sudu će biti

$$y\,(5)=3-3\,e^{-0{,}2\cdot 5}=3-3\,e^{-1}\approx 1{,}9\text{ kg soli.}$$

1956. Ako se jednačina reši po y' biće $y'=\dfrac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$. Stavljajući $\dfrac{y}{x}=u$ dobija se

$y'=u'\,x+u$ pa data jednačina postaje $u'\,x+u=u+\sqrt{1+u^2}\Rightarrow\dfrac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\dfrac{dx}{x}$

ili $\ln(u+\sqrt{1+u^2})=\ln cx\Rightarrow u+\sqrt{1+u^2}=cx$.

Konačno će biti $\dfrac{y}{x}+\sqrt{1+\dfrac{y^2}{x^2}}=cx$ ili $y+\sqrt{x^2+y^2}=cx^2$.

1957. $s^2=2\,t^2\ln\dfrac{c}{t}$. **1958.** $x^2-y^2=cx$. **1959.** $y=\pm x\sqrt{2\ln|cx|}$.

1960. $\ln|cx|=-e^{-\frac{y}{x}}$. **1961.** $y=x(e^{cx}+1)$. **1962.** $\sin\dfrac{y}{x}=cx$.

1963. $x\ln|cx|=2\sqrt{xy};\ y=0$. **1964.** $\ln\dfrac{x+y}{x}=cx$.

1965. $\ln cx = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{y}{x}\right)$; $y = xe^{2k\pi}$, $k = 0, \pm 1; \pm 2, \ldots$ 1966. $x + ye^{\frac{x}{y}} = c.$

1967. Kako su $x=1$ i $y=2$ koreni jednačina $x-y+1=0$ i $x+y-3=0$ treba staviti $x = X+1$

i $y = Y+2$, $\Rightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{X-Y}{X+Y} \Rightarrow x^2+2xy-y^2+2x+6y = c.$

1968. $(y-2x)^3 = c(y-x-1)^2$; $y = x+1$. 1969. $2x+y-1 = ce^{2y-x}$.

1970. $(y-x+2)^2+2x = c$. 1971. $(y+2)^2 = c(x+y-1)$; $y = 1-x$.

1972. $y+2 = ce^{-2\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-3}}$. 1973. $\ln\frac{y+x}{x+3} = 1+\frac{c}{x+y}$.

1974. Data jednačina, nakon zamene, prelazi u jednačinu $2mx^4z^{2m-1}$, $z+z^{4m} = 4x^6$.

Ova jednačina biće homogena u slučaju kada je stepen svih njenih članova isti, tj

$$4+(2m-1) = 4m = 6.$$

Ova jednačina je zadovoljena ako je $m = \frac{3}{2}$. Tako se dobija jednačina

$$3x^4z^2z'+z^6 = 4x^6 \Rightarrow z'+\frac{1}{3}\left(\frac{z}{x}\right)^4 = \frac{4}{3}\left(\frac{x}{z}\right)^2.$$

Ako se stavi $\frac{z}{x} = u \Rightarrow z' = u'x+u$ pa je onda $u'x+u+\frac{1}{3}u^4 = \frac{4}{3}\frac{1}{u^2}$, $\Rightarrow u'x =$

$$= \frac{4-u^6-3u^3}{3u^2} \quad \text{odnosno} \quad \frac{u^2\,du}{4-u^6-3u^3} = \frac{dx}{3x}.$$

Ako se stavi $u^3 = t \Rightarrow u^2du = \frac{1}{3}\,dt$ pa je $\frac{dt}{4-t^2-3t} = \frac{dx}{x}$, ili $\int\frac{dt}{t^2+3t-4} = \ln\frac{c}{x}$.

Konačno, nakon integracije dobija se

$$\frac{1}{5}\ln\frac{x^3-y^2}{4x^3-y^2} = \ln\frac{c}{x} \quad \text{ili} \quad \frac{x^3-y^2}{4x^3+y^2} = \sqrt[5]{\frac{c}{x}}.$$

1975. $\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha} = 1$. 1976. $x^2+y^2 = cx$. 1977. $x^2+y^2 = cy$. 1978. $x^2 = 1-2y$.

1979. Koeficijent pravca prave OM je $k_1 = \frac{y}{x}$ a prave QN je $k_2 = -\frac{y}{yy'+x}$. Prema uslovu zadatka mora biti

$k_1k_2 = -1$ odnosno $\frac{y}{x}\cdot\frac{y}{yy'+x} = 1$ ili $y'+\frac{x}{y} = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x\sqrt{\ln\frac{c}{x^2}}$ a partikularni integral je $y = x\sqrt{\ln\frac{4}{x^2}}$.

1980. $f(t) \neq t$, $f(\infty) = f(-\infty) \neq \infty$, $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{[tf(t)+1]\,dt}{[f(t)-t](t^2+1)} = 0$. Preći na polarne koordinate.

1981. Ako se stavi $y = uv \Rightarrow y' = u'v+v'u$ pa je $u'v+v'u+uv = -x$ ili (1) $(v'+v)u+u'v = -x$. Kada se koeficijent uz u izjednači sa nulom dobija se jednačina $v'+v = 0 \Rightarrow v = e^{-x}$. Zamenom zadnje vrednosti u jednačini (1) dobija se $u' = -xe^x \Rightarrow u = -(x-1)e^x+c$. S obzirom na uvedenu smenu definitivno će biti $y = 1-x+ce^{-x}$.

1982. $y = (x+c)e^x$. 1983. $y = \dfrac{c-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4}{1+x}$.

1984. $y = ce^{-\sin x}+\sin x-1$. 1985. $y = \frac{(x+1)^4}{2}+c(x+1)$.

1986. $s = t^3(\ln t-1)+ct^2$. 1987. $y+xe^{-y} = c$. 1988. $x = y\ln y+\frac{c}{y}$.

1989. $y = x+\sqrt{1-x^2}$. 1990. $y = \frac{x}{x+1}(x+\ln x-3)$

1991. $x^2+y^2-2y = ce^{-x}$. 1992. $y^2 = c(x+1)^2-2(x+1)$.

1993. $e^{-y} = cx^2+x$. 1994. $3e^{-2y} = ce^{-2x}-2e^x$.

1995. $\operatorname{tg}\frac{y}{2} = ce^{-x}-x+1$. 1996. $\cos y = (x^2-1)\ln c(x^2-1)$.

1997. $y = 2e^x-1$. 1998. $y = -2e^x$. 1999. Odgovarajuća diferencijalna jednačina je

$$x'-\frac{1}{y}x = 1 \Rightarrow x = y\ln cy.$$

2000. Problem se svodi na rešavanje linearne jednačine

$$y' = \frac{y^2}{xy-2a^2} \Rightarrow x = cy+\frac{a^2}{y}.$$

2001. Problem se svodi na diferencijalnu jednačinu

$$x^2y'-2xy+2a^2 = 0 \Rightarrow y = cx^2+\frac{2}{3}a^2$$

Jednačina tražene krive je

$$y = \frac{1}{3a}x^2+\frac{2}{3}\frac{a^2}{x}.$$

2002. $i = \frac{U}{R}+i_0+\left(i_0-\frac{U}{R}\right)e^{-\frac{Rt}{L}}$.

2003. Problem se svodi na diferencijalnu jednačinu

$$R\frac{dq}{dt} = E-\frac{q}{c}, \Rightarrow q = cE-c_1e^{-\frac{t}{cR}}.$$

Kako je za $t=0$ i $q=0$ $\Rightarrow c_1 = cE$ pa je konačno

$$q = cE\left(1-e^{-\frac{t}{cR}}\right).$$

2004. Diferencijalna jednačina preseca $L\frac{di}{dt}+Ri=a\sin kt$ gde je $k=\frac{2\pi}{T}$, $\Rightarrow$ opšte rešenje

$$i=ce^{-\frac{Rt}{L}}+\frac{aR}{k^2L^2+R^2}\sin kt-\frac{akL}{k^2L^2+R^2}\cos kt.$$

Ako se konstanta c odredi iz početnih uslova dobija se $c=\frac{akL}{k^2L^2+R^2}$, pa je konačno

$$i=\frac{a}{k^2L^2+R^2}\left(kLe^{-\frac{Rt}{L}}+R\sin kt-kl\cos kt\right).$$

2005. $y=\operatorname{tg}x-\sec x$; 2006. $x(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{s-t}f(s)\,ds$; $|x(t)|\leqslant M$.

2007. $y(x)=-\int_{0}^{\infty}\sin(x+s)\,e^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}\sin s\cdot\cos(s+2x)}ds.$

2008. $y(x)=x\int_{+\infty}^{x}e^{x^2-t^2}\,dt\to-\frac{1}{2}$ kada $x\to+\infty$.

2009. Ako se stavi $y=uv\Rightarrow y'=u'v+v'u$ zamenom u jednačini dobija se

$$(1)\ u'v+v'u+2xuv=2x^3u^3v^3$$

$$\text{ili } (v'+2xv)u+u'v=2x^3u^3v^3.$$

Uzimajući da je

$$v'+2xv=0\Rightarrow v=e^{-x^2}.$$

Zamenom u (1) dobija se $u'e^{-x^2}=2x^3u^3e^{-3x^2}$ ili

$$\frac{du}{u^3}=2x^3e^{-2x^2}\Rightarrow-\frac{1}{2u^2}=2\int x^3e^{-2x^2}\,dx.$$

Nakon integracije i vraćanja na prvobitnu funkciju konačno se dobija

$$y^2+2x^2y^2+cy^2e^{2x^2}=2.$$

2010. $y=\frac{1}{(1+x)\,[c+\ln|1+x|]}$. 2011. $ny^n=ce^{-\frac{n}{a}}+nx-a.$

2012. $y(1+\ln x+cx)=1.$ 2013. $y(x+c)=\frac{1}{\cos x}.$

2014. $y=\frac{c+\ln|\cos x|}{x}+\operatorname{tg}x.$ 2015. $y=\frac{x^4}{4}\ln|cx|.$

2016. $y^2=ce^{-\frac{2a}{x}}-\frac{b}{a}.$ 2017. $y=\frac{\varphi(x)}{x+c}.$ 2018. $x^2=y^2(c-y^2).$

2019. $x^2(c-\cos y)=y$; $y=0.$ 2020. $xy(c-\ln^2 y)=1.$

2021. Problem se svodi na jednačinu

$$y'+\frac{1}{2}y=\frac{1}{2y},\quad\Rightarrow y^2=1+ce^{-x};\ y^2=1-e^{-x}$$

2022. $y^2-2cx^2-2ax+a^2=0.$ 2023. 1° $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$; 2° $\frac{a}{x^2}+\frac{b}{y^2}=1.$

2024. $\frac{r-k}{r}=\frac{(r_0-k)\varphi}{r_0\varphi_0}.$ 2025. Ako se stavi $y=\cos x+\frac{1}{z}\Rightarrow y'=-\sin x-\frac{z'}{z^2}.$

Tako se dobija linearna jednačina $z'+\frac{1-2\cos^2 x}{1-\sin x\cos x}z=\frac{\cos x}{1-\sin x\cos x}$

Integraleći ovu jednačinu a zatim vraćanjem na funkciju y konačno se dobija da je

$$y=\frac{\cos x+c}{1+c\sin x}$$

2026. 1° $a=-1$, $y_1=-x^2$; $y=\frac{1-cx^2}{c-x}$ 2° $y_1=\alpha x+\alpha^2$, $y_2=\alpha^2x+\alpha$, $y_3=x+1$ gde je

$$\alpha=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};\quad y=\frac{1-cx^2}{c-x}.$$

2027. $d=1$, $c=\pm a$. 2028. $y=\frac{1}{cx-x\ln x}-\frac{1}{x}.$

2029. $y=\frac{2x^3-c}{x(c+x^3)}.$ 2030. $y=\frac{2}{x}+\frac{4}{x\ln x+cx}.$ 2031. $y(x^4+cx)=4x^3+c.$

2032. Ako se stavi $y-x^2=u$ dobija se jednačina $u'+u^2-1=0\Rightarrow\frac{du}{1-u^2}=dx$

ili

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}=x+\ln c\Rightarrow\frac{1+u}{1-u}=ce^{2x}.$$

ili

$$1+y-x^2=c\,(1-y+x^2)\,e^{2x}$$

2033. Ako se stavi $y=\frac{1}{z}$ dobija se homogena jednačina

$$z'+b\left(\frac{z}{x}\right)^2=a\Rightarrow\quad\frac{(m-n)xy-1}{(m+n)xy+1}=\left(\frac{c}{x}\right)^{2b^2m}$$

gde je

$$n=\frac{1}{2b},\qquad m=\frac{\sqrt{4ab+1}}{2b}.$$

2034. $y=\frac{4cx^4-2}{x+cx^5}.$

2035. Kako je $\sin y\,dx+x\cos y\,dy=0\Rightarrow\int_0^x\sin y\,dx+\int_0^y 0\cos y\,dy=c$, odnosno $x\sin y=c$.

Inače jednačina se može rešiti razdvajanjem promenljivih.

2036. $\int_1^x \left(4-\frac{y^2}{x^2}\right) dx + 2\int_0^y y\,dy = c_1 \Rightarrow \left(4x+\frac{y^2}{x}\right)\Big|_1^x + y^2 = c_1$, ili definitivno $4x+\frac{y^2}{x}=c$.

Inače jednačina je takođe homogena.

2037. $\frac{x^4}{4}+\frac{3}{2}x^2y^2+\frac{y^4}{4}=c$. 2038. $\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=c$.

2039. $x^4-x^2y^2+y^4=c$. 2040. $x^2+\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}=c$.

2041. $xe^y-y^2=c$. 2042. $x^y=c$.

2043. $d\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=-d\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}+\frac{y}{x}=c$.

2044. $x^2+\frac{2}{3}(x^2-y)^{3/2}=c$. 2045. $x^2+1=2(c-2x)\sin y$.

2046. $\operatorname{tg}(xy)-\cos x-\cos y=c$. 2047. $\sin\frac{y}{x}-\cos\frac{x}{y}+x-\frac{1}{y}=c$.

2048. $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}+x-\frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{6}$.

2049. Opšte rešenje je $x^2y+x-\frac{y^2}{2}=c$. Integralne krive su $x^2y+x-\frac{y^2}{2}=-3$ i $x^2y+x-\frac{y^2}{2}=-17$.

2050. $\dfrac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P}=-\frac{2}{y}$ ili $\dfrac{\frac{\partial \mu}{\partial y}}{\mu}=-\frac{2}{y}$ tj. $\mu=\frac{1}{y^2}$.

Opšti integral je $\frac{x^2}{2}-xy-\frac{1}{y}=c$.

2051. $\lambda=-\frac{1}{x^2}$; $\frac{y}{x}\,\frac{x^{m-1}}{m-1}=c$. 2052. $\mu=e^x$; $ye^x\left(x^2+\frac{y^2}{3}\right)=c$.

2053. Integracioni faktor je oblika

$\mu=\mu(y)$; $x^2+\frac{2x}{y}=c$. 2054. $6x^2y+2y^3-6ax^4-3x^5=cx^3$.

2055. $x^2y-x+y^2+y\ln y=cy$. 2056. $x\sin y+y\cos y-\sin y=ce^{-x}$.

2057. $\mu=\frac{1}{x^2+y^2}$; $\sqrt{x^2+y^2}=ce^{-\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}$. 2058. $\mu=\frac{1}{x^2+y^2}$; $\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}+\ln(x^2+y^2)=c$.

2059. $xy+x+y=c(x+y)(x+y+2)$. 2060. $xy(x^2+y^2)+1=cxy$

2061. $xy-\ln y=c$. 2062. $x^2y^2+2\ln\frac{x}{y}=c$.

2064. $ay\,dx+(ax+b-2y)\,dy=0 \Rightarrow axy-y^2+by=c$.

2069. $y=ce^{\pm x}$. 2070. $y+x=(x+c)^3$; $y=-x$. 2071. $(x+c)^2+y^2=1$; $y=\pm 1$.

2072. $y[1+(x-c)^2]=1$; $y=0$. 2073. $(y-x)^2=2c(x+y)-c^2$; $y=0$.

2074. $(x-1)^{4/3}+y^{4/3}=c$. 2075. $4y=(x+c)^2$; $y=ce^x$.

2076. $y^2(1-y)=(x+c)^2$; $y=1$. 2077. $xy'^2=y(2y'-1)=0$.

2078. $y'^2-2yy'=y^2(e^x-1)$. 2079. $yy'(yy'-2x)=x^2-2y^2$.

2080. $y^2=c^2x+c$; $=4xy^2+1=0$ 2081. $y=cx^2+\frac{1}{c}$.

2082. $\left(y-\frac{x^2}{2}-c\right)(y+x-1-ce^{-x})=0$. 2083. $y=\frac{x^2}{2}+c$; $y=ce^x$.

2084. $\ln|1\pm 2\sqrt{2y-x}|=2(x+c\pm\sqrt{2y-x})$.

2085. Jednačina može da se napiše u obliku $(y'-x^2)(y'-xy)(y'-y^2)=0 \Rightarrow y'=x^2, y'=xy, y'=y^2$ čiji su opšti integrali $y=\frac{x^3}{3}+c$, $y=ce^{\frac{x^2}{2}}$, $y=\frac{1}{c-x}$ pa je opšti integral polazne jednačine

$$\left(y-\frac{x^3}{3}-c\right)\left(y-ce^{\frac{x^2}{2}}\right)\left(y-\frac{1}{c-x}\right)=0.$$

2086. $4e^{-\frac{y}{3}}=(x+2)^{4/3}+c$. 2087. $y=ce^{\pm x}-x^2$.

2088. Ako se stavi $y'=p$ dobija se opšti integral jednačine u parametarskom obliku

$$x=\frac{1+p}{p^3},\quad y=\frac{3+4p}{2p^2}+c.$$

2089. Opšti integral jednačine u parametarskom obliku je

$$y=p^5+p^3+p+5,\quad x=\frac{5}{4}p^4+\frac{3}{2}p^2+\ln|p|+c \text{ gde je } p=y'.$$

2090. $x=p^3-p-1$, $y=\frac{3}{4}p^4-\frac{1}{2}p+c$, $p=y'$.

2091. Ako se stavi $y'=p=tx$ biće $x=\frac{3t}{1+t^3}$, $p=\frac{3t^2}{1+t^3}$. Pa kako je $dy=p\,dx=$ $=\frac{9t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)(1+t^3)^2}dt$, to je opšti integral:

$$x=\frac{3t}{1+t^3},\quad y=\frac{9}{2(1+t^3)^2}+\frac{6}{1+t^3}+c.$$

2092. $x=\frac{c}{2}\,\frac{1-p^2}{p^2}$, $y=\frac{c}{p}$, $p=y'$. Staviti $y=ux$.

2093. $x^2+(y-c)^2=1$. Staviti $y'=\operatorname{tg} t$.

2094. Ako se stavi $y'=\operatorname{ch} t$ dobija se $y=\operatorname{ch} t$ i $x=t+c$, pa je otuda $y=\operatorname{ch}(x-c)$.

2095. Ako se stavi $y'=p$ pa tako dobijena jednačina diferencira imaaćemo

$$p\,dx=2\,p\,dp-p\,dx-x\,dp+x\,dx,$$

gde je $dy=p\,dx$. Dalje je

$$\frac{dp}{dx}=\frac{2p-x}{2p-x}\Rightarrow p=x+c$$

ili nakon zamene u jednačini biće

$$y=(x+c)^2-c\,(x+c)\,x+\frac{x^2}{2}\Rightarrow y=\frac{x^2}{2}+cx+c^2.$$

2096. Kako je $x=\dfrac{p^2}{4y}+\dfrac{2y}{p}$, gde je $p=y'$ biće nakon diferenciranja

$$\frac{dy}{p}=\left(\frac{p}{2y}-\frac{2y}{p^2}\right)dp+\left(\frac{2}{p}-\frac{p^2}{4y^2}\right)dy$$

ili

$$\frac{p^3-4y^2}{4y^2p}\,dy=\frac{p^3-4y^2}{2yp^2}\,dp\Rightarrow\frac{dy}{2y}=\frac{dp}{p}\text{ tj. } p=cy^{1/2}.$$

Prema tome opšti integral date jednačine biće

$$c^3y^{3/2}-4\,c\,xy^{3/2}+8\,y^2=0.$$

2097. $x=\pm\left(\ln\left|\dfrac{1-\sqrt{1-p}}{1+\sqrt{1-p}}\right|+3\sqrt{1-p}\right)+c,\ y=\pm p\sqrt{1-p},\ y=0.$

2098. $pxy=y^2+p^3,\ y^2(2p+c)\,p^4,\ y=0.$

2099. $y^2=2\,cx-c\ln c,\ 2\,x=1+2\ln|y|.$ 2100. $cx=\ln cy,\ y=cx.$

2101. Ako se uzme da je $y'=p$ i diferencira data jednačina dobija se

$$p\,dx=2\,p\,dx+(2x-2p)\,dp$$

ili

$$\frac{dx}{dp}+\frac{2}{p}x-2=0\Rightarrow x=\frac{1}{p^2}\left(c+\frac{2}{3}p^3\right)=\frac{c}{p^2}+\frac{2}{3}p$$

pa je otuda

$y=\dfrac{2c}{p}+\dfrac{p^2}{3}$ tj. opšti integral u parametarskom obliku biće $x=\dfrac{c}{p^2}+\dfrac{2}{3}p$ i $y=$
$=\dfrac{2c}{p}+\dfrac{p^2}{3}$. Može se pokazati da jednačina nema singularnih rešenja. ? $y=0$

2102. $x=\dfrac{c}{p^2}+\dfrac{3}{4}p^2,\ y=2\,xp-p^3.$

2103. $x=ce^{-p}-2p+2,\ y=(ce^{-p}-2p+2)(1+p)+p^2.$

2104. $x=\dfrac{p}{\sqrt{1-p^2}}(c+a\arcsin p),\ y=\dfrac{c+a\arcsin p}{\sqrt{1-p^2}}-ap.$

2105. $y=-\dfrac{x^2}{4}-cx+c^2.$ 2106. $x=\dfrac{c}{\sqrt{1+p^2}\,(p+\sqrt{p^2+1})^{1/a}},$

$$y=\frac{c}{\sqrt{1+p^2}\,(p+\sqrt{p^2+1})^{1/a}}\,(p+a\sqrt{1+a^2}).$$

2107. $y=x-\dfrac{4}{27}.$ 2108. $xy'^2-2\,yy'-x=0\Rightarrow 2\,cy+1=c^2x^2.$

2109. Opšti integral je $y=cx+c-c^2$, a singularni $4\,y=(x+1)^2$.

2110. Opšti integral je $y=cx+\sqrt{1+c^2}$, a singularni $x^2+y^2=1$.

2111. Opšti integral je $y=cx+\dfrac{a}{c}$, a singularni $y^2=4\,ax$.

2112. Opšti integral $y=cx+\sqrt{a^2-b^2c^2}$, a singularni $by=a\sqrt{x^2+b^2}$.

2113. $y=xy'+\dfrac{ay'}{y'-1}$; opšti integral je $y=xc+\dfrac{ac}{c-1}$, a singularni $(y-x-a)^2=4\,ax$ što predstavlja jednačinu tražene krive.

2114. $y=xy'\pm\sqrt{x^2y'^2-x^2y^2-4\,k^2y'};\ y=-\dfrac{3\,k^2}{x}.$

2115. $y=xy'+\dfrac{a}{2}(\sqrt{1+y'^2}-y');\ \Rightarrow x^2+y^2-ax=0.$ 2116. $y=0.$

2117. $y=x-\dfrac{4}{27}.$ 2118. $x^2+2\,y^2=c^2.$ 2119. $y=ce^{-\frac{x}{p}}.$

2120. $(x^2+y^2)^2=c\,(y^2+2\,x^2).$ 2121. $(x^2+y^2)^2=cxy$. Uvesti polarne koordinate.

2122. $r=c\,(1-\cos\varphi).$ 2123. $r=ce^{-\varphi^2+\frac{2\varphi^3}{3\pi}}.$ 2124. $2\,y^2-1=c\,(2\,x^2+1).$

2125. $r^{-n}=a^{-n}\cos n\varphi+b^{-n}\sin n\varphi.$

2126. $x=-c\sin\varphi-\dfrac{p}{2}\sin\varphi\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\varphi}{2}\right).$

2127. $x\operatorname{ch} t=c+a\,(t\operatorname{ch} t-\operatorname{sh} t);\ y\operatorname{ch} t=c\operatorname{sh} t+a.$

2128. $x=2\,a\,(t\sin t-\cos t)+(at^2+c)\cos t;\ y=2\,a\,(\sin t+t\cos t)-(at^2+c)\sin t.$

2129. Logaritamske spirale $r=ce^{\varphi\operatorname{ctg}\alpha}$. 2130. $r=c\,[1+\cos(\varphi\pm2\,\alpha)].$

2131. $r^2\cos(2\,\varphi\pm\alpha)=c.$

2132. $x=ce^{\varphi}(\sin\varphi+\cos\varphi)-a\sqrt{2}\sin\varphi;\ y=ce^{\varphi}(\sin\varphi-\cos\varphi)+a\sqrt{2}\cos\varphi.$

§ 2.

2133. Ako se stavi $y^2=u \Rightarrow y'=\frac{u'}{2y}$ pa je otuda $u'=\frac{2x+3u+1}{3x+4u+1}$. Ako se dalje izvrši smena $U=u+1$ i $X=x-1$ dobija se homogena jednačina $\frac{dU}{dX}=\frac{2+\frac{U}{X}}{3+\frac{U}{X}}$, koja se dalje lako rešava.

2134. $y=\frac{\sin(\operatorname{arc\,tg} x)+1}{\sqrt{1+x^2}}$. 2135. $\ln(x^2+y^2+6x+4y+13)+\operatorname{arc\,tg}\frac{y+2}{x+3}+c=0.$

2136. $2\ln(3x+6y-1)-3(x-y)=c.$ 2137. $x^2=y-\frac{1}{2}+ce^{-2y}.$

2138. $y=f(x)-1+ce^{-f(x)}.$

2139. Smenom $y=ux$ dobija se jednačina totalnog diferencijala

$$x(u^2+1)+\left(x^2u+\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\right)u'=0 \Rightarrow \frac{1}{2}x^2(u^2+1)+\arcsin u=c.$$

2140. Integracioni faktor jednačine je $\mu(y)=\frac{1}{\cos^2 y}$ a opšti integral je $x\operatorname{tg} y-x^3=c.$

2141. Integracioni faktor je $\mu(x)=2x$; $x^2y^2-2x^3y-x^4=c.$

2142. $y^2-x^2=ce^{\frac{1}{x}}$. Staviti $u=y^2-x^2$. 2143. $y^2=\frac{2x+c}{\sin^2 x}.$

2144. $\sin x=ce^{4y}-\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{8}y-\frac{1}{32}$. Smatrajući x kao funkciju staviti $u=\sin x$.

2145. $2xy^2-4x+1=ce^{-\frac{y^2}{2}}.$ 2146. Integracioni faktor je $\mu=\frac{1}{x^3y^2}$ a opšti integral

$$xy^2-1=cxy.$$

2147. $\left(\frac{y-c}{x}\right)^7-\left(\frac{y-c}{x}\right)^5+\frac{y-c}{x}+3=0.$

2148. Ako se jednačina napiše u obliku $x(xy'+y)=(xy)^2f(xy)+xy$ onda je očigledno da se ona smenom $t=xy \Rightarrow t'=xy'+y$ svodi na jednačinu koja razdvaja promenljive.

2149. Jednačina se smenom iz prethodnog zadatka svodi na jednačinu koja razdvaja promenljive.

2150. $y=\frac{c+2x^2}{c+x}.$ 2151. $\ln(x^2+y^2)+\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}=c.$

2152. $y^2+\sqrt{x^4+y^4}=c.$ 2153. $px=c\sqrt{p}-1,\ y=\ln p-c\sqrt{p}+1.$

2154. Jednačina može da se napiše u obliku

$$x\,dx+y\,dy=(x^2+y^2+x)\frac{\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

ili

$$\frac{1}{2}d(x^2+y^2)=(x^2+y^2+x)\,d\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right).$$

Prelaskom na polarne koordinate dobija se diferencijalna jednačina

$$\frac{dr}{d\varphi}=r+\cos\varphi \Rightarrow r=ce^{\varphi}+\frac{1}{2}(\sin\varphi-\cos\varphi).$$

Vraćanjem na stare promenljive konačno se dobija

$$\sqrt{x^2+y^2}=ce^{\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}+\frac{1}{2}\frac{y-x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

2155. Jednačina se može napisati u obliku $x(xy'+y)+xy(xy-1)=a(xy-1)$ koja posle smene $t=xy-1$ dobija oblik $xt'+t^2+t=at$; za $a=1$ dobijena jednačina se svodi na

$$\frac{t'}{t^2}=-\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{t}=\ln cx \text{ ili } \frac{1}{xy-1}=\ln cx,$$

tj. $y=\frac{\ln cx+1}{y\ln cx}$ (1) u slučaju $a\neq 1$ jednačina ima oblik $\frac{t'}{t(t+1-a)}=-\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{t}{t+1-a}=$ $=cx^{a-1}$ ili definitivno $y=\frac{1-acx^{a-1}}{x(1-cx^{a-1})}$ (2) jednačine (1) i (2) daju odgovarajuće opšte integrale.

2156. Smenom $y=ux$ dobija se jednačina

$$u'=x(u-1)\sqrt{u^2-1} \Rightarrow (x^2-c)^2=4\frac{y+x}{y-x}.$$

2157. Jednačina može da se napiše u obliku $(x^2-1)\frac{d}{dx}(y-x)+(y-x)^2=0$. Ako se stavi $u=$ $=y-x$ i izvrši integracija dobija se konačno $\frac{1}{y-x}=\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}+c.$

2158. $\ln(u-v)^3\left(u^2+uv+\frac{v^2}{3}\right)^2-2\operatorname{arc\,tg}\frac{2u+v}{v}=c;\ u=\sqrt[3]{y};\ v=\sqrt{x}.$

2159. $xy\cos x-y^2=c.$ 2160. $y^3=(c-x^3)\sin^3 x.$

2161. $(y-x)^2=2c(x+y)-c^2;\ y^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}=c;\ y=0.$ 2162. $\sin\frac{y}{x}=-\ln cx.$

2163. $x\sin(x+y)=c.$ 2164. $\operatorname{tg} y=\frac{x^2+1}{3}+\frac{c}{\sqrt{x^2+1}}.$

2165. $x^2y^2-2xy\ln y=cxy+1$; $a(x^2y^2-2xy\ln y)=(a^2-1)xy+a$.

2166. $\frac{1}{2}x^2-a^2\ln x+y^2=c$; $x^2-2a^2\ln\frac{x}{2a}+2y^2=22a^2$.

2167. $\ln y=\frac{y}{x}+c$; $x\ln y=y-x$. **2168.** $xe^{\frac{y}{x}}=(x+y)\ln cx$.

2169. $x^2(x^2y+\sqrt{1+x^4y^2})=c$. **2170.** $x^2-(x-1)\ln(y+1)-y=c$.

2171. $\sqrt{y^2+1}=x(ce^x-1)$. **2172.** $(y^2-cx^2+1)^2=4(1-c)y^2$; $y=\pm x$.

2173. $e^y(c^2x^2+1)-2c$; $x^2=e^{-2y}$.

2174. $k=1$ i $y_1=\operatorname{tg}x$. Opšti integral je

$$y=\frac{\sin x\left[c+\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]+1}{\cos x\left[c+\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]}.$$

2175. $y_1=-1$, $x(x-y)=c(y+1)$; $A(0,-1)$ $B(-1,-1)$.

2177. 1° $a=1$, $b=0\Rightarrow y=x$. Nakon smene $y=x+\frac{1}{z}$ dobija se jednačina

$$z'+3\frac{x^2}{x^3-1}z+\frac{2x}{x^3-1}=0.$$

Konačno, opšti integral polazne jednačine je

$$y=x+\frac{x^3-1}{c-x^2}\quad\text{ili}\quad y=\frac{cx-1}{c-x^2}.$$

2° Ako se stavi $x=0$ dobija se $c=4$ pa je $y=\frac{1-4x}{x^2-4}$.

2178. Iz $y=\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}\Rightarrow y'=\frac{1-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ odnosno $y'=\frac{1-x}{(1+x^2)(1+x)}y$ što je i trebalo dokazati. Iz dobijene jednačine

$$\Rightarrow\frac{dy}{y}=\frac{1+x^2-x^2-x}{(1+x^2)(1+x)}dx\ \text{ili}\ \ln y=\ln(1+x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\ln c,\ \text{tj.}\ y=c\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

2181. Opšti integral je $4y^2+x^2=cx$. **2187.** $\lambda=\frac{1}{(x+y)^2}$; $\ln(x+y)-\frac{y}{x+y}=c$.

2188. 1° Integralni činilac ima oblik $\mu=\frac{1}{(xy)^2}$. 2° Opšte rešenje jednačine je $y-\frac{1}{yx}=c$, a traženo partikularno rešenje $x=\frac{1}{y^2-2y}$.

2189. 1° Prema uslovu zadatka treba da bude

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\lambda x^2-y^2}{x(x^2+y^2)}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\mu x+2\lambda y}{x^2+y^2}\right]\ \text{tj.}\ -\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\cdot\frac{\lambda x^2-y^2}{x}-\frac{2y}{x(x^2+y^2)}=$$

$$=-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}(\mu x+2\lambda y)+\frac{\mu}{x^2+y^2},\ \Rightarrow\frac{1}{x(x^2+y^2)}[2x^2y(1-\lambda)+\mu xy^2-\mu x^3]=0,$$

pa je uslov zadatka ispunjen za $\lambda=1$ i $\mu=0$.

Treba integraliti jednačinu

$$\frac{x^2-y^2}{x(x^2+y^2)}dx+2\frac{y}{x^2+y^2}dy=0.$$

Njen opšti integral je $\frac{x^2+y^2}{x}=c$. Za $x=a$ i $y=0\Rightarrow c=a$ pa je otuda

$$\varphi(x,y)=\ln\frac{x^2+y^2}{ax}.$$

2190. (1) $\frac{\mu'}{\mu}=\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{2yP+Q}$, pri čemu izraz na desnoj strani mora biti funkcija argumenta $u=y^2-x$. U tom slučaju se integracioni faktor može odrediti iz (1) kvadraturom. U slučaju kada je $P=(2y^2-2x-1)e^x+(2y^2-3x)e^y$, $Q=2ye^x+2x(y^2+y-x)e^y$ dobija se da je

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{2yP+Q}=-\frac{1}{2(y^2-x)},\ \text{tj.}\ \frac{\mu'}{\mu}=-\frac{1}{2(y^2-x)}\Rightarrow\mu=\frac{1}{\sqrt{y^2-x}}.$$

2191. 1° Mora biti $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P-Q}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P-Q}\right)$.

2° $\mu(x+y)=\frac{1}{(x+y+1)^4}$. Opšti integral je $(x+y+1)^3-cxy=0$.

3° $P=\frac{1}{\lambda}\Phi\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\ln\frac{\lambda}{\mu}\right)$; $Q=\frac{1}{\lambda}\Phi\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)[\ln(\lambda\mu)]'$.

2192. Odgovarajuća diferencijalna jednačina je $y'(xy-2a)=y^2$ ili $\frac{dx}{dy}-\frac{x}{y}=-\frac{2a}{y^2}$ čiji opšti integral ove linearne jednačine je $x=y\left(c+\frac{a}{y^2}\right)$ ili $cy^2-xy+a=0$ što predstavlja familiju hiperbola.

2193. Problem se svodi na diferencijalnu jednačinu $a-y=-\frac{1}{y'}(b-x)$ odnosno $(y-a)dy=(b-x)dx\Rightarrow$ opšti integral $x^2+y^2-2(ay+bx)=c$. **2194.** $y=cx^2$.

2195. $y' = \dfrac{k^2x^2-y^2}{2kxy}$. Opšti integral jednačine je $[k^2x^2-(2k+1)y^2]^{\frac{1}{2k+1}}\, x^{\frac{1}{k(2k+1)}} = \dfrac{1}{2c}$.

Samo za $k=-1$. Tada je opšti integral $x^2+y^2-2cx=0$, $(c\neq 0)$.

2196. Parabola $y^2=-16px$ i njene tangente.

2197. Ako se tačka 0 uzme kao koordinatni početak a prava d dovede u takav položaj da joj jednačina bude $x-a=0$ onda su odgovarajuće diferencijalne jednačine respektivne

$$\frac{y-y'x}{\sqrt{1+y'^2}}=a-x \quad \text{i} \quad \frac{y-y'x}{\sqrt{1+y'^2}}=x-a$$

već prema tome da li se tačka M nalazi sa leve ili sa desne strane prave d. Parametarske jednačine integralnih krivih za prvi slučaj su

$$\begin{cases} x=-\dfrac{a}{2}\left(\dfrac{p}{\sqrt{p^2+1}}-\dfrac{p+\sqrt{p^2+1}}{\sqrt{p^2+1}}\ln\dfrac{p+\sqrt{p^2+1}}{c}\right)\\[2ex] y=\dfrac{a}{2}\left(\dfrac{p^2+2}{\sqrt{p^2+1}}+p-\dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}\ln\dfrac{p+\sqrt{p^2+1}}{c}\right)\end{cases}$$

a za drugi

$$x=\frac{a}{2}\left(\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}-\frac{\sqrt{p^2+1}-p}{\sqrt{p^2+1}}\ln\frac{p+\sqrt{p^2+1}}{c}\right)$$

$$y=\frac{a}{2}\left(p-\frac{p^2+2}{\sqrt{p^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\ln\frac{p+\sqrt{p^2+1}}{c}\right)$$

Traženi skup tačaka čine prava $x=a$ i parabola $y^2=-2a\left(x-\dfrac{a}{2}\right)$.

2198. 1° Problem se svodi na rešavanje diferencijalne (Lagrangeove) jednačine

$$y+ay'(ay'-x)=\frac{1}{2}a^2y'^2.$$

za $a=\dfrac{1}{2}$, iz ove jednačine dobijaju se parametarske jednačine krive k

$$(1)\quad \begin{cases} x=u\left(c-\dfrac{1}{2}\ln u\right)\\[2ex] y=\dfrac{u^2}{4}(2c-\ln u)-\dfrac{1}{8}u^2\end{cases}$$

gde je $y'=u$ a c proizvoljna konstanta. Za $a\neq 1$ i $a\neq\dfrac{1}{2}$ parametarske jednačine krive k su

$$\begin{cases} x=u^{\frac{a}{1-a}}\left(c+\dfrac{a^2}{2a-1}u^{\frac{2a-1}{a-1}}\right)\\[2ex] y=\dfrac{au}{2}(2x-au)\end{cases}$$

U slučaju $a=1$ imaćemo Clairautovu jednačinu čiji je opšti integral $y=cx-\dfrac{1}{2}c^2$ a singularni $y=\dfrac{1}{2}x^2$. U ovom slučaju, data kriva i njena tangenta jedino imaju traženu osobinu.

2° Parametarska jednačina tražene koloidne površi biće $x=\alpha(z)$, $\dfrac{Y}{X}x=\beta(z)$, pa je jednačina te koloidne površi $Y\alpha(z)=\beta(z)X$. Kako je prema (1) $\alpha(u)=u\left(c-\dfrac{1}{2}\ln u\right)$, $\beta(u)=\dfrac{u^2}{4}\left(2c-\ln u-\dfrac{1}{2}\right)$, to je ova jednačina konačno

$$4Y\left(c-\frac{1}{2}\ln Z\right)=XZ\left(2c-\frac{1}{2}\ln Z\right).$$

2199. Ako se pređe u polarne koordinate data jednačina ima oblik $r^4-2b^2r^2\cos 2\varphi=a$. Diferencijalna jednačina trajektorija je $r'+r\,\mathrm{ctg}\,2\varphi=\dfrac{r^3}{b^2\sin 2\varphi}$ $\Rightarrow$ jednačina ortogonalnih trajektorija $\left(\dfrac{b}{r}\right)^2=c\sin 2\varphi+\cos 2\varphi$ gde je c proizvoljna konstanta.

2200. 1° $x=-1$; 2° $x^2-y^2+6x+1=0$.

2202. $s=at^2$, gde je a neka određena konstanta.

2203. Problem se svodi na rešavanje diferencijalne jednačine

$$\frac{dx}{dt}=u_0\ln\frac{M_0}{M}+v_0.$$

gde je M promenljiva masa rakete. Ako se pretpostavi da se masa rakete menja po linearnom zakonu $M=M_0(1-\alpha t)$ gde je $\alpha=\text{const}$, $\alpha>0$ onda je, uz očigledne početne uslove,

$$x=\frac{u_0}{\alpha}[(1-\alpha t)\ln(1-\alpha t)+\alpha t]+v_0t.$$

Ako se pretpostavi da se masa rakete menja po eksponencijalnom zakonu $M=M_0e^{-\lambda t}$ gde $\lambda=\text{const}$, $\lambda>0$ onda se dobija

$$x=\frac{u_0\lambda t^2}{2}+v_0t$$

Zakoni mehanike mogu biti korišćeni za određivanje veličina kosmičkih brzina. Odredićemo na pr. samo *prvu kosmičku brzinu* v_1, t.j brzinu potrebnu da se raketa okreće oko zemlje kao njen satelit (sputnjik). Radi toga njena centrifugalna sila mora biti jednaka sili teže, pa je otuda

$$M_k\frac{v_1^2}{r}=M_kg$$

gde je r rastojanje od centra zemlje do sputnjika na orbiti, M_k masa rakete nakon izvesnog vremena $t=t_k$ od početka kretanja a g ubrzanje zemljine teže. Ako se stavi da je r približno jednako poluprečniku zemlje R_z onda je

$$v_1=\sqrt{gr}\approx\sqrt{gR_z}\approx\sqrt{10\cdot 6\,400\,000}=8\ \text{km/sec}.$$

Tačnije $v_1 = 7{,}93$ km/sec. Pri tome treba imati na umu vezu

$$x_k = u_0 \int_0^{t_k} \ln \frac{M_0}{M_k} d\tau + v_0 t_k$$

koja se dobija iz polazne jednačine.

2204. Problem se svodi na jednačinu

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x(R^3-r^3)+ar^3}{y(R^3-r^3)}$$

gde je

$$R^2 = (a-x)^2 + y^2 \quad \text{i} \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

Opšti integral ove jednačine je

$$\frac{1}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = c.$$

2205. $2yy'' = y'^2$. **2206.** $(yy'' + y'^2)^2 = -y^3 y''$. **2207.** $(1 - x\,\mathrm{ctg}\,x)\,y'' - xy + y = 0$.

2208. $y = (x-2)e^x + c_1 x + c_2$. **2209.** $y = \cos x + \frac{c_1}{2}x^2 + c_2 x + c_3$.

2210. $y = \frac{x^3}{6} + Ax + B - \sin x$. **2211.** $y = \frac{x^5}{120} + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$.

2212. $y = \ln \sin x + c_1 + c_2 x + c_3 x^2$.

2213. $y = c_1\left[x\int_0^x e^{t^2}dt - \frac{1}{2}(e^{x^2}-1)\right] + c_2 x + c_3$.

2214. $y = \frac{x^2}{2}\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt - \frac{x+1}{2}e^x + c_1 x^2 \ln|x| + c_2 x^2 + c_3 x + c_4$. **2215.** $y = 2x - \sin 2x$.

2216. $y = c_2 - \ln(x + c_1)$; $y = c$. **2217.** $y = \arcsin^2 x + c_1 \arcsin x + c_2$.

2218. $y = c_1 \sin x - x - \frac{\sin 2x}{2} + c_2$. **2219.** $y = -c_1 e^{-x} - \frac{1}{2}x^2 + x + c_2$.

2220. $y = c_2 - c_1 x + (c_1^2 + 1)\ln(x + c_1)$. **2221.** $9c_1^2(y-c_2)^2 = 4(c_1 x + 1)^3$; $y = \pm x + c$.

2222. $y = c_1(x - e^{-x}) + c_2$. **2223.** $x = c_1 p + 3p^2$; $y = \frac{12}{5}p^5 + \frac{5}{4}c_1 p^4 + c_1^2\frac{p^3}{6} + c_2$; $y = c$.

2224. $y = c_1\frac{x^3}{6} - c_1^3\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$; $y = \pm\frac{8}{315}x^3\sqrt{3x} + c_1 x + c_2$.

2225. $c_1^2 y = (c_1^2 x^2 + 1)\,\mathrm{arc\,tg}\,c_1 x - c_1 x + c_2$; $2y = k\pi x^2 + c$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

2226. $y = c_2 - \ln\left|\cos\left(\frac{x^2}{2} + c_1\right)\right|$. **2227.** $y^3 + c_1 y + c_2 = 3x$; $y = c$.

2228. $y^2 = (c_1 x + c_2)^{-3}$; $y = c$.

2229. $y = \mathrm{arc\,ctg}\,(c_1 x + c_2)$. **2230.** $\ln y = \frac{x + c_1}{x + c_2}$.

2231. $c_1 y = 1 + \mathrm{tg}^2(x + c_2)$. **2232.** $\ln y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$.

2233. $e^y \sin^2(c_1 x + c_2) = 2c_1^2$; $e^y \mathrm{sh}^2(c_1 x + c_2) = 2c_1^2$; $e^y(x + c)^2 = 2$.

2234. $x = 3c_1 p^2 + \ln c_2 p$; $y = 2c_1 p^3 + p$; $y = c$. **2235.** $e^y + c_1 = (x + c_2)^2$.

2236. $\ln y = c_1\,\mathrm{tg}\,(c_1 x + c_2)$; $\ln\left|\frac{\ln y - c_1}{\ln y + c_1}\right| = 2c_1 x + c_2$; $(c - x)\ln y = 1$.

2237. $x = c_2 + c_2 \ln(y + u) + \ln(y - c_1 u)$; $u^2 = y^2 + 1 - c_1^2$. **2238.** $2(c_1 y - 1)^{3/2} = 3c_1 x + c_2$.

2239. Opšti integral je $y = \pm\sqrt{c_1 x + c_2}$. Jednačina tražene krive je $y = \pm\sqrt{2x}$

2240. Nakon odgovarajućih zamena sledi da mora biti

$$4 + (m-2) = 3 + (m-1) = 1 + m + (m-1) = 2m \Rightarrow m = 2.$$

Odavde sledi da je to generalisana homogena jednačina. Stavljajući dalje

$$x = e^t \text{ i } y = ze^{2t} \Rightarrow y' = \frac{\dot y}{\dot x} = \left(\frac{dz}{dt}e^{2t} + 2ze^{2t}\right)e^{-t} = \left(\frac{dz}{dt} + 2z\right)e^t; \quad y'' = \frac{dy'}{dt}e^{-t} =$$

$$= \left[\left(\frac{d^2 t}{dt^2} + 2\frac{dz}{dt}\right)e^t + \left(\frac{dz}{dt} + 2z\right)e^t\right]e^{-t} = \frac{d^2 z}{dt^2} + 3\frac{dz}{dt} + 2z.$$

Na taj način data jednačina dobija oblik

$$z'' + 2z' - 2zz' = 0.$$

Kako dobijena jednačina ne sadrži promenljivu t stavljamo dalje $z' = u \Rightarrow z'' = u'u$ i tako dobijamo jednačinu

$$u'u + 2u - 2zu = 0$$

odnosno $u' = 2z - z$ i druga $u = 0$. Prema tome je

$$z' = z^2 - 2z + c_1 \quad \text{ili} \quad \int \frac{dz}{z^2 - 2z + c_1} = t + c_2.$$

Vodeći računa o prirodi korena jednačine $z^2 - 2z + c_1 = 0$ treba razlikovati sledeće slučajeve:

1) Ako su koreni jednačine realni i različiti biće konačno

$$z = \frac{1 + A_1 - B_1(1 - A_1)e^{2A_1 t}}{1 - B_1 e^{2A_1 t}}.$$

Ako se vratimo na promenljive x i y po formulama $t = \ln x$ i $z = \frac{y}{x^2}$ onda se dobija

opšti integral polazne jednačine u obliku

$$y = \frac{(1 + A_1)x^2 - B_1(1 - A_1)x^{2A_1 + 2}}{1 - B_1 x^{2A_1}}$$

2) Ako su koreni kompleksni dobija se

$$z=1+A_1\,\mathrm{tg}\,[A_1(t+c_2)]\left(-\frac{\pi}{2}<A_1(t+c_2)<\frac{\pi}{2}\right)$$

pa je otuda opšti integral polazne jednačine

$$y=x^2\{1+A_1\,tg\,[A_1\ln(|B_2|\,x)]\}\quad c_2=\ln|B_2|.$$

3) Ako su koreni jednačine višestruki, onda mora biti $c_1=1$ pa je otuda

$$z=1-\frac{1}{t+c_2}.$$

Otuda polazna jednačina ima familiju rešenja $y=x^2\left(1-\frac{1}{\ln x+c_2}\right)$.

Na kraju treba razmotriti i jednačinu $u=0$. Kako je $u=z'\ \Rightarrow z'=0$ odnosno $z=c$. No pošto je $z=\frac{y}{x^2}$ dobija se da je $y=cx^2$ familija rešenja polazne jednačine. Ova rešenja su parcijalna kao i očigledno sva rešenja polazne jednačine.

2241. $k=0$. Opšti integral je $y\ln y+A_1y=\ln x+A_2$. Jednačina $z=0$ daje familiju rešenja $y=-c$ koje se ne sadrže u opštem integralu.

2242. $k=k=k$. Ako se uzme najprostiji slučaj $k=0$ i stavi $x=e^t$ dobija se jednačina $y''+y=0\,[y=y(t)]$. Nakon integracije i vraćanja na polaznu promenljivu dobija se opšti integral polazne jednačine u obliku $y=A_1\sin(\ln x+A_2)$.

2243. $y=c_2e^{c_1x^2}$. 2244. $y=c_2(x+\sqrt{x^2+1})^{c_1}$. 2245. $y=c_2xe^{-\frac{c_1}{x}}$.

2246. $y=c_2x(\ln c_1x)^2$; $y=cx$.

2247. $x^2y=c_1\,\mathrm{tg}\,(c_1\ln c_2x)$, $c_2(x^2y+c_1)\,|x|^{2c_1}=x^2y-c_1$; $x^2y\ln cx=-1$.

2248. $2c_2x^2y=(c_2x-c_1)^2-1$; $xy=\pm1$. 2249. $2c_1c_2y=c_2^2|x|^{2+c_1}+|x|^{2-c_1}$.

2250. $2\ln c_1y=\frac{c_2}{x}+\frac{x}{c_2}$.

2252. $\left(yy'-\frac{y^2}{x}\right)'=0\ \Rightarrow yy'-\frac{y^2}{x^2}=c_1\ \Rightarrow y=A_2x^2+A_1x$. 2253. $y=\frac{A_2}{A_1}e^{A_1x}+A_3$.

2254. $c_1y=\ln|c_1x+c_2|+c_3$; $y=c_1x+c_2$. 2255. $c_1y-1=c_2e^{c_1x}$; $y=c-x$; $y=0$.

2256. $y=\pm\sqrt{c_1x+c_2}+c_3x+c_4$; $y=c_1x^2+c_2x+c_3$.

2257. $y=4c_1\,\mathrm{tg}\,(c_1x^2+c_2)$; $2\ln\left|\frac{y-c_1}{y+c_1}\right|=c_1x^2+c_2$; $y(c-x^2)=4$; $y=c$.

2258. $y''y^3=1\ \Rightarrow c_1y^2=1+(c_1x+c_2)^2$. 2259. $r=\frac{c}{\cos\theta-m}$; $\varphi=c_1+\theta+m\int\frac{d\theta}{\cos\theta-m}$.

2260. 1° $4(c_1y-1)=c_1^2(x+c_2)^2$; 2° $y\sqrt{\frac{c_1}{y}-1}+c_1\arccos\sqrt{\frac{y}{c_1}}=c_2\pm x$.

2261. $y=c_2-k\ln\cos\left(\frac{x}{k}+c_1\right)$.

2262. Kao što je poznato iz mehanike problem se svodi na rešavanje diferencijalne jednačine $\frac{d^2s}{dt^2}=g(\sin\alpha-k\cos\alpha)$. Kako je to jednačina tipa $y''=c\ \Rightarrow$ da je $s=\frac{g}{2}(\sin\alpha-k\cos\alpha)\,t^2+c_1t+c_2$. Konstante se određuju iz početnih uslova: za $t=0\ \Rightarrow s=0$ i $\frac{ds}{dt}=0$, pa se tako dobija da je $c_1=c_2=0$ i konačno $s=\frac{g}{2}(\sin\alpha-k\cos\alpha)\,t^2$. Odavde se lako dobija traženo vreme $t=2{,}4$ sec.

2263. Iz otpornosti materijala je poznato da se ovaj problem svodi na rešavanje diferencijalne jednačine

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{F}{EI}(l-x)$$

gde je x rastojanje preseka grede od pričvršćenog kraja. Dobijena jednačina je oblika $y''=f(x)$ pa se neposrednom integracijom dobija:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F}{EI}\int(l-x)\,d(l-x)=-\frac{F}{EI}\frac{(l-x)^2}{2}+c_1.$$

Opšte rešenje biće $y=\frac{F}{EI}\frac{(l-x)^3}{b}+c_1x+c_2$. Konstante c_1 i c_2 određuju se iz početnih uslova na pričvršćenom kraju $x=0$, $y=0$ i $\frac{dy}{dx}=0$. Tako se dobija $c_1=\frac{Fl}{EI\,2}$, $c_2=-\frac{F}{EI}\frac{b^3}{6}$, pa je opšte rešenje $y=\frac{F}{2EI}\left(lx^2-\frac{x^3}{3}\right)$. Zamenom brojnih vrednosti u zadnjoj jednačini dobija se $h=2{,}3$ cm.

2264. Problem se svodi na diferencijalnu jednačinu $y''=\frac{P}{2EI}\left(\frac{l}{4}-\frac{x^2}{l}\right)$. S obzirom na početne uslove: $x=0$, $y=0$ i $y'=0$ dobija se $y=\frac{P}{48EI}\left(3lx^2-\frac{2x^4}{l}\right)$ i $h=\frac{5}{8}\frac{Pl^3}{48EI}$.

2265. Problem se svodi na rešavanje diferencijalne jednačine

$$y''=\frac{p}{H}\sqrt{1+y'^2}$$

gde je p težina jedinice dužine sajle a H horizontalno naprezanje. Stavljajući u jednačini $y'=p$ dobija se nakon integracije $\ln(p+\sqrt{1+p^2})=\frac{x}{a}+c_1\left(a=\frac{H}{p}\right)$. S obzirom da su početni uslovi $x=0$ i $y'=p=0$ dobija se $c_1=0$ i $\ln(p+\sqrt{1+p^2})=\frac{x}{a}$, odnosno $p+\sqrt{1+p^2}=e^{\frac{x}{a}}$. Podesnim kombinovanjem iz zadnje jednačine dobija se

$$p=y'=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)\Rightarrow y=a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}+c_2.$$

Prilikom rešavanja problema koordinatni početak je izabran tako da sredina (teme) sajie ima koordinate $(0, a)$. Koristeći tu činjenicu dobija se da je $c_1=0$ pa je definitivno $y=a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$.

2267. 1° Ne; 2° da; 3° ne; 4° ne; 5° da.

2268. 1° Funkcije su linearno nezavisne na proizvoljnom intervalu $a<x<b$, pošto je identitet

$$\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 x^2+\cdots+\alpha_{n+1} x^n=0$$

moguć samo ako su svi $\alpha_i=0$. Ako je bar jedan od koeficijenata $\alpha_i \neq 0$, onda leva strana jednakosti može biti polinom najviše stepena n, koji može da ima najviše n različitih korena i otuda on će biti nula u najviše n tačaka razmotrenog intervala; 2° linearno nezavisne za svako $x \in [a, b]$.

2269. Da. **2270.** Ne. **2271.** Da. **2272.** Ne.

2273. 1° $y''+y=0$; 2° $y''-2y'+y=0$; 3° $x^2 y''-2xy'+2y=0$; 4° $y'''-y''=0$.

2274. 1° $y''-y=0$; 2° $x^2 y''-3xy'+3y=0$; 3° $y'''-3y''+4y'-2y=0$.

2275. $y=3x-5x^2+2x^3$. **2276.** $y=\frac{1}{x}(c_1 \sin x+c_2 \cos x)$.

2277. $y=c_1 x+c_2 \ln x$. **2278.** $y=c_1 x+c_2 e^x$.

2279. $y=ce^x+c_1 x^2$. **2280.** $y=c_1 x+c_2 x \ln (x+\sqrt{x^2-1})$.

2281. $y=c_1\left(1+\frac{1}{x}\right)+c_2\left(\frac{x^2}{2}+1-\frac{x+1}{x} \ln |x+1|\right)$. **2282.** $y=A \sin x+B \sin^2 x$.

2283. $y=A \sin^4 x+B \frac{\cos x}{\sin^3 x}\left(\sin^4 x+\frac{3}{5} \sin^2 x \cos^4 x+\frac{1}{7} \cos^6 x\right)$. **2284.** $xy=c_1 e^{-x}+c_2 e^x$.

2285. $y=A(x+\sqrt{x^2+1})^n+B(x-\sqrt{x^2+1})^n$.

2286. $y=c_1 x+c_2 x^{-1}+c_3(x \ln |x|+1)$.

2287. Prethodno određujemo stepen polinoma. Stavljajući $y=x^n+\cdots$ u datu jednačinu i ispisujući samo članove sa najvećim stepenima od x, dobijamo $-2x^2 n(n-1) x^{n-2}+\cdots+4x^n+\cdots=0$. Ako se koeficijent uz x^n izjednači sa nulom biće $-2n(n-1)+4=0 \Rightarrow n^2-n-2=0$.

Koreni ove jednačine su $n_1=2$ i $n_2=-1$. Pošto drugo rešenje ne dolazi u obzir, sledi da polinom može da bude samo drugog stepena. Potražimo ga u obliku $y=ax^2+bx+c$. Zamenom u datoj jednačini dobija se $(4b+4)x+2+2b+4c=0$. Otuda je

$$4b+4=0 \text{ i } 2+2b+4c=0, \Rightarrow b=-1, \ c=0.$$

Znači da je polinom $y=x^2-x$ partikularni integral jednačine.

2288. $y=c_1 x+c_2 e^{-2x}$. **2289.** $y=c_1(x+2)+c_2 e^x(x-2)$.

2290. $y=e^x(c_1 x^2+c_2)$. **2291.** $y=c_1 x+c_2(\ln x+1)$.

2292. $y=c_1(x+1)+c_2 x^{-1}$. **2293.** $y=c_1(x^2+2)+c_2 x^3$.

2294. $y=x^3+c_1 x^2+c_2(2x-1)$.

2295. $y=c_1(x+2)+\frac{c_2}{x}+\left(\frac{x}{2}+1\right) \ln |x|+\frac{3}{2}$. **2296.** $y=\frac{c_1}{x+1}+\frac{c_2}{x-1}+x$.

2297. Opšti integral homogene jednačine $xy''+y'=0$ je $y=c_1 \ln x+c_2$. Otuda možemo uzeti $y_1=\ln x$ i $y_2=1$ pa rešenje polazne jednačine tražiti u obliku

$$y=c_1(x) \ln x+c_2(x).$$

S obzirom da se data jednačina može napisati u obliku $y''+\frac{y'}{x}=x$, dobija se sistem jednačina

$$c_1'(x) \ln x+c_2'(x) \cdot 1=0,$$

$$c_1'(x) \frac{1}{x}+c_2'(x) \cdot 0=x.$$

Otuda je $c_1(x)=\frac{x^3}{3}+A$ i $c_2(x)=-\frac{x^3}{3} \ln+\frac{x^3}{9}+B$ i $y=\frac{x^3}{9}+A \ln x+B$, gde su A i B proizvoljne konstante.

2298. $y=e^x(x \ln |x|+c_1 x+c_2)$. **2299.** $y=1-xe^{-x}+(e^x-e^{-x}) \ln (1-e^{-x})+c_1 e^x+c_2 e^{-x}$.

2300. $y=(c_1+\ln |\sin x|) \sin x+(c_2-x) \cos x$.

2301. $y=\sin 2x \cdot \ln |\cos x|-x \cos 2x+c_1 \sin 2x+c_2 \cos 2x$.

2302. $y=A \cos x+B \sin x-\sqrt{\cos 2x}$. **2303.** $y=-\frac{1}{x}+c_1 e^x+c_2 e^{-x}$.

2304. $y=e^{3x}(A+Bx)+\frac{1}{x}$.

2305. $y=A+B \sin x+C \cos x+\ln |\sec x+\operatorname{tg} x|+\sin x \ln |\cos x|-x \cos x$.

2306. $y=c_1 e^{2x}+c_2 e^x$. **2307.** $y=(c_1 x+c_2) e^x$. **2308.** $y=e^x(A \cos x+B \sin x)$.

2309. $y=e^{-x}(A \cos x\sqrt{2}+B \sin x\sqrt{2})$. **2310.** $y=A \cos 2x+B \sin 2x$.

2311. $y=ce^{2x}+e^{-x}(A \cos x\sqrt{3}+B \sin x\sqrt{3})$.

2312. $y=ce^{-x}+e^{\frac{x}{2}}\left(A \cos \frac{x}{2}\sqrt{3}+B \sin \frac{x}{2}\sqrt{3}\right)$.

2313. $y=c_1 e^x+c_2 e^{-x}+c_3 e^{2x}+c_4 e^{-2x}$. **2314.** $y=c_1 e^x+c_2 e^{-x}+c_3 \cos x+c_4 \sin x$.

2315. $y=c_1 e^x+c_2 e^{-x}+c_3 e^{2x}+c_4 e^{-2x}$.

2316. $y=e^{\frac{3}{2}x}\left(c \cos \frac{x\sqrt{7}}{2}+c_1 \sin \frac{x\sqrt{7}}{2}\right)+e^{-x}(c_2 \cos x\sqrt{2}+c_3 x\sqrt{2})$.

2317. $y=c_1+c_2 e^x+c_3 e^{-x}+c_4 e^{3x}+c_5 e^{-3x}$. **2318.** $y=c_1+(c_2+xc_3 x) \cos 2x+(c_4+c_5 x) \sin 2x$.

2319. $y=c+c_1 x+c_2 x^2+c_3 x^3+e^{-x}(c_4+c_5 x+c_6 x^2)$. **2320.** $y=1-\sin x-\cos x$.

2321. $y=2x-\pi+\pi \cos x+c \sin x$, gde je c proizvoljno.

2322. $y=2+e^{-x}$. **2323.** $y=e^{-x} \sin x$.

2324. $y = \dfrac{b\,[(\operatorname{ch} al + \cos al)\,(\operatorname{sh} ax - \sin ax) - (\operatorname{sh} al + \sin al)\,(\operatorname{ch} ax - \cos ax)]}{2a^3\,(1 + \operatorname{sh} al \cos al)}$.

2325. $x = e^{\lambda t}$. Koreni karakteristične jednačine $m\lambda^2 + r\lambda + k = 0$ su

$$\lambda_1 = -\frac{r}{2m} + \frac{1}{2m}\sqrt{r^2 - 4mk}, \quad \lambda_2 = -\frac{r}{2m} - \frac{1}{2m}\sqrt{r^2 - 4mk}.$$

Potrebno je razlikovati tri slučaja: 1° za $r^2 - 4mk > 0$, koreni λ_1 i λ_2 su realni i različiti pa je opšti integral $x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$; 2° za $r^2 - 4mk = 0$, koreni λ_1 i λ_2 su realni i jednaki pa je opšti integral $x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_2 t}$; 3° za $r^2 - 4mk < 0$, koreni su kompleksno konjugovani pa je opšte rešenje $x = (c_1 \cos \nu t + c_2 \sin \nu t)\, e^{-\frac{rt}{2m}}$ gde je $\nu = \dfrac{\sqrt{4mk - r^2}}{2m}$. Ove oscilacije zovu se prigušene harmonijske oscilacije.

2326. Problem se svodi na jednačinu

$$\ddot{x} + w^2 x = 0 \Rightarrow x = A \cos wt + B \sin wt;\ x = \cos wt.$$

2327. Problem se svodi na diferencijalnu jednačinu $\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} + k^2\varphi = 0$ gde je φ ugao odstupanja klatna od vertikalnog položaja, računat u smeru suprotnom od smera kretanja kazaljke na časovniku. Opšti integral jednačine je $\varphi = c_1 \cos kt + c_2 \cos kt$. Koristeći početne uslove: $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$, $\dfrac{d\varphi}{dt} = 0$ konačno se dobija $\varphi = \varphi_0 \cos kt$.

2328. Problem se svodi na jednačinu $\dfrac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0$. Njen opšti integral je $x = c_1 \sin kt + c_2 \cos kt$. Ovo rešenje može da se napiše u obliku $x = A \sin(kt + \varphi)$.

2329. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \dfrac{1}{6}x + \dfrac{5}{36}$.

2330. $y = c_1 \cos x\sqrt{2} + c_2 \sin x\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}(x^2 + 1)$.

2331. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - x^2 - 3$.

2332. $s = e^{-t}(A \cos t + B \sin t) + (t-1)^3$.

2333. $y = c_1 + c_2 \sin x + c_3 \cos x + \dfrac{x^5}{5} - 4x^3 + 24x$.

2334. $y = (c_1 x + c_2)\, e^x + e^{2x}$.

2335. Za $b \neq a \Rightarrow y = c_1 e^{-ax} + c_2 e^{ax} + \dfrac{1}{b^2 - a^2} e^{bx}$; za $b = a \Rightarrow y = c_1 e^{-ax} + c_2 e^{ax} + \dfrac{x}{2a} e^{ax}$.

2336. $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \dfrac{1}{2} e^{3x}$.

2337. $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - x e^x$.

2338. $y = (c_1 x + c_2)\, e^{2x} + \dfrac{x^2}{2} e^{2x}$.

2339. $y = A \cos x + B \sin x + \dfrac{1}{2} e^{-x} + 2$.

2340. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + e^{2x}\left(\dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{5}{8}x + \dfrac{13}{32}\right)$.

2341. $y = \dfrac{1}{2} e^{3x}(x^2 - 2x + 2) + c_1 e^x + c_2 e^{2x}$.

2342. $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + e^x\left(\dfrac{x^2}{2} - 2x + 3\right)$.

2343. $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{3}{2}e^x$.

2344. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \dfrac{1}{3}\sin 2x$.

2345. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \dfrac{x}{2}\cos x$.

2346. $y = \dfrac{1}{32} e^{2x}(2x^2 - 3x) + \dfrac{1}{5}\cos x - \dfrac{x^3}{12} + \dfrac{x^2}{8} + c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x}$.

2347. $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x \cos x + c_3 e^x \sin x + \dfrac{1}{8} e^{-x}\cos x - \dfrac{1}{20} e^x x(3\cos x + \sin x)$.

2348. $y = e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x - 2x \cos x)$.

2349. $y = A \sin x + B \cos x + y_1 + y_2$, gde je

$$y_1 = \left[\frac{x}{2(1+2i)} - \frac{1+i}{(1+2i)^2}\right] e^{(1+i)x} \ \text{ i } \ y_2 = \left[\frac{x}{2(1-2i)} - \frac{1-i}{(1-2i)^2}\right] e^{(1-i)x}$$

2350. $y = c_1 + c_2 e^{-\frac{5}{2}x} + e^{-x}[(10x + 18)\sin x - (20x + 1)\cos x]$.

2351. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \dfrac{x}{4}\cos x + \dfrac{x^2}{4}\sin x - \dfrac{x}{8}\cos 3x + \dfrac{3}{32}\sin 3x$.

2352. $y = c_1 \cos nx + c_2 \sin nx - \dfrac{a}{4n} x^2 \cos nx + \dfrac{2nb + a}{4n^2} x \sin nx$.

2353. $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^x \cos 2x + c_3 e^x \sin 2x + \dfrac{1}{221}(10\cos 2x + 11 \sin 2x)$.

2354. $y = c_1 + c_2 \cos x - c_3 \sin x + \sec x + \cos x \ln|\cos x| - \operatorname{tg} x \sin x + x \sin x$.

2355. $y = \dfrac{1}{6}\sin x + 2e^x + c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + (c_3 x + c_4)\, e^{-x}$.

2356. Ako se stavi $x = e^t$ dobija se $\dfrac{dy}{dx} = e^{-t}\dfrac{dy}{dt}$, $\dfrac{d^2y}{dt^2} = e^{-2t}\left(\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}\right)$. Tako polazna jednačina dobija oblik

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 1 \Rightarrow$$

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t + 1 \ \text{ ili } \ y = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x) + 1$$

2357. Ako se stavi $y = x^r \Rightarrow y' = r x^{r-1}$ i $y'' = r(r-1)x^{r-2}$. Zamenom jednačina dobija se karakteristična jednačina $r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x$.

2358. $y = (c_1 + c_2 \ln x)\cdot\dfrac{1}{x}$. 2359. $y = c_1 x^2 + A\cos(2\ln x) + B\sin(2\ln x)$.

2360. $y = x(c_1 + c_2\ln x + c_2\ln^2 x)$. 2361. $y = c_1\dfrac{1}{x} + x(c_2 + c_3\ln x)$.

2362. $y = c_1\cos(\ln x) + c_2\sin(\ln x)$. 2363. $y = c_1 x^3 + c_2 x^2 + \dfrac{1}{2}x$.

2364. $y = x\ln x + x^3 + c_1 x + c_2 x^2$. 2365 $y = x(A + B\ln x) + cx^2 + \dfrac{x^3}{4} - \dfrac{3}{2}x\ln^2 x$.

2366. $y = (x+1)^2[c_1 + c_2\ln(x+1)] + (x+1)^3$. 2367. $y = \dfrac{1}{x+1}[A + B\ln(x+1) + \ln^3(x+1)]$.

2368. $y = \dfrac{1}{x}(2\ln^2 x + \ln x + A + Bx^4)$.

2369. $y = \dfrac{1}{5}t^2 - t + 1 + (A - \ln t) + (A - \ln t)\cos\ln t + B\sin\ln t;\ t = x+1$.

2370. $y = c_1 x + \dfrac{c_2}{x} + \ln(x+1)$. 2371. $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2x} - \ln x$.

2372. $z'' - z = 0 \Rightarrow z = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x}$ ili $y = x^2(c_1 e^{-x} + c_2 e^{x})$.

2373. $(x-1)y = A + Bx^2$. 2374. $y = \dfrac{c_1}{x^2} + c_2(2x-3)$.

2375. $(x+1)y = Ax + Bx^2(x+1)$.

2376. $(x^2+1)^2 y = A(x^2-1) + Bx$.

2377. $y = c_1 e^{2\sqrt{x}} + c_2 e^{-2\sqrt{x}}$. 2378. $y'' - y = 0$.

2379. $y\sqrt{1+x^2} = Ax + B$. 2380. $y_t'' + t^2 y = 0$.

2381. $y = c_1\cos m\varphi + c_2\sin m\varphi;\ \varphi = \ln\cos x$.

2382. $x = A\sin k(t - t_0) - t\cos kt$. 2383. $x = a(e^{-t} + t - 1)$.

2384. Kretanje se vrši po različitim zakonima u različitim vremenskim intervalima:

1° za $0 < t < \dfrac{\pi}{k} \Rightarrow x = f(n-1)\cos kt + f$; 2° za $\dfrac{\pi}{k} < t < \dfrac{2\pi}{k} \Rightarrow x = f(n-3)\cos kt - f$;

3° za $\dfrac{2\pi}{k} < t < \dfrac{3\pi}{k} \Rightarrow x = f(n-5)\cos kt + f$.

2385. Problem se svodi na jednačinu

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{c}i = \frac{de}{dt}.$$

Treba razlikovati dva slučaja; 1° $e = E = \text{const}$. Tada je gornja jednačina homogena, pa je, s obzirom na početne uslove, njeno rešenje $i = \dfrac{E}{L\omega_1}e^{-\alpha t}$; 2° $e = E\sin\omega t$. U tom slučaju jednačina dobija oblik

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{c}i = E\omega\cos\omega t.$$

Pošto je opšti integral homogene jednačine već dat pod 1°, potrebno je još odrediti samo odgovarajuće partikularno rešenje nehomogene jednačine. Primenom metode varijacije konstanata dobija se traženo partikularno rešenje

$$i = \frac{E\omega}{\left(\frac{1}{c} - L\omega^2\right) + \omega^2 R^2}\left[\left(\frac{1}{c} - L\omega^2\right)\cos\omega t + \omega R\sin\omega t\right].$$

2386. $y = c_1 x + c_2 x^2 + \varphi(x)$, gde je $\varphi(x)$ partikularni integral jednačine

$$x^2 y' - 2xy' + 2y = \Phi(x)\int\frac{x^2 Q(x)}{\Phi(x)}dx + c_0\Phi(x);\ \Phi(x) = e^{\int x^2 P(x)\,dx}$$

2387. $\dfrac{\pi}{\sqrt{m}}$; $\left[\dfrac{(b-a)\sqrt{m}}{\pi}\right]$ nula ili jedan više (uglaste zagrade znače ceo deo).

2389. $y = \dfrac{c_1 x + c_2}{\sqrt{1+x^2}}$, $y_p = \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$ i koristiti smenu $t = \operatorname{arc\,tg} x$. 2390. $e^{-2x^2\sqrt{6}}$

2391. $(x^2+y^2)y'' + (y'^2+1)(xy' - y) = 0 \Rightarrow \dfrac{y''}{1+y'^2} + \dfrac{xy'-y}{x^2+y^2} = 0$

tj. $\left(\operatorname{arc\,tg} y' - \operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}\right)' = 0 \Rightarrow c_1 y^2 + 2xy - c_1 x^2 = c_2$.

2392. $(yy')' = f(x) \Rightarrow y^2 = 2\int\left[\int f(x)\,dx\right]dx + c_1 x + c_2$.

2393. Smenom $y^2 = u$ jednačina se svodi na Ojlerovu diferencijalnu jednačinu $y = \sqrt{c_1 x + c_2 x^2}$,

$y_p = \sqrt{x + x^2}$.

2394. $x = c_1 + \ln\left|\dfrac{y - c_2}{y + c_2}\right|$. 2395. $x = -\dfrac{1}{2}e^{-y}$.

2396. $y = \pm c_1 x^2 - 2c_1^2 x + c_2;\ y = \dfrac{x^3}{6} + c$ 2397. $\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{y}{2} + \dfrac{\pi}{6}\right) = 2x + 2$.

2398. $(c_1 x + c_2)^2 + (c_1 y + c_3)^2 = 1$. 2399. $(1 - \ln x)^2 y = x^2$

2400. $y = e^{-x}\left[\dfrac{4}{5}(x+1)^{5/2} + c_1 + c_2 x\right]$.

2401. $y=c_1x^2+c_2x^{-1}+0{,}1\cos\ln x-0{,}3\sin\ln x.$

2402. $y=c_1\cos\ln(1+x)+c_2\sin\ln(1+x)+\ln(1+x)\sin\ln(1+x).$

2403. $y=c_1\cos n\arccos x+c_2\sin n\arccos x.$ **2404.** $y=c_1e^{3x}+c_2xe^{3x}+4\sqrt{x}.$

2405. $y=\frac{5}{2}e^x-2e^{2x}+\frac{1}{2}x^2e^{2x}+\frac{1}{2}e^{3x}.$ **2406.** $y=\pi\sin^2\frac{x}{2}-\sin x+x\cos x.$

2407. Stavljajući $\frac{dy}{dx}=2x+u\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=2+u'$ dobija se jednačina $(1+x^2)u'+2xu=0\Rightarrow u=$ $=\frac{c_1}{1+x^2}$. Tako se dobija da je $y'=2x+\frac{c_1}{1+x^2}\Rightarrow y=x^2+c_1\operatorname{arc\,tg}x+c_2.$

Ako se u zadnje dve jednačine stavi $x=-1$, $y=0$ i $y'=0$ dobija se traženi partikularni integral $y=x^2+4\operatorname{arc\,tg}x+\pi-1.$

Opšti integral date jednačine može se dobiti i direktno stavljajući $y'=p$, pošto se ona tom smenom svodi na linearnu diferencijalnu jednačinu prvog reda ili, još lakše, ako se primeti da se ona može napisati u obliku

$$\frac{d}{dx}[(1+x)y']=6x^2+2\Rightarrow(1+x^2)y'=2(x^3+x)+c_1,$$

odnosno $y'=2x+\frac{c}{1+x^2}$ odakle je $y=x^2+c_1\operatorname{arc\,tg}x+c_2$.

2408. $y=\frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\left[c_1\left(\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)+c_2\right].$

2409. $y=A(x+\sqrt{1+x^2})^n+B(x-\sqrt{x^2+1})^n.$ **2410.** $y=c_1(x^2+1)+c_2x^{-1}+2x.$

2411. $y=x\left(c_2e^{-\frac{c_1}{x}}-1\right)$ Staviti $y+x=u$.

2412. $y=c_1e^{\frac{2}{x}}+c_2e^{-\frac{2}{x}}-\frac{1}{4x}.$ Staviti $x=\frac{1}{t}$.

2413. $y=c_1\cos e^x+c_2\sin e^x+1;\ y=\cos e^x+1.$

2414. $y=\frac{c_1e^x+c_2e^{-x}}{x}+\frac{1}{2}e^x.$ Staviti $y=\frac{u}{x}$.

2415. $y=c_1\frac{e^{ax}}{x}+c_2\frac{e^{-ax}}{x}-\frac{2}{a^2}.$ Staviti $y=\frac{u}{x}$.

2416. Ako se koristi smena $y=e^{\frac{x^2}{2}}u(x)$ dobija se

$$y=e^{\frac{x^2}{2}}\left(c_1\cos x\sqrt{3}+c_2\sin x\sqrt{3}+\frac{1}{4}e^x\right);\quad y=\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{4\sqrt{3}}(\sin x\sqrt{3}+\sqrt{3}e^x).$$

2417. $y=c_1x\cos\frac{c}{x}+c_2x\sin\frac{c}{x}.$ Staviti $y=ux;\ x=\frac{1}{t}.$

2418. $y=c_1xe^{\frac{c}{x}}+c_2xe^{-\frac{c}{x}}.$ Staviti $y=\frac{u}{t},\ x=\frac{1}{t}.$

2419. $y=Ae^x(x^2-3x+3)+Be^{-x}(x^2+3x+3).$

2420. $y=\sqrt{x(1-x)}[Au^k+Bu^{-k}];\ u=\frac{x}{1-x};\ k=\sqrt{\frac{1}{4}-B}$ ili $y=\sqrt{x(1-x)}[A\cos(n\ln u)+$ $+B\sin(n\ln u)];\ n=\sqrt{\frac{1}{4}-B};$ za $B=\frac{1}{4},\ y=\sqrt{x(1-x)}[A+B\ln u].$

2421. $y^2=c_1x^2+c_2;\ y=\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2};\ P=2\pi.$

2422. Za $2-3\lambda>0$ rešenje ima oblik $y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}+y_p$; za $2-3\lambda=0$ rešenje je $y=$ $=c_1e^{\frac{x}{3}}+c_2xe^{\frac{x}{3}}$; za $2-3\lambda<0$ rešenje ima oblik $y=e^{(1-\lambda)x}(A\cos x\sqrt{3\lambda-2}+$ $+B\sin x\sqrt{3\lambda-2}+y_p.$

2423. $k_1=\frac{2}{3},\ k_2=-\frac{1}{2}.$ **2424.** $\lambda=\frac{3}{2},\ y=e^{-x}\sin\frac{3}{2}x.$

2426. $y=c_1e^x+c_2(\cos x+\sin x)+1;\ y=c_1e^x+c_2\cos x+c_3\sin x+1;\ y=\sin x+\cos x+1.$

2427. $a=12;\ y=3x-5x^3.$

2429. $a=-m^2,\ b=2m,\ c=-m^2;\ y=c_1(2m^2x+2mx+2m^2+1)e^{-mx}+c_2e^{mx}.$

2430. 1° $y_1=4x^2+1;\ y=(4x^2+1)c_1-c_2e^{-2x}.$ 2° $y=[A(4x^2+1)+Be^{-2x}]+[(4x^2+1)\lambda(x)-$ $-\mu(x)e^{-2x}]$, gde je $\lambda(x)=\int\frac{\sqrt{x}}{2(2x+1)}dx$ a $\mu(x)=\int\frac{\sqrt{x}(4x^2+1)}{2(2x+1)}e^{2x}dx.$

2431. $m=2.$ 1° $y=A(4x^2+1)+Be^{-2x}-(8x^2-8x+10)e^{-x}.$

2432. Zadatak se svodi na rešavanje Eulerove diferencijalne jednačine

$x^2f''(x)+2xf'(x)-2f(x)=0,\ \Rightarrow f(x)=c_1x+\frac{c_2}{x^2}$ odnosno $u=\left(c_1x+\frac{c_2}{x^2}\right)\cos y.$

Traženo partikularno rešenje je $u=\frac{a^3}{2x^2}\cos y.$

2433. $u=c_1\ln(x^2+y^2)+c_2.$

2434. Problem se svodi na diferencijalnu jednačinu

$$\left(1+\frac{y}{x}\right)f''+2f'=0\Rightarrow f\left(\frac{y}{x}\right)=c_1\sqrt{1+\frac{y}{x}}+c_2.$$

2435. Problem se svodi na jednačinu

$$u''(r)+\frac{1}{r}u'(r)-\frac{4}{r^2}u(r)=0\Rightarrow u(r)=c_1(x^2+y^2)+\frac{c_2}{x^2+y^2}.$$

2436. $u=\dfrac{c_1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+c_2.$

2437. Nakon zamene dobija se jednačina

$$ru''+2u'=0\Rightarrow u(r)=\frac{c_1}{r}+c_2.$$

2438. 1° Jednačina može da se napiše u obliku

$$(yy')'-\frac{yy'}{\sqrt{1+x^2}}=0.$$

Ako se zatim podeli sa yy' dobija se jednačina

$$\frac{(yy')'}{yy'}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=0 \text{ ili } \left(\ln yy'-\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}\right)'=0\Rightarrow yy'=c_1(x+\sqrt{1+x^2}), \text{ ili konačno}$$

$$y^2=c_1[x^2+x\sqrt{1+x^2}+\ln(x+\sqrt{1+x^2})]+c_2.$$

2439. Potreban uslov je $\beta'=2\alpha\beta$. Nije teško pokazati da je pod pretpostavkom $\beta>0$ to i dovoljan uslov. U slučaju $\alpha=\dfrac{1}{x}$ dobija se $\dfrac{\beta'}{\beta}=\dfrac{2}{x}\Rightarrow\beta=4ax^2, a>0$. Opšti integral je

$$y=c_1e^{x^2\sqrt{a}}+c_2e^{-x^2\sqrt{a}}.$$

2440. $\varphi'\pm3\varphi\sqrt{2\varphi}+2f\varphi=0.$

2441. Ako se pokuša naći partikularni integral u obliku $y=x^n$ onda se dobija da je $n=1$ pa je traženi partikularni integral $y=x$. Koristeći dobijeni partikularni integral dobija se opšti integral odgovarajuće homogene jednačine $y=c_1x+c_2xe^{-\frac{1}{2x^2}}$. Primenom, dalje, Lagrangeove metode varijacije konstanti dobija se konačno opšti integral polazne diferencijalne jednačine

$$y=Ax+Bxe^{-\frac{1}{2x^2}}+\frac{1}{2x}-x,$$

gde su A i B proizvoljne konstante.

2442. 4° Za $k=n\Rightarrow I=(-1)^n(n!)^2$. **2443.** $z'''-4f(x)z'-2f'(x)z=0.$

2448. Lako se vidi da je leva strana date diferencijalne jednačine prvi izvod izraza

$$xy''+(4x^2-1)y'-4x^3y-4x^3,$$

tako da je ona ekvivalentna sa linearnom diferencijalnom jednačinom drugog reda

$$xy''+(4x^2-1)y'-4x^3y-4x^3=c. \qquad (1)$$

gde je c proizvoljna konstanta (to je njen prvi integral).

2° Smenom $t=\varphi(x)\Rightarrow y'=\dfrac{dy}{dt}\varphi'$, $y''=\dfrac{d^2y}{dt^2}\varphi'^2+\dfrac{dy}{dt}\varphi''$ leva strana jednačine $xy''+(4x^2+1)y'-4x^3y=0$ može da se napiše u obliku

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{(4x^2-1)\varphi'+\varphi''}{x\varphi'^2}\frac{dy}{dt}-4\left(\frac{x}{\varphi'}\right)^2y=0.$$

gde još treba izraziti x kao funkciju od t. Ako se stavi $\dfrac{x}{\varphi'}=\dfrac{1}{2}$ onda je $\varphi(x)=x^2$.

Tako smena $t=x^2$ pretvara jednačinu (1) u jednačinu

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}-y=t+\frac{c}{4}t^{-3/2}.$$

Opšti integral polazne diferencijalne jednačine može se konačno napisati u obliku

$$y=c_1e^{r_1x^2}+c_2e^{r_2x^2}-(x^2+2)+c_3\left(r_2e^{r_2x^2}\int e^{-r_2x^2}dx-r_1e^{r_1x^2}\int e^{-r_1x^2}dx\right), \text{ gde su } c_1, c_2$$

i c_3 proizvoljne konstante a $r_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}$.

2449. Ako se stavi $L(y)\equiv\dfrac{d}{dx}\left[(1-x^2)\dfrac{dy}{dx}\right]+ay=(1-x^2)y''-2xy'+ay$ i $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, gde je funkcija $f_1(x)$ parna i funkcija $f_2(x)$ neparna u izvesnom skupu intervala simetričnih u odnosu na početak, biće

$$L[f(x)]\equiv(1-x^2)f''(x)-2xf'(x)+af(x)=0$$

i

$$L[f(-x)]\equiv[(1-x^2)f''(-x)-2(-x)f'(-x)+af(-x)=0$$

odakle je u tom slučaju intervala

$$L[f_1(x)]=L\left[\frac{f(x)+f(-x)}{2}\right]=0$$

i

$$L[f_2(x)]=L\left[\frac{f(x)-f(-x)}{2}\right]=0$$

što je trebalo pokazati.

$$2°\ y=\left(x^3-\frac{3}{5}x\right)\left[\int\frac{c_1\,dx}{\left(x^3-\frac{3}{5}x\right)^2(x^2-1)}+c_2\right].$$

Iz tačke 1° sledi da se polinom trećeg stepena koji treba da bude partikularni integral date jednačine može tražiti u obliku $y=x^3+\alpha x$. Lako se dobija da mora biti $a=12$ i $\alpha=-\dfrac{3}{5}$ pa je na pr. integral $y=x^3-\dfrac{3}{5}x$.

2454. 1° $y=-12e^{-\frac{x}{2}}$; 2° $y=12e^{\frac{x}{2}}$.

2457. 1° Tražena veza je $Q'\sqrt{b+2PQ}\sqrt{b-2a}\sqrt{Q^3}=0$.

$$2°\ f(t)=\frac{1}{c_1e^{-at}+c_2}=x\Rightarrow t=\frac{1}{a}\ln\frac{c_1x}{1-c_2x} \qquad (1)$$

U slučaju koji ovde ispitujemo dobija se jednačina $\ddot{y}+a\dot{y}+by=0$. Njen opšti integral je

$$y=\begin{cases} Ae^{r_1 t}+Be^{r_2 t} & \text{za } a^2-4b>0 \\ e^{-\frac{a}{2}t}(A\cos\alpha t+B\sin\alpha t)\ (\alpha^2=4b-a^2), & \text{za } a^2-4b<0. \\ Ae^{-\frac{a}{2}t}+Bte^{-\frac{a}{2}t} & \text{za } a^2-4b=0. \end{cases}$$

Opšti integral date jednačine dobija se kada se u zadnjim jednačinama zameni t i (1),

2458. 1° $y=c_1(x+\sqrt{x^2-1})^\alpha\ln(x+\sqrt{x^2-1})+c_2(x+\sqrt{x^2-1})^\beta$ $(\alpha=\beta)$; $y=c_1(x+\sqrt{x^2-1})^\alpha+$ $+c_2(x+\sqrt{x^2-1})^\beta$ $(\beta\neq\alpha)$. 2° $y=\dfrac{1}{8}(x+\sqrt{x^2-1})^3$

3° $\alpha<0$, $\beta<0$ za $\alpha\neq\beta$ i $\alpha<-1$ za $\alpha=\beta$.

2459. $c_1 y=\dfrac{(c_1x+c_2)^2}{4}+1.$

2460. 1° Problem se svodi na diferencijalnu jednačinu $\dfrac{y''}{y'(1+y'^2)}=\dfrac{y'}{y}\Rightarrow$ opšti integral ove jednačine $-c\ln\dfrac{c+\sqrt{c^2-y^2}}{y}+\sqrt{c^2-y^2}=x+c_1.$

2° $x=-a\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}+\sqrt{a^2-y^2}.$

2461. Jednačine traženih krivih mogu se napisati u obliku

$$y=f(x),\ z=x^2$$

gde je $f(x)$ nepoznata funkcija koju treba odrediti iz uslova zadatka. Konačno, problem se svodi na nalaženje nepoznate funkcije $f(x)$ iz Eulerove diferencijalne jednačine $x^2f''-2f=0$. Opšti integral ove jednačine je $f(x)=c_1x^2+\dfrac{c_2}{x}$. Prema tome familija krivih koje zadovoljavaju uslove zadatka data je jednačinama $y=c_1x^2+\dfrac{c_2}{x}$, $z=x^2$, gde su c_1 i c_2 konstante.

2462. $y=Ae^x(x^2-3x+3)+Be^{-x}(x^2+3x+3).$

2463. 1° Odgovarajuća diferencijalna jednačina je $\dfrac{y''}{1+y'^2}=\dfrac{1}{h}\Rightarrow$ opšti integral jednačine $y=-h\ln\cos\left(\dfrac{x}{h}+c_1\right)+c_2$. 2° $y=-h\ln\cos\left(\dfrac{x}{h}+\dfrac{\pi}{4}\right)$. 3° $\lim\limits_{y\to\infty}x=\dfrac{h\pi}{4}$, jer je

$$x=h\left[\arccos\left(e^{-\frac{y}{x}}\right)-\frac{\pi}{4}\right].$$

2464. Diferencijalna jednačina kretanja je

$$m\ddot{x}=mg-k\dot{x}\Rightarrow x=\frac{mg}{k}t-\frac{m^2g}{k^2}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

2465. Diferencijalna jednačina kretanja

$$\frac{d^2x}{dt^2}=+g+k\left(\frac{dx}{dt}\right)^2,\ \Rightarrow x=\frac{75^2}{g}\ln\operatorname{ch}\frac{g}{75}t.$$

2466. Ako se stavi $y=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots,\ \Rightarrow y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots$, pa je nakon zamene u jednačini

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots$$

Izjednačavajući koeficijente uz iste stepene dobija se

$$a_0=a_1,\ 2a_2=a_1,\ 3a_3=a_2,\dots,\ \Rightarrow a_0=1,\ a_2=\frac{1}{1\cdot 2},\ a_3=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

Otuda se dobija

$$y=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=e^x,$$

što je lako dobiti neposrednom integracijom date jednačine.

2467. Ako stavimo

$$y=y_0+y_0'x+\frac{y_0''}{2!}x^2+\frac{y_0'''}{3!}x^3+\cdots,$$

onda je $y_0=1$, $y_0'=0+1=1$, a dalje nakon diferenciranja biće:

$$y''=1+y',\ y_0''=1+1=2,\ y'''=y'',\ y_0'''=2 \text{ itd.}$$

Tako se dobija

$$y=1+x+\frac{2}{2!}x^2+\frac{2}{3!}x^3+\cdots$$

Dobijeno rešenje može da se napiše u konačnom obliku

$$y=1+x+2(e^x-1-x) \text{ ili } y=2e^x-1-x.$$

2468. Izjednačavanjem koeficijenata uz iste stepene dobija se:

$a_0=\dfrac{1}{2}$, $a_1=a_0^2$, $2a_2=2a_0a_1$, $2a_3=2a_0a_2+a_1^2$, $2a_4=2a_0a_3+2a_1a_2+1,\dots,\ \Rightarrow a_0=$ $=\dfrac{1}{2}$; $a_1=\dfrac{1}{4}$; $a_2=\dfrac{1}{8}$; $a_3=\dfrac{1}{16}$; $a_4=\dfrac{9}{32},\dots$

Otuda je

$$y=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\frac{9}{32}x^4+\cdots$$

2469. Polazimo od reda $y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots a_nx^n+\cdots,$

$$\Rightarrow y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots+na_nx^{n-1}+nx^{n-1}+\cdots$$

Tako imamo da je $y'-x^2-y=(a_1-a_0)+(2a_2-a_1)x+(3a_3-a_2-1)x^2+(4a_4-a_3)x^3+$ $+\cdots(na_n-a_{n-1})x^{n-1}+\cdots=0$, odnosno

$$a_1-a_0=0 \text{ ili } a_1=a_0=y_0$$

$$2a_2-a_1=0\Rightarrow a_2=\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{2}a_0=\frac{1}{2}y_0,$$

$$2a_3-a_2-1=0\Rightarrow a_3=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}y_0,$$

$$4a_4-a_3=0\Rightarrow a_4=\frac{1}{12}+\frac{1}{24}y_0$$

....

$$na_n-a_{n-1}=0\Rightarrow a_n=\frac{1}{n}a_{n-1},\ n>4.$$

Dalje je očigledno

$$a_n=\frac{1}{n}a_{n-1},\ a_{n-1}=\frac{1}{n-1}a_{n-2},\ a_n=\frac{1}{n(n-1)}a_{n-2},\qquad a_{n-2}=\frac{1}{n-2}a_{n-3},\ldots,\ a_n=$$

$$=\frac{1}{n(n-1)(n-2)\cdots4}a_3=\frac{1}{n(n-1)(n-2)\cdots4\cdot3}\left(1+\frac{1}{2}a_0\right)=\frac{1}{n!}(2+y_0),\ n>3.$$

Prema tome konačno ćemo imati

$$y=y_0+y_0x+\frac{1}{2}y_0x^2+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}y_0\right)x^3+\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{24}y_0\right)x^4+\cdots+\frac{1}{n!}(2+y_0)x^n+\cdots=$$

$$=(y_0+2)\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots\right)-x^2-2x-2=(y_0+2)e^x-x^2-2x-2.$$

Lako se može doći do rešenja ove jednačine i neposrednom integracijom (linearna jednačina) što daje $y=ce^x-x^2-2x-2$. No kako je $y=y_0$ za $x=0\Rightarrow c=y_0+2$ i $y=(y_0+2)e^x-x^2-2x-2$.

2470. Stavljajući $x-2=u\Rightarrow(1)\,\frac{dy}{du}=u^2+y-3$, pa se traženo rešenje dobija za $u=0$ i $y=3$.

Rešenje tražimo u obliku reda

$$y=3+a_1u+a_2u^2+a_3u^3+a_4u^4+\cdots a_nu^n+\cdots\Rightarrow y'=a_1+2a_2u+3a_3u^2+4a_4u^3+$$
$$+\cdots+na_nu^{n-1}+\cdots$$

Zamenom ovih vrednosti u jednačini (1) dobija se

$$\frac{dy}{du}-u^2-y+3=a_1+(2a_2-a_1)u+(3a_3-a_2-1)u^2+(4a_4-a_3)u^3+\cdots+(na_n-a_{n-1})u^{n-1}+$$

$+\cdots=0$. Kako prema uslovu zadatka mora biti $a_1=0$ to iz $2a_2-a_1=0\Rightarrow a_2=0$, iz $3a_3-a_2-1=0\Rightarrow a_3=\frac{1}{3}$ iz $4a_4-a_3=0\Rightarrow a_4=\frac{1}{12},\ldots$ Polazeći od rekurzivne formule

$$a_n=\frac{1}{n}a_{n-1}\ \text{biće}\ a_n=\frac{1}{n}a_{n-1}=\frac{1}{n(n-1)}a_{n-2}=\cdots=\frac{1}{n(n-1)(n-2)\cdots4}a_3=\frac{2}{n!},\ >3.$$

Konačno je

$$y=3+\frac{1}{3}u^3+\frac{1}{1^2}u^4+\cdots+\frac{2}{n!}u^n+\cdots=3+\frac{2}{3!}(x-2)^3+\frac{2}{4!}(x-2)^4+\cdots+\frac{2}{n!}(x-2)^n+\cdots$$

2471. Dobija se $(n+1)a_{n+1}-(n-1)a_n=0\Rightarrow a_{n+1}=\frac{n-1}{n+1}a_n$, $(n>2)$. Otuda je $a_n=\frac{n-2}{n}a_{n-1}=$

$$=\frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}a_{n-2}=\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)}a_{n-3}=\cdots=$$

$$=\frac{(n-2)(n-3)(n-4)\cdots2\cdot1}{n(n-1)(n-2)\cdots4\cdot3}a_2=\frac{2}{n(n-1)},\ n>2.$$

Konačno rešenje je

$$y=y_0(1-x)+x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{10}x^5+\cdots+\frac{2}{n(n-1)}x^n+\cdots=y_0(1-x)+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n(n-1)}x^n.$$ Kako je $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1}=|x|$, sledi da je red konvergentan za $|x|<1$.

Data jednačina može da se integrali neposredno kao linearna pa se u tom slučaju dobija

$$y=2(1-x)\ln(1-x)+2x+c(1-x)$$

i traženi partikularni integral

$$y=y_0(1-x)+2(1-x)\ln(1-x)+2x.$$

2472. $y=a_0\left[1+x+\frac{1}{2!}(1+a_0)x^2+\frac{1}{3!}(1+5a_0+2a_0^2)x^3+\frac{1}{4!}(1+17a_0+26a_0^2+6a_0^3)x^4+\cdots\right].$

Rekurzivnu formulu i konvergenciju izostavljamo.

2473. Stavljajući $x=z+1$ dobijamo jednačinu $(z+1)\dfrac{dy}{du}-y-z-2=0$. Tražimo rešenje u obliku

$$y=a_0+a_1 z+a_2 z^2+a_3 z^3+a_4 z^4+\cdots a_n z^n+\cdots \Rightarrow \frac{dy}{dz}=a_1+2\,a_2 z+3\,a_3 z^2+4\,a_4 z^3+\cdots+$$

$$+n a_n z^{n-1}+\cdots \quad \text{i} \quad z+1\frac{dy}{dz}-y-z-2=(z+1)\;(a_1+2\,a_2 z+3\,a_3 z^2+4\,a_4 z^3+\cdots+$$

$$+n a_n z^{n-1}+\cdots)-z-2-(a_0+a_1 z+a_2 z^2+a_3 z^3+\cdots a_n z^n+\cdots)=(a_1-2-a_0)+$$

$$+(2\,a_2-1)\,z+(3\,a_3+a_2)\,z^2+(4\,a_4+2\,a_3)\,z^3\cdots+[(n+1)\,a_{n+1}+(n-1)\,a_n]\,z^n+\cdots=0.$$

Izjednačavanjem koeficijenata sa nulom dobijamo relacije

$$a_1-2-a_0=0 \Rightarrow a_1=2+a_0,$$

$$2\,a_2-1=0 \Rightarrow a_2=\frac{1}{2},$$

$$3\,a_3+a_2=0 \Rightarrow a_3=-\frac{1}{3}\;a_2=-\frac{1}{6}.$$

$$4\,a_4+2\,a_3=0 \Rightarrow a_4=-\frac{1}{2}\;a_3=\frac{1}{12}.$$

....

$$(n+1)\,a_{n+1}+(n-1)\,a_n=0 \Rightarrow a_{n+1}=-\frac{n-1}{n+1},\; n>2.$$

Prema zadatku (2471) biće

$$a_n=(-1)^n\frac{(n-2)\;(n-3)\cdots 2\cdot 1}{n\,(n-1)\cdots 4\cdot 3}\,a_2=(-1)^n\frac{1}{n\,(n-1)},\; n>2$$

$$y=a_0+(2+a_0)\,z+\frac{1}{2}\,z^2-\frac{1}{6}\,z^3+\frac{1}{12}\,z^4-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n\,(n-1)}\,z^n+\cdots$$

Zamenjujući z sa $x-1$ imamo

$$y=a_0\,x+2\,(x-1)+\frac{1}{2}\,(x-1)^2-\frac{1}{6}\,(x-1)^3+\frac{1}{12}\,(x-1)^4-\cdots=$$

$$=a_0\,x+2\,(x-1)+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\,(n-1)}\,(x-1)^n.$$

Pošto je $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}\,z^{n+1}}{a_n\,z^n}\right|=|z|\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n+1}=|z|=|x-1| \;\Rightarrow$ da red konvergira za $|x-1|<1$ odnosno $x\in(0,\,2)$.

2474. Ako je $y=a_1 x+a_2 x^2+a_3 x^3+a_4 x^4+a_5 x^5+\cdots \Rightarrow y'=a_1+2\,a_2 x+3\,a_3 x^2+4\,a_4 x^3+$ $+5\,a_5 x^4+\cdots$

Dalje je

$$e^y=1+y+\frac{1}{2!}\,y^2+\frac{1}{3!}\,y^3+\frac{1}{4!}\,y^4+\cdots=1+(a_1 x+a_2 x^2+a_3 x^3+a_4 x^4+\cdots)+$$

$$+\frac{1}{2!}\,[a_1^2 x^2+2\,a_1 a_2 x^3+(a_2^2+2\,a_1 a_3)x^4+\cdots]+\frac{1}{3!}\,(a_1^3 x^3+3\,a_1^2 a_2 x^4+\cdots)+$$

$$+\frac{1}{4!}\,(a_1^4 x^4+\cdots)+\cdots=1+a_1 x+\left(a_2+\frac{1}{2}a_1^2\right)x^2+\left(a_3+a_1 a_2+\frac{1}{6}\,a_1^3\right)x^3+$$

$$+\left(a_4+\frac{1}{2}\,a_2^2+a_1 a_3+\frac{1}{2}\,a_1^2 a_2+\frac{1}{24}\,a_1^4\right)x^4+\cdots$$

Zamenom u diferencijalnoj jednačini dobija se

$$(a_1-1)+(2\,a_2-a_1)\,x+\left(3\,a_3-1-a_2-\frac{1}{2}\,a_1^2\right)x^2+\left(4\,a_4-a_3-a_1 a_2-\frac{1}{6}\,a_1^3\right)x^3+$$

$$+\left(5\,a_5-a_4-\frac{1}{2}\,a_2^2-a_1 a_3-\frac{1}{2}\,a_1^2 a_2-\frac{1}{24}\,a_1^4\right)x^4+\cdots=0.$$

Nakon izjednačavanja koeficijenata sa nulom dobijamo relacije

$$a_1-1=0 \Rightarrow a_1=1,\; 2\,a_2-a_1=0 \Rightarrow a_2=\frac{1}{2}\,a_1=\frac{1}{2},$$

$$3\,a_3-1-a_2-\frac{1}{2}\,a_1^2=0 \Rightarrow a_3=\frac{1}{3}\left(1+a_2+\frac{1}{2}\,a_1^2\right)=\frac{2}{3},$$

$$4\,a_4-a_3-a_1 a_2-\frac{1}{6}\,a_1^3=0 \Rightarrow a_4=\frac{1}{4}\left(a_3+a_1 a_2+\frac{1}{6}\,a_1^3\right)=\frac{1}{3},$$

$$5\,a_5-a_4-\frac{1}{2}\,a_2^2-a_1 a_3-\frac{1}{2}\,a_1^2 a_2-\frac{1}{24}\,a_1^4=0 \Rightarrow a_5=\frac{17}{60},\ldots,$$

$$y=x+\frac{1}{2}\,x^2+\frac{2}{3}\,x^3+\frac{1}{3}\,x^4+\frac{17}{60}\,x^5+\cdots$$

2475. $y=a_0\,(1-x)+x^3\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\,x+\dfrac{1}{10}x^2+\cdots+\dfrac{1\cdot 2}{(n+2)\;(n+3)}\,x^n+\cdots\right).$

2476. Ako je $x-1=z \Rightarrow$ da je $(z+1)\dfrac{dy}{dz}=-z+2\,y$

$$y=a_0\,[1+2\,(x-1)+(x-1)^2]+\frac{1}{2}+(x-1).$$

2477. $y=a_0\left[1+3\,x+\dfrac{9}{2}\,x^2+\dfrac{9}{2}\,x^3+\dfrac{27}{8}\,x^4+\cdots\right]+\left(\dfrac{2}{3}\,x^3+\dfrac{1}{2}\,x^4+\cdots\right).$

2478. $y=x+x^2-\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^4}{4}-\cdots$

2479. $y = a_0(1+x) - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{15}x^6 + \cdots$

2480. Greška je manja od 0,00024.

2481. Kako je $P_0(x) = 1 + x^2 \neq 0 \Rightarrow$ da je $x = 0$ obična tačka. Stavljajući

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \Rightarrow$$

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots + {}_n a_n x^{n-1} + \cdots,$$

i

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \cdots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \cdots$$

Zamenom ovih vrednosti u datu jednačinu biće

$$(1+x^2)[2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \cdots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \cdots] +$$
$$+ x(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots + na_n x^{n-1} + \cdots) -$$
$$-(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots + a_n x^n + \cdots) = 0$$

odnosno

$$(2a_2 - a_0) + 6a_3 x + (12a_4 + 3a_2)x^2 + \cdots + [(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n^2-1)a_n]x^n + \cdots = 0.$$

Izjednačavajući sa nulom koeficijente dobijamo relacije:

$$2a_2 - a_0 = 0 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}a_0,\ 6a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = 0,\ 12a_4 + 3a_2 = 0 \Rightarrow a_4 = -\frac{1}{8}a_0, \ldots,$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n^2-1)a_n = 0 \Rightarrow a_{n+2} = -\frac{n-1}{n+2}a_n.$$

Kako je $a_3 = a_5 = a_7 = \cdots = 0$, tj. $a_{n+2} = 0$ za n neparno, biće za $n = 2k$.

$$a_{2k} = -\frac{2k-3}{2k}a_{2k-2} = \frac{(2k-3)(2k-5)}{2k(2k-2)}a_{2k-4} = \cdots = (-1)^{k+1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2k-3)}{2^k k!}a_0.$$

Konačno opšte rešenje je

$$y = a_0\left(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 + \cdots\right) + a_1 x =$$

$$= a_0\left[1 + \frac{1}{2}x^2 + \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2k-3)}{2^k k!}x^{2k}\right] + a_1 x =$$

$$= a_0\left[1 + \frac{1}{2}x^2 - \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2k-3)}{2_k k!}\right] + a_1 x.$$

Ovde je $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+2}x^{n+2}}{a_n x^n}\right| = x^2 \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+2} = x^2$ pa red konvergira za $|x| < 1$.

2482. U ovom slučaju potražićemo rešenje u obliku Taylorovog reda

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{1}{2!}y''(0)x^2 + \frac{1}{3!}y'''(0)x^3 + \frac{1}{4}y^{IV}(0)x^4 + \cdots$$

Uzastopnim diferenciranjem date jednačine dobija se

$$y''' = xy'' + e^x,\ y^{IV} = y'' + xy''' + e^x, \ldots$$

S obzirom na početne uslove

$$y(0) = 1 \text{ i } y'(0) = 0 \Rightarrow y''(0) = 0,\ y'''(0) = 1,\ y^{IV}(0) = 1, \ldots$$

Otuda je konačno

$$y = 1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots$$

2483. Rekurentni obrazac je

$$2(n+2)(n+1)a_{n+2} - na_n - 2a_n = 0 \Rightarrow a_{n+2} = \frac{a_n}{2(n+1)}.$$

Tako se dobija

$$a_{2k} = \frac{a_0}{2^k(2k-1)!!} \quad \text{i} \quad a_{2k-1} = \frac{a_1}{2^{2k-2}(k-1)!}$$

pa je

$$y = a_0 + a_0\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{2^k(2k-1)!!} + a_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k-1}}{2^{2k-2}(k-1)!}.$$

za $k = 1, 2, 3, \ldots$ Iz opšteg integrala lako se dobija traženo rešenje

$$y(x) = \frac{x}{2}e^{\left(\frac{x}{2}\right)^2}.$$

2484. Dobijaju se rekurentni obrasci

$$a_{3k} = \frac{a_0}{2\cdot3\cdot5\cdot6\cdots(3k-1)\cdot3k},\quad a_{3k+1} = \frac{a_1}{3\cdot4\cdot6\cdot7\cdots3k(3k+1)},\ a_{3k+2} = 0\ (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

Traženo rešenje je

$$y(x) = a_0\left(1 + \frac{x^3}{2\cdot3} + \frac{x^6}{2\cdot3\cdot5\cdot6} + \cdots + \frac{x^{3k}}{2\cdot3\cdot5\cdot6\ldots3k(3k+1)} + \cdots\right) +$$
$$+ a_1\left(x + \frac{x^4}{3\cdot4} + \frac{x^7}{3\cdot4\cdot6\cdot7} + \cdots + \frac{x^{3k+1}}{3\cdot4\cdot6\cdot7\ldots3k(3k+1)} + \cdots\right).$$

Red konvergira za $x \in (-\infty, \infty)$.

2485. Pošto je $P_0(x) = 1$ to je $x = 0$ obična tačka. Polazeći od reda $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ i zamenom u jednačini odgovarajućih vrednosti dobija se da mora biti

$$2a_2 - a_0 = 0 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}a_0,\ 6a_3 - a_1 = 0 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{6}a_1,$$

$$12a_4-a_1-a_2=0 \Rightarrow a_4=\frac{1}{24}a_0+\frac{1}{12}a_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}-(n-1)a_{n-1}-a_n=0 \Rightarrow a_{n+2}=\frac{(n-1)a_{n-1}+a_n}{(n+1)(n+2)},\ n>1.$$

Otuda je opšte rešenje

$$y=a_0\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{20}x^5+\frac{1}{720}x^6+\frac{13}{2520}x^7+\cdots\right)+$$

$$+a_1\left(x+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{120}x^5+\frac{7}{360}x^6+\frac{41}{5040}x^7+\cdots\right).$$

2486. Rekurentni obrazac je $a_{n+2}=\frac{2(n-3)}{(n+1)(n+2)}a_{n-1},\ n>3.$

Opšti integral je

$$y=a_0\left(1-\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{45}x^6-\frac{2}{405}x^9-\cdots\right)+a_1\left(x-\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{63}x^7-\frac{1}{567}x^{10}-\cdots\right)+$$

$$+x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{45}x^6+\frac{1}{126}x^7+\frac{1}{405}x^9+\frac{1}{1134}x^{10}+\cdots.$$

2487. Ako se stavi $x=u+2$ dobija se jednačina

$$\frac{d^2y}{du^2}+(u+1)\frac{dy}{du}+y=0.$$

Ako se dalje stavi $y=a_0+a_1u+a_2u^2+a_3u^3+a_4u^4+\cdots+a_nu^n+\cdots$, i odgovarajuće vrednosti zamene u gornjoj jednačini, a zatim koeficijenti izjednače sa nulom, dobijamo relacije:

$$a_2=-\frac{1}{2}(a_0+a_1),\quad a_3=-\frac{1}{3}(a_1+a_2)=\frac{1}{6}(a_0-a_1),$$

$$a_4=-\frac{1}{4}(a_2+a_3)=\frac{1}{12}(a_0+2a_1),\ \ldots,$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+1)a_n+(n+1)a_{n+1}=0 \Rightarrow a_{n+2}=-\frac{1}{n+2}(a_n+a_{n+1}).$$

Tako se konačno dobija

$$y=a_0\left[1-\frac{1}{2}(x-2)^2+\frac{1}{6}(x-2)^3+\frac{1}{12}(x-2)^4-\frac{1}{20}(x-2)^5-\frac{1}{180}(x-2)^6+\cdots\right]+$$

$$+a_1\left[(x-2)-\frac{1}{2}(x-2)^2-\frac{1}{6}(x-2)^3+\frac{1}{6}(x-2)^4-\frac{1}{36}(x-2)^6+\cdots\right].$$

2488. Opšti član reda je $a_n=-\frac{1}{n(n-1)}a_{n-3},\ n>3$; konvergentan je $\forall x$. Opšte rešenje je

$$y=a_0\left(1-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{180}x^6-\cdots\right)+a_1\left(x-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{504}x^7-\cdots\right).$$

2489. Opšti član je $a_n=-\frac{2}{n(n-1)}a_{n-4}$; konvergentan je $\forall x$. Opšti integral je

$$y=a_0\left(1-\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{168}x^8-\cdots\right)+a_1\left(x-\frac{1}{10}x^5+\frac{1}{360}x^9-\cdots\right).$$

2490. Opšti član je dat rekurzivnom formulom

$$n(n-1)a_n-(n-2)a_{n-2}+a_{n-4}=0,\ n>4$$

Opšti integral je

$$y=a_0\left(1-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{90}x^6+\frac{1}{3360}x^8+\cdots\right)+a_1\left(x+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{40}x^5-\frac{1}{144}x^7-\cdots\right).$$

2491. Opšti član je $a_n=\frac{(n-2-p)(n+p-1)}{n(n-1)}a_{n-2}$. Red je konvergentan za $|x|<1$. Opšte rešenje je

$$y=a_0\left(1-\frac{p(p+1)}{2!}x^2+\frac{(p-2)(p+1)(p+3)}{4!}x^2-\cdots\right)+$$

$$+a_1\left(x-\frac{(p-1)(p+2)}{3!}x^3+\frac{(p-3)(p-1)(p+2)(p+4)}{5!}x^5-\cdots\right).$$

2492. Opšti član reda je $a_n=\frac{1}{n(n-1)}a_{n-4}$; konvergentan je $\forall x$. Opšti integral je

$$y=a_0\left(1-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{672}x^8-\cdots\right)+a_1\left(x-\frac{1}{20}x^5+\frac{1}{1440}-\cdots\right)+$$

$$+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{60}x^6-\frac{1}{252}x^7-\frac{1}{672}x^8+\cdots.$$

2493. $y_1=1-\frac{x^3}{6}+\cdots,\quad y_2=x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{12}+\cdots,\quad y_3=x^2+\frac{x^4}{4}-\cdots.$

2494. Ovde je $x=0$ regularna singularna tačka. Da bismo našli opšte rešenje polazimo od reda

$$y=a_0x^m+a_1x^{m+1}+a_2x^{m+2}+\cdots+a_nx^{m+n}+\cdots,\Rightarrow$$

$$y'=ma_0x^{m-1}+(m+1)a_1x^m+(m+2)a_2x^{m+1}+\cdots+(m+n)a_nx^{m+n-1}+\cdots,$$

$$y''=m(m-1)a_0x^{m-2}+m(m+1)a_1x^{m-1}+(m+1)(m+2)a_2x^m+\cdots+$$

$$+(m+n-1)(m+n)a_nx^{m+n-2}+\cdots.$$

Zamenjujući ove vrednosti u jednačini dobijamo

$$m(2m-1)a_0x^{m-1}+[(m+1)(2m+1)a_1+(m+3)a_0]x^m+[(m+2)(2m+3)a_2+$$

$$+(m+4)a_1]x^{m+1}+\cdots+[(m+n)(2m+2n-1)a_n+(m+n+2)a_{n-1}]x^{m+n-1}+\cdots=0.$$

Da bi a_0 bilo različito od nule mora biti $m=0$ ili $m=\frac{1}{2}$.

Kako je $a_n = -\dfrac{m+n+2}{(m+n)(2m+2n+1)} a_{n-1}$, $n>1$, to će red

$$\bar{y} = a_0 x^m \left[1 - \frac{m+3}{(m+1)(2m+1)} x + \frac{(m+3)(m+4)}{(m+1)(m+2)(2m+1)(2m+3)} x^2 - \frac{(m+4)(m+5)}{(m+1)(m+2)(2m+1)(2m+3)(2m+5)} x^3 + \cdots\right]$$

zadovoljavati jednačinu

$$2x\bar{y}'' + (x+1)\bar{y}' + 3y = m(2m-1) a_0 x^{m-1}.$$

Za $m=0 \Rightarrow$ jedno partikularno rešenje ($a_0 = 1$)

$$y_1 = 1 - 3x + 2x^2 - \frac{2}{3} x^3 + \cdots,$$

a za $m = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ drugo partikularno rešenje

$$y_2 = \sqrt{x}\left(1 - \frac{7}{6} x + \frac{21}{40} x^2 - \frac{11}{80} x^3 + \cdots\right).$$

Konačno opšte rešenje ima oblik

$$y = Ay_1 + By_2 = A\left(1 - 3x + 2x^2 - \frac{2}{3} x^3 + \cdots\right) + B\sqrt{x}\left(1 - \frac{7}{6} x + \frac{21}{40} x^2 - \frac{11}{80} x^3 + \cdots\right).$$

2495. Ako je

$y = a_0 x^m + a_1 x^{m+1} + a_2 x^{m+2} + \cdots + a_n x^{m+n} + \cdots, \Rightarrow y' = m a_0 x^{m-1} + (m+1) a_1 x^m + (m+2) a_2 x^{m+1} + \cdots + (m+n) a_n x^{m+n-1} + \cdots \Rightarrow y'' = (m-1) m a_0 x^{m-2} + m(m+1) a_1 x^{m-1} + (m+1)\cdot(m+2) a_2 x^m + \cdots + (m+n-1)(m+n) a_n x^{m+n-2} + \cdots.$

Zamenom u jednačini dobijamo

$(m-1)(2m-1) a_0 x^m + m(2m+1) a_1 x^{m+1} + \{[(m+2)(2m+1)+1] a_2 + a_0\} x^{m+2} + \cdots + \{[(m+n)(2m+2n-3)+1] a_n + a_{n-2}\} x^{m+n} + \cdots = 0.$

Ovde sledi re[illegible]

$$a_n = -\frac{1}{(m+n)(2m+2n-3)+1} a_{n-2}, \quad n>2.$$

Tako red

$$\bar{y} = a_0 x^m \left(1 - \frac{1}{(m+2)(2m+1)+1} x^2 + \frac{1}{[(m+2)(2m+1)+1][(m+4)(2m+5)+1]} x^4 - \cdots\right)$$

u kome je $a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0$ zadovoljava jednačinu

$$2x^2 \bar{y}'' - x\bar{y}' + (x^2+1)\bar{y} = (m-1)(2m-1) x_0 x^m$$

za $m=1$ i $m=\dfrac{1}{2}$. Na taj način biće $a_0 = 1$ za $m = \dfrac{1}{2}$ i $y_1 = \sqrt{x}\left(1 - \dfrac{1}{6} x^2 + \dfrac{1}{168} x^4 - \dfrac{1}{11088} x^6 + \cdots\right)$, a isto tako

$$a_0 = 1 \text{ za } m=1 \text{ i } y_2 = x\left(1 - \frac{1}{10} x^2 + \frac{1}{360} x^4 - \frac{1}{28080} x^6 + \cdots\right).$$

Konačno opšte rešenje ima oblik

$$y = Ay_1 + By_2 = A\sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{168} x^4 - \frac{1}{11088} x^6 + \cdots\right) + Bx\left(1 - \frac{1}{10} x^2 + \frac{1}{360} x^4 - \frac{1}{28080} x^6 + \cdots\right).$$

Pošto je $x=0$ jedna konačna singularna tačka, to red konvergira za svako konačno x.

2496. Postupajući kao u prethodnom primeru dobijamo

$m(3m-1) a_0 x^{m-1} + (m+1) a_1 x^m + (m+2)(3m+5) a_2 x^{m+1} + [(m+3)(3m+8) a_3 + a_0] x^{m+2} + \cdots + [(m+n)(3m+3n-1) a_n + a_{n-3}] x^{m+n-1} + \cdots = 0.$

Sem toga je $a_n = -\dfrac{1}{(m+n)(3m+3n-1)} a_{n-3}$, $n>3$.

Iz dobijene rekurzivne formule sledi $a_1 = a_4 = a_7 = \cdots = 0$ i $a_2 = a_5 = a_8 = \cdots = 0$. Tako red

$$\bar{y} = a_0 x^m \left(1 - \frac{1}{(m+3)(3m+8)} x^3 + \frac{1}{(m+3)(m+6)(3m+8)(3m+17)} x^6 - \cdots\right).$$

Za $m=0$ i $a_0 = 1 \Rightarrow y_1 = 1 - \dfrac{1}{24} x^3 + \dfrac{1}{2448} x^6 - \cdots$, a za

$$m = \frac{1}{3} \text{ i } a_0 = 1 \Rightarrow y_2 = x^{1/3}\left(1 - \frac{1}{30} x^3 + \frac{1}{3420} x^6 - \cdots\right).$$

Prema tome opšti integral je

$$y = Ay_1 + By_2 = A\left(1 - \frac{1}{24} x^3 + \frac{1}{2448} x^6 - \cdots\right) + Bx^{1/3}\left(1 - \frac{1}{30} x^3 + \frac{1}{3420} x^6 - \cdots\right).$$

Ovaj red konvergira za svaku konačnu vrednost od x.

2497. Nakon zamene izraza za y, y' i y'' dobija se jednakost

$$m^2 a_0 x^{m-1} + [(m+1)^2 a_1 - a_0] x^m + [(m+2)^2 a_2 - a_1] x^{m+1} + \cdots [(m+n)^2 a_n - a_{n-1}] x^{m+n-1} + \cdots = 0 \Rightarrow a_n = \frac{1}{(m+n)^2} a_{n-1}, \ n>1.$$

Tako red

$$\bar{y} = a_0 x^m \left(1 + \frac{1}{(m+1)^2} x + \frac{1}{(m+1)^2 (m+2)^2} x^2 + \frac{1}{(m+1)^2 (m+2)^2 (m+3)^2} x^3 + \cdots\right)$$

zadovoljava jednačinu

(1) $$x\bar{y}'' + \bar{y}' - \bar{y} = m^2 a_0 x^{m-1}.$$

Pošto je ovom slučaju iz $m^2=0 \Rightarrow m_1=m=0$ onda radi nalaženja dva različita (linearno nezavisna) rešenja postupamo na sledeći način. Pretpostavićemo da $\bar y$ zavise od dve promenljive m i x pa je

$$\frac{\partial \bar y'}{\partial m}=\frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{\partial \bar y}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \bar y}{\partial m}\right)=\left(\frac{\partial \bar y}{\partial m}\right)'$$

i

$$\frac{\partial \bar y''}{\partial m}=\frac{\partial}{\partial m}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \bar y}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{\partial \bar y}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{\partial \bar y}{\partial m}\right)=\left(\frac{\partial \bar y}{\partial m}\right)'',$$

te otuda diferenciranjem jednakosti (1) dobijamo

$$(2) \qquad x\left(\frac{\partial \bar y}{\partial m}\right)''+\left(\frac{\partial \bar y}{\partial m}\right)'-\frac{\partial \bar y}{\partial m}=2\,m a_0 x^{m-1}+m^2 a_0 x^{m-1}\ln x.$$

Iz (1) i (2) $\Rightarrow$ da su $y_1=\bar y\Big|_{m=0}$ i $y_2=\dfrac{\partial \bar y}{\partial m}\Big|_{m=0}$ dva partikularna rešenja date jednačine

Tako za $a_0=1$ nalazimo

$$\frac{\partial \bar y}{\partial m}=x^m\ln x\left[1+\frac{1}{(m+1)^2}x+\frac{1}{(m+1)^2(m+2)^2}x^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(m+1)^2(m+2)^2(m+3)^2}x^3+\cdots\right]+x^m\left[-\frac{2}{(m+1)^3}x-\left(\frac{2}{(m+1)^3(m+2)^2}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{2}{(m+1)^2(m+2)^3}\right)x^2-\left(\frac{2}{(m+1)^3(m+2)^2(m+3)^2}+\frac{2}{(m+1)^2(m+2)^3(m+3)^2}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2}{(m+1)^2(m+2)^2(m+3)^3}\right)x^3-\cdots\right]=\bar y\ln x-2x^m\left[\frac{1}{(m+1)^3}x+\right.$$

$$+\left(\frac{1}{(m+1)^3(m+2)^2}+\frac{1}{(m+1)^2(m+2)^3}\right)x^2+\left(\frac{1}{(m+1)^3(m+2)^2(m+3)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(m+1)^2(m+2)^3(m+3)^2}+\frac{1}{(m+1)^2(m+2)^2(m+3)^3}\right)x^3+\cdots.$$

Prema tome biće

$$y_1=\bar y\,|_{m=0}=1+x+\frac{x^2}{(2!)^2}+\frac{x^3}{(3!)^2}+\cdots,$$

$$y_2=\frac{\partial \bar y}{\partial m}\Big|_{m=0}=y_1\ln x-2\left[x+\frac{1}{(2!)^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)x^2+\frac{1}{(3!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3+\cdots\right],$$

a opšte rešenje je

$$y=Ay_1+By_2=(A+B\ln x)\left[1+x+\frac{1}{(2!)^2}x^2+\frac{1}{(3!)^2}x^3\cdots\right]-$$

$$-2\,B\left[x+\frac{1}{(2!)^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)x^2+\frac{1}{(3!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3+\cdots\right].$$

Ovaj red konvergira za svako konačno $x\neq 0$.

2498. Postupajući kao u prethodnom zadatku konačno se dobija

$$y=Ay_1+By_2=(A+B\ln x)\left[1-\frac{1}{3^2}x^3+\frac{1}{3^4(2!)^2}x^6-\frac{1}{3^6(3!)^2}x^9+\cdots\right]+$$

$$+2\,B\left[\frac{1}{3^3}x^3-\frac{1}{3^5(2!)^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)x^6+\frac{1}{3^7(3!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^9-\cdots\right].$$

Ovaj red konvergira za svaku konačnu vrednost od $x\neq 0$.

2499. Postupajući kao u prethodna dva primera definitivno se dobija

$$y=Ay_1+By_2=(A+B\ln x)\left[-\frac{1}{2^3 2!}x^4+\frac{1}{2^5 3!\,1!}x^6-\frac{1}{2^7 4!\,2!}x^8+\cdots\right]+$$

$$+B\left\{1+\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{2^5 2!}x^4-\frac{1}{2^6 3!\,1!}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^6+\frac{1}{2^8 4!\,2!}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\right]x^8-\frac{1}{20^{15}5!\,3!}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\right]x^{10}+\cdots\right\}.$$

Ovaj red konvergira za svaku konačnu vrednost od $x\neq 0$.

2500. $y=c_1y_1+c_2y_2=c_1\left(1+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}x^2\right)+\left(c_2-\frac{1}{3}c_1\right)y_2=A(x^2+2x+3)+Bx^4(1+2x+3x^2+$

$+4x^3+\cdots)=A(x^2+2x+3)+B\dfrac{x^4}{(1-x)^2}$. Konačno singularne tačke su $x=0$ i $x=1$.

Ovaj red konvergira za $|x|<1$.

2501. $y=c_1e^{-x}+c_2[2(e^{-x}+x-1)]=Ae^{-x}+B(1-x)$.

Rešenje konvergira za svaku konačnu vrednost od x.

2502. Zamenom y, y' i y'' dobija se

$$m+(4-m)\,a_0x^{m-1}+[(m+1)(3-m)\,a_1+(m+1)(m-2)\,a_0]\,x^m+\cdots+$$

$$+[(m+n)(4-m-n)\,a_n+(m+3)(m+n-3)\,a_{n-1}]\,x^{m+n-1}x+\cdots=x+\frac{1}{3}x^2.$$

Kako je rekurentni obrasac $a_n=\dfrac{m+n-3}{m+n-4}a_{n-1}$ to $\bar y=a_0x^m\left(1+\dfrac{m-2}{m-3}x+\dfrac{m-1}{m-3}x^2+\right.$ $\left.+\dfrac{m}{m-3}x^3+\dfrac{m+1}{m-3}x^4+\cdots\right)$ zadovoljava jednačinu

$$(1) \qquad (x^2-x)\,\bar y''+3\,\bar y''+3\,\bar y'-2\,\bar y=m(4-m)\,a_0x^{m-1}.$$

Partikularni integrali su za $a_0=1$

$$y_1=1+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x^4-\frac{2}{3}x^5-\frac{3}{3}x^6-\frac{4}{3}x^7-\cdots,$$

$$y_2=x^4(1-2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots).$$

Konačno je $y=A(x^2+2x+3)+B\dfrac{x^4}{(1-x)^2}$ Da bismo našli partikularni integral zbog prisustva nehomogenog člana, posmatraćemo odvojeno sabirke na desnoj strani jednačine. Na osnovu jednačine (1) mora biti

$$m(4-m)\,a_0x^{m-1}=x$$

identički, $\Rightarrow m=2, a_0=\frac{1}{4}$ za $m=2$ rekurzivna formula je $a_n=\frac{n-1}{n-2}a_{n-1}$. Odavde sledi da je $a_1=a_2=a_3=\cdots=0$. Tako ovom partikularnom integralu odgovara član $\frac{x^2}{4}$.

Na isti način, uzimajući u obzir drugi sabirak na desnoj strani polazne jednačine, mora identički biti

$$m(4-m)=a_0 x^{m-1}=\frac{3}{x^2}, \Rightarrow m=-1 \text{ i } a_0=-\frac{2}{5}.$$

Kako za

$$m=-1 \Rightarrow a_n=\frac{n-4}{n-5}a_{n-1} \text{ i } a_1=\frac{3}{4}a_0,\ a_2=\frac{1}{2}a_0,\quad a_3=\frac{1}{4}a_0,\ a_4=a_5=a_6=\cdots=0$$

to partikularni integral koji odgovara članu $\frac{3}{x^2}$ ima oblik

$$-\frac{3}{5}x^{-1}\left(1+\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^3\right).$$

Konačno prema tome opšte rešenje je

$$y=A(x^2+2x+3)+B\frac{x^4}{(1-x)^2}-\frac{3}{5x}-\frac{9}{20}-\frac{3}{10}x+\frac{1}{10}x^2=c(x^2+2x+3)+\frac{Bx^4}{(1-x)^2}+$$
$$+\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{5}x\Big).$$

Zaista partikularni integral $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{5}x$ zadovoljava diferencijalnu jednačinu.

Pošto je $x=1$ jedina druga singularna tačka, onda red konvergira u anulirajućoj oblasti između kruga proizvoljno malog poluprečnika 1, oba sa centrom u koordinatnom početku.

2503. Stavljajući $x=\frac{1}{z} \Rightarrow y'=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}=-z^2\frac{dy}{dz},\ y''=\frac{2}{x^3}\frac{dy}{dz}+\frac{1}{x^4}\frac{d^2y}{dz^2}=z^4\frac{d^2y}{dz^2}+2z^3\frac{dy}{dz}$

dobija se transformisana jednačina

$$2(z-z^2)\frac{d^2y}{dz^2}+(1-5z)\frac{dy}{dz}-2y=0$$

pa se na taj način tačka $x=\infty$ transformiše u tačku $z=0$ koja je regularna singularna tačka. Polazeći od reda

$y=a_0 z^m+a_1 z^{m+1}+a_2 z^{m+2}+\cdots+a_n z^{m+n}+\cdots$ dobija se jednakost

$$m(2m-1)a_0 z^{m-1}+\{(m+1)(2m+1)a_1-(2m^2+3m+2)a_0\}z^m+\cdots+$$
$$+\{(m+n)(2m+2n-1)a_n-[2(m+n)^2-(m+n)+1]a_{n-1}\}z^{m+n-1}+\cdots=0.$$

Rekurentni obrazac je

$$a_n=\frac{2(m+n)^2-(m+n)+1}{(m+n)(2m+2n-1)}a_{n-1}$$

pa red

$$\bar{y}=a_0 z^m\left(1+\frac{2m^2+3m+2}{(m+1)(2m+1)}z+\frac{2m^2+3m+2}{(m+1)}\cdot\frac{2m^2+7m+7}{(m+2)(2m+3)}z^2+\cdots\right.$$

zadovoljava jednačinu

$$2(z-z^2)\frac{d^2\bar{y}}{dz}+(1-5z)\frac{d\bar{y}}{dz}-2\bar{y}=m(2m-1)a_0 z^{m-1}$$

za $m=0$ i $a_0=1$ imamo $y_1=1+2z+\frac{7}{3}z^2+\frac{112}{45}z^3+\cdots=1+\frac{2}{x}+\frac{7}{3x^2}+\frac{112}{45x^3}+\cdots,$

a za $m=\frac{1}{2}$ i $a_0=1$ biće $y_2=\sqrt{z}\left(1+\frac{4}{3}z+\frac{22}{15}z^2+\frac{48}{315}z^3+\cdots\right)=$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(1+\frac{4}{3x}+\frac{22}{15x^2}+\frac{484}{315x^3}+\cdots\right.$$

Opšte rešenje je

$$y=Ay_1+By_2=A\left(1+\frac{2}{x}+\frac{7}{3x^2}+\frac{112}{45x^3}+\cdots\right)+Bx^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{4}{3x}+\frac{22}{15x^2}+\frac{484}{315x^3}+\cdots\right).$$

Red po z konvergira za svako $|z|<1$ što znači u krugu poluprečnika 1 sa centrom u tački $z=0$. Red po x konvergira za $|x|>1$ tj. za svako x van kruga poluprečnika 1, sa centrom u $x=0$.

2504. Stavljajući $x=\frac{1}{z}$ kao u zadatku 2494, imamo

$$(1)\qquad z\frac{d^2y}{dz^2}+(3-z)\frac{du}{dz}+y=0$$

gde je $z=0$ regularna singularna tačka. Polazeći od reda

$$y=a_0 z^m+a_1 z^{m+1}+a_2 z^{m+2}+\cdots+a_n z^{m+n}+\cdots,$$

i zamenjujući u jednačini (1) dobijamo

$$m(m+2)a_0 z^{m-1}+[(m+1)(m+3)a_1-(m-1)a_0]z^m+[(m+2)(m+4)a_2-ma_1]z^{m+1}+\cdots+$$
$$+[(m+n)\cdot(m+n+2)a_n-(m+n-2)a_{n-1}]z^{m+n+1}+\cdots=0$$

Iz rekurentne formule

$$a_n=\frac{m+n-2}{(m+n)(m+n+2)}a_{n-1} \Rightarrow \text{ da } a_2 \Rightarrow \text{ kad je } m=-2.$$

Zamenjujući a_0 sa $b_0(m+2)$ imaćemo red

$$\bar{y}=b_0 z^m\left[(m+2)+\frac{(m-1)(m+2)}{(m+1)(m+3)}z+\frac{(m-1)m}{(m+1)(m+3)(m+4)}z^2+\right.$$
$$\left.+\frac{(m-1)m}{(m+3)^2(m+4)(m+5)}z^3+\frac{(m-1)(m+2)}{(m+3)^2(m+4)^2(m+5)(m+6)}z^4+\cdots\right]$$

koji zadovoljava jednačinu

$$z\frac{d^2\bar{y}}{dz^2}+(3-z)\frac{d\bar{y}}{dz}+\bar{y}=b_0\,m\,(m+2)^2\,z^{m-1}.$$

Poznato je da

$$\frac{\partial\bar{y}}{\partial m}=\bar{y}\ln z+b_0 z^m\left\{1+\left[\frac{2m+1}{(m+1)(m+3)}-\frac{(m-1)(m+2)}{(m+1)(m+3)}\left(\frac{1}{m+1}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{m+3}\right)\right]z+\left[\frac{2m-1}{(m+1)\,(m+3)\,(u+3)}-\frac{(m-1)\,m}{(m+1)\,(m+3)\,(m+4)}\,\frac{1}{m+1}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{m+3}+\frac{1}{m+4}\right)\right]z^2+\left[\frac{2m-1}{(m+3)^2(m+4)(m+5)}-\frac{(m-1)\,m}{(m+3)^2\,(m+4)\,(m+5)}\left(\frac{2}{m+3}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{m+4}+\frac{1}{m+5}\right)\right]z^3+\frac{3m^2+2m-2}{(m+3)^2(m+4)^2(m+5)\,(m+6)}\left(\frac{2}{m+3}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2}{m+4}+\frac{1}{m+5}+\frac{1}{m+6}\right)\right]z^4+\cdots\Big\}\text{ zadovoljava jednačinu.}$$

Stavljajući $m=-2$ i $b_0=1$ nalazimo

$$y_1=(\bar{y})_{m=2}=z^{-2}(3z^2+z^3)=\frac{1}{x}-3\ \text{ i }\ y_2=\left(\frac{\partial\bar{y}}{\partial m}\right)_{m=-2}=$$

$$=y_1\ln z+z^2\left(1+3z+4z^2-\frac{11}{3}z^3+\frac{1}{8}z^4+\cdots\right)=y_1\ln\frac{1}{x}+x^2+3x+4-\frac{11}{3x}+\frac{1}{8x^2}+\cdots$$

Tako je opšti integral $y=Ay_1+By_2=\left(A+B\ln\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}-3\right)+$

$$+B\left(x^2+3x+4-\frac{11}{3x}+\frac{1}{8x^2}+\cdots\right.$$

Ovaj red konvergira za svako $x\neq 0$.

2505. Rekurentna formula je $a_n=-a_{n-1}$. Red ima oblik $y=(A\sqrt{x}+Bx)\cdot(1-x+x^2-x^3+\cdots)$ Konvergentan je za svako $|x|<1$.

2506. Rekurentna formula je $a_n=\frac{1}{2(m+n)}a_{n-1}$. Red ima oblik

$$y=A\left(1+\frac{x}{2\cdot 1!}+\frac{x^2}{2^2\cdot 2!}+\frac{x^3}{2^3\cdot 3!}+\cdots\right)+B\sqrt{x}\left(1+\frac{x}{1\cdot 3}+\frac{x^2}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{x^3}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\cdots\right).$$

Konvergentan je za svaku konačnu vrednost od x.

2507. Rekurentni obrazac je $a_n=\frac{1}{(m+n-1)(2m+2n-1)}a_{n-2}$ za n parno; $a_n=0$ za n neparno.

Red ima oblik

$$y=Ax\left(1+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 9}+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 5\cdot 9\cdot 13}+\cdots\right)+$$

$$+B\sqrt{x}\left(1+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 3\cdot 7}+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3\cdot 7\cdot 11}+\cdots\right).$$

Konvergentan je za svaku konačnu vrednost x.

2508. Rekurentna formula je $a_n=-\frac{1}{(m+n)^2}a_{n-2}$ za n parno; $a_n=0$ za n neparno. Red ima oblik

$$y=(A+B\ln x)\left(1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}-\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\cdots\right)+B\left(\frac{x^2}{2^2}-\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\cdots\right].$$

Konvergentan je za svaku konačnu vrednost $x\neq 0$.

2509. Rekurentna formula je $a_n=-\frac{1}{(m+n-1)^2}a_{n-2}$, za n parno; $a_n=0$ za n neparno. Red ima oblik

$$y=(\quad+B\ln x)\left(1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^4\cdot(2!)^2}-\frac{x^6}{2^6\,(3!)^2}+\cdots\right)+$$

$$+Bx\left[\frac{x^2}{2^2}-\frac{x^4}{2^4\,(2!)^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{x^6}{2^6\,(3!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\cdots\right].$$

Konvergentan je za svaku konačnu vrednost $x\neq 0$.

2510. Rekurentni obrazac je $a_n=-\frac{1}{(m+n-3)(m+n)}a_{n-1}$.

Red je oblika

$$y=(A+B\ln x)\left(-\frac{x^3}{12}+\frac{x^4}{48}-\frac{x^5}{480}+\cdots\right)+B\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{36}-\frac{19x^4}{576}+\frac{137x^5}{28800}-\cdots\right).$$

Konvergentan je za svaku konačnu vrednost $x\neq 0$.

2511. Rekurentni obrazac je $a_n=-\frac{1}{(m+n)(m+n+1)}a_{n-2}$ kad je n parno; $a_n=0$ kad je n neparno. Red je oblika

$$y=Ax^{-1}\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)+B\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots\right).$$

Konvergentan je za svaku konačnu vrednost $x\neq 0$.

2512. Singularne tačke su $x=0$ i $x=1$. Rekurentna formula je

$$a_n=-\frac{m+n-1}{m+n+1}a_{n-1}.$$

Red ima oblik

$$y=Ax\left(1-\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{10}x^3+\cdots\right)+Bx^{-1}(1+x).$$

Red konvergira u anulirajućoj oblasti ograničenoj krugom proizvoljno malog poluprečnika i krugom poluprečnika 1, oba sa centrom u tački $x=0$.

2513. Rekurentni obrazac je

$$a_n=\frac{a_{n-1}}{(m+n)(2m+2n-1)}.$$

Red ima oblik

$$y=A\left(1+x+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{90}x^3+\cdots\right)+B\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{3}x+\frac{1}{30}x^2+\frac{1}{630}x^3+\cdots\right)+$$

$$+\frac{1}{6}x^2\left(1+\frac{1}{15}x+\frac{1}{420}x^2+\frac{1}{18900}x^3+\cdots\right)-1=0.$$

Konvergira za svaku konačnu vrednost od x.

2514. Rekurentni obrazac je $a_n=-\frac{1}{(m+n)(2m+2n+1)}a_{n-1}$. Red ima oblik

$$y=A\left(1-\frac{1}{3x}+\frac{1}{30x^2}-\frac{1}{630x^2}+\cdots\right)+B\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{6x^2}-\frac{1}{90x^3}+\cdots\right).$$

Konvergentan je za svaku konačnu vrednost od $x\neq 0$.

2515. Rekurentni obrazac je $a_n=\frac{1}{m+n}a_{n-1}$. Red je oblika

$$y=\left(A+B\ln\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+\cdots\right)+$$

$$+B\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{6x^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\cdots\right].$$

Konvergentan je za svaku konačnu vrednost $x\neq 0$.

2516. Pod izvesnim uslovima za parametar p, koje ćemo navesti, može se dobiti rešenje u obliku reda koji konvergira u blizini tačke $x=\infty$. Koristeći smenu $x=\frac{1}{z}$, data jednačina dobija oblik

$$(z^4-z^2)\frac{d^2y}{dz^2}+2z^3\frac{dy}{dz}+p(p+1)y=0$$

gde je $z=0$ regularna singularna tačka. Polazeći od reda

$$y=a_0z^m+a_1z^{m+1}+a_2z^{m+2}+\cdots+a_nz^{m+n}+\cdots,$$

imamo da je

$$\{-m(m-1)+p(p+1)\}a_0z^m+\{-m(m+1)+p(p+1)\}a_1z^{m+1}+$$

$$+\{[-(m+1)(m+2)+p(p+1)]a_2+m(m+1)a_0\}z^{m+2}+\cdots+$$

$$+\{[-(m+n)(m+n-1)+p(p+1)]a_n+(m+n-2)(m+n-1)a_{n-2}\}z^{m+n}+\cdots=0.$$

Uzimajući $a_1=0$ i $a_n=\frac{(m+n-2)(m+n-1)}{(m+n)(m+n-1)-p(p+1)}a_{n-2}$

dobijamo

$$\bar{y}=a_0z^m\left[1+\frac{m(m+1)}{(m+1)(m+2)-p(p+1)}z^2+\right.$$

$$+\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{[(m+1)(m+2)-p(p+1)][(m+3)(m+4)-p(p+1)]}z^4+$$

$$\left.+\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}{[(m+1)(m+2)-p(p+1)][(m+3)(m+4)-p(p+1)][(m+5)(m+6)-p(p+1)]}z^6\cdots\right]$$

koje zadovoljava jednačinu

$$(z^4-z^2)\frac{d^2\bar{y}}{dz^2}+2z^3\frac{d\bar{y}}{dz}+p(p+1)\bar{y}=[-m(m-1)+$$

$$+p(p+1)]a_0z^m=(m+p)(p-m+1)a_0z^m.$$

Za $m=-p$ i $a_0=1$ imamo

$$y_1=z^{-p}\left[1-\frac{p(p-1)}{2(2p-1)}z^2+\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{2\cdot 4(2p-1)(2p-3)}z^4-\right.$$

$$\left.-\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)(p-5)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot(2p-1)(2p-3)(2p-5)}z^6+\cdots\right]=$$

$$=x^p\left[1-\frac{p(p-1)}{2(2p-1)}x^{-2}+\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{2\cdot 4\cdot(2p-1)(2p-3)}x^{-4}-\right.$$

$$\left.-\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)(p-5)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot(2p-1)(2p-3)(2p-5)}x^{-6}+\cdots\right].$$

Za $m=p+1$ i $a_0=1$ biće

$$y_2=z^{p+1}\left[1+\frac{(p+1)(p+2)}{2(2p+3)}z^2+\frac{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}{}z^4+\right.$$

$$\left.+\frac{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)(p+5)(p+6)}{2\cdot 4\cdot 6(2p+3)(2p+5)(2p+7)}z^6+\cdots\right]=$$

$$=x^{-p-1}\left[1+\frac{(p+1)(p+2)}{2(2p+3)}x^{-2}+\frac{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}{2\cdot 4\cdot(2p+3)(2p+5)}x^{-4}+\right.$$

$$\left.+\frac{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)(p+5)(p+6)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot(2p+3)(2p+5)(2p+7)}x^{-6}+\cdots\right].$$

Tako dobijamo opšte rešenje

$$y=Ay_1+By_2$$

koje konvergira za $|x|>1$, pod pretpostavkom da je $p\neq\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2},\ldots,$ odnosno $p\neq-\frac{3}{2},\ -\frac{5}{2},\ldots.$ Ako je $n\in N$ onda je osnovni sistem rešenja jednačine

$$y_1(x)=\frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n}\quad\text{i}\quad y_2(x)=\frac{1}{2}P_n(x)\ln\frac{x+1}{x-1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}P_{k-1}(x)P_{n-k}(x)\ (P_n(x)=$$

$=y_1(x))$ koje se nazivaju respektivno Legendreov polinom i Legendreova funkcija druge vrste.

2517. Očigledno da je $x=0$ regularno singularna tačka. Da bismo dobili rešenje u obliku reda koje je konvergentno u blizini $x=0$ stavljamo

$$y=a_0x^m+a_1x^{m+1}+a_2x^{m+2}+\cdots+a_nx^{m+n}+\cdots$$

i dobijamo

$$(m^2-k^2)a_0x^m+\{(m+1)^2-k^2\}a_1x^{m+1}+\{[(m+2)^2-k^2]a_2+$$

$$+a_2\}x^{m+2}+\cdots+\{[(m+n)^2-k^2]a_n+a_{n-2}\}x^{m+n}+\cdots=0.$$

Uzimajući $a_1=0$ i $a_n=-\frac{1}{(m+n)^2-k^2}a_{n-2}$ dobija se

$$\bar y=a_0x^m\left\{1-\frac{1}{(m+2)^2-k^2}x^2+\frac{1}{[(m+2)^2-k^2]\,[(m+4)^2-k^2]}x^4-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{[(m+2)^2-k^2]\,[(m+4)^2-k^2]\,[(m+6)^2-k^2]}x^6+\cdots\right\}$$

koje zadovoljava jednačinu

$$x^2\bar y''+x\bar y'+(x^2-k^2)\bar y=(m^2-k^2)a_0x^m.$$

Za $m=k$ i $a_0=1$ imamo

$$y_1=x^k\left\{1-\frac{1}{4(k+1)}x^2+\frac{1}{4^2\cdot 2!\,(k+1)(k+2)}x^4-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4^3\cdot 3!\,(k+1)\,(k+2)\,(k+3)}x^6+\cdots\right\}$$

a za $m=-k$ i $a_0=1$ biće

$$y_2=x^{-k}\left\{1-\frac{1}{4(1-k)}x^2+\frac{1}{4^2\cdot 2!\,(1-k)(2-k)}x^4-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4^3\cdot 3!\,(1-k)\,(2-k)\,(3-k)}x^6+\cdots\right\}.$$

Dobijena dva reda konvergiraju za svako $x\neq 0$. Prvo rešenje, obeležićemo ga sa $I_k(x)$, naziva se Besselova funkcija prve vrste reda k. To rešenje može biti zapisano u obliku

$$I_k(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k}}{n!\,\Gamma(k+n+1)}.$$

Analogno drugo partikularno rešenje, koje ćemo obeležiti sa $I_{-k}(x)$ može se napisati u obliku

$$I_{-k}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-k}}{n!\,\Gamma(-k+n+1)}.$$

Ako $k\notin c$ očigledno je da su rešenja $I_k(x)$ i $I_{-k}(x)$ linearno nezavisna. U slučaju kada je $k\in c$ nije teško proveriti da su rešenja $I_k(x)$ i $I_{-k}(x)$ linearno zavisna i da između njih postoji linearna zavisnost oblika

$$I_{-k}(x)=(-1)^k I_k(x)$$

U tom slučaju $I_{-k}(x)$ mora biti zamenjena *Besselovom funkcijom drugog reda* $Y_k(x)$, koja se naziva Veberova (ili Neumannova) funkcija, i definisana je jednakošću

$$Y_k(x)=\lim_{m\to k}\frac{I_m(x)\cos m\pi-I_{-m}(x)}{\sin m\pi}.$$

Pomoću tih funkcija opšte rešenje Besselove jednačine može biti zapisano u obliku

$$y=c_1I_k(x)+c_2Y_k(x)$$

kada je k ceo broj i kada nije ceo broj.

2518. $y=c_1I_{5/2}(u)+c_2I_{-3/5}(u)$, gde je $u=2x$.

2519. $y=c_1I_2(u)+c_2Y_2(u)$, gde je $u=x\sqrt{3}$.

2520. $x^2u''+xu'+(x^2-p^2)u=0,\ \Rightarrow y=x^{-\frac{1}{2}}[c_1I_p(x)+c_2I_{-p}(x)],\ p\in c.$

2523. $u''t^2+u't+u\left[t^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]=0\ \Rightarrow u=c_1I_{1/3}(t)+c_2I_{-1/3}(t)$

ili

$$y=\frac{2}{3}x^2\left\{c_1I_{1/3}\left[\left(\frac{2x}{3}\right)^{3/2}\right]+c_2I_{-1/3}\left[\left(\frac{2x}{3}\right)^{3/2}\right]\right\}.$$

2524. $\alpha=1,\ \beta=\frac{1}{2},\ \gamma=\frac{3}{4}.$

2525. Rešenje jednačine konvergentno u blizini $x=0$, može se dobiti polazeći od reda

$$y=a_0x^m+a_1x^{m+1}+a_2x^{m+2}+\cdots a_nx^{m+n}+\cdots$$

Zamenom u jednačini dobija se

$$m(m+\gamma-1)\,a_0 x^{m-1}+\{(m+1)\,(m+\gamma)\,a_1-[m\,(m+\alpha+\beta)+$$
$$+\alpha\beta]\,a_0\}\,x^m+\cdots+\{(m+n)\,(m+n+\gamma-1)\,a_n-$$
$$-[(m+n-1)\,(m+n+\alpha+\beta-1)+\alpha\beta]\,a_{n-1}\}\,x^{m+n+1}+\cdots=0.$$

Tako dobijamo da je $a_n=\dfrac{(m+n-1)\,(m+n+\alpha+\beta-1)+\alpha\beta}{(m+n)(m+n+\gamma-1)}\,a_{n-1}$

pa red

$$\bar{y}=a_0 x^m\Bigg[1+\frac{m\,(m+\alpha+\beta)+\alpha\beta}{(m+1)\,(m+\gamma)}+\frac{m\,(m+\alpha+\beta)+\alpha\beta}{(m+1)\,(m+\gamma)}\cdot\frac{(m+1)\,(m+\alpha+\beta+1)+\alpha\beta}{(m+2)\,(m+\gamma+1)}\,x^2+$$
$$+\frac{m\,(m+\alpha+\beta)+\alpha\beta}{(m+1)\,(m+\gamma)}\cdot\frac{(m+1)\,(m+\alpha+\beta+1)+\alpha\beta}{(m+2)\,(m+\gamma+1)}\cdot\frac{(m+2)\,(m+2+\alpha+\beta)+\alpha\beta}{(m+3)\,(m+\gamma+2)}\,x^3+\cdots\Bigg]$$

zadovoljava jednačinu

$$(x-x^2)\,\bar{y}''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)\,x]\,\bar{y}'-\alpha\beta\,\bar{y}=m\,(m+\gamma-1)\,a_0 x^{m-1}.$$

Za $m=0$ i $a_0=1$ dobijamo

$$y_1=1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}+\frac{\alpha\,(\alpha+1)\,\beta\,(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma\,(\gamma+1)}\,x^2+\frac{\alpha\,(\alpha+1)\,(\alpha+2)\,\beta\,(\beta+1)\,(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma\,(\gamma+1)\,(\gamma+2)}+\cdots,$$

a za $m=1-\gamma$, $\gamma\neq1$, uzimajući $a_0=1$ imamo

$$y_2=x^{1-\gamma}\Bigg[1+\frac{(\alpha+\gamma+1)\,(\beta-\gamma+1)}{1\,(2-\gamma)}\,x+\frac{(\alpha-\gamma+1)\,(\alpha-\gamma+2)\,(\beta-\gamma+1)\,(\beta-\gamma+2)}{1\cdot2\,(2-\gamma)\,(3-\gamma)}\,x^2+$$
$$+\frac{(\alpha-\gamma+1)\,(\alpha-\gamma+2)\,(\beta-\gamma+3)\,(\beta-\gamma+1)\,(\beta-\gamma+2)\,(\beta-\gamma+3)}{1\cdot2\cdot3\,(2-\gamma)\,(3-\gamma)\,(4-\gamma)}\,x^3+\cdots\Bigg].$$

Red y_1 naziva se *hipergeometrijski red*. Konvergentan je za $|x|<1$ i obeležava se sa $y_1=F(\alpha,\beta,\gamma,x)$. Drugi partikularni integral obeležavamo sa $y_2=x^{1-\gamma}\,F(\alpha-\gamma+1;\ \beta-\gamma+1;\ 2-\gamma,x)$. Tako se konačno dobije opšti integral jednačine

$$y=Ay_1+By_2=AF(\alpha,\beta,\gamma,x)+Bx^{1-\gamma}\,F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,x).$$

2526. Kako je $\alpha+\beta+1=2$, $\gamma=\dfrac{3}{2}$, $\alpha\beta=\dfrac{1}{4}\Rightarrow$ da je $\alpha=\beta=\dfrac{1}{2}$ i $\gamma=\dfrac{3}{2}$. Prema tome imaćemo

$$y_1=F(\alpha,\beta,\gamma,x)=F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},x\right)=1+\frac{x}{6}+\frac{3}{40}x^2+\frac{5}{112}x^3+\cdots$$

i

$$y_2=x^{1-\gamma}\,F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,x)=x^{-1/2}\,F\left(0,\,0,\,\frac{1}{2},\,x\right)=\frac{1}{\sqrt{x}},$$

pa je opšte rešenje

$$y=AF\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},x\right)+\frac{B}{\sqrt{x}}.$$

2527. Ovde je $\alpha+\beta+1=4$, $\gamma=4$, $2\beta=2\Rightarrow\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=4$ ili $\alpha=2$, $\beta=1$, $\gamma=4$.

Otuda je

$$y_1=F(1,2,4,x)=F(2,1,4,x)=1+\frac{x}{2}+\frac{3}{10}x^2+\frac{1}{5}x^3+\frac{1}{7}x^4+\frac{3}{28}x^5+\cdots$$

Pošto je $\gamma=4$, to četvrti član u y_2 ima nulu u imeniocu. Šta više jedan od $\alpha-\gamma+2$ ili $\beta-\gamma+2$ u trećem članu je nula pa je

$$y_2=x^{-3}\,F(-2,-1,-2,x)=x^{-3}\,F(-1,-2,-2,x)=x^{-3}\,(1-x)$$

a opšte rešenje je

$$y=AF(1,2,4,x)+B\,\frac{1-x}{x^3}.$$

2528. 1° $F(\alpha,\beta,\beta,x)=1+\dfrac{\alpha,\beta}{1\cdot\beta}\,x+\dfrac{\alpha\,(\alpha+1)\,\beta\,(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\beta\,(\beta+1)}\,x^2+\cdots=1+\alpha x+\dfrac{\alpha\,(\alpha+1)}{2!}\,x^2+$

$$+\frac{\alpha\,(\alpha+1)\,(\alpha+2)}{3!}\,x^3+\cdots=(1-x)^{-\alpha}.$$

2° $xF(1,1,2,-x)=x\left[1+\dfrac{1\cdot1}{1\cdot2}(-x)+\dfrac{1\cdot2\cdot1\cdot2}{1\cdot2\cdot2\cdot3}(-x)^2+\dfrac{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot2\cdot3\cdot4}(-x)^3+\cdots\right]=$

$$=x\left(1-\frac{1}{2}\,x+\frac{1}{3}\,x^2-\frac{1}{4}\,x^3+\cdots\right)=\ln(1+x).$$

2529. $y=AF(1,2,-4,x-1)+B(x-1)^5\,F(6,7,6,x-1)$ nije opšti integral pošto je šesti član u $F(1,2,-4,x-1)$ neodređen. Opšte rešenje je

$$y=AF(1,2,8,2-x)+B(2-x)^{-7}\cdot F(-6,-5,-6,2-x).$$

2531. y_1 i y_2 su generalisani potencijalni redovi sa iracionalnim izložiocima.

2532. y_1 i y_2 su redovi sa kompleksnim izložiocima.

2533. Nema rešenja u obliku potencijalnog reda, pošto je poluprečnik konvergencije dobijenog reda $y=1+1!\,x+2!\,x^2+3!\,x^3+\cdots$, jednak nuli.

2534. $y=\dfrac{2}{\pi}+\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{16\,k^4-4\,k^2+1}\left(\cos 2\,kx-\dfrac{2\,k}{4k^2-1}\sin 2\,kx\right).$

2535. $y=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(k^3+k)\cos kx-\sin kx}{2^k\,[(k^3+k)^2+1]}$. Razvoj u Fourierov red desne strane jednačine ima oblik $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\sin nx$.

2536. Razvijanjem u Fourierov red funkcije $f(x)=x\cos x$ jednačina dobija oblik

$$y''+y=\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\,n}{(4\,n^2-1)^2}\sin 2\,nx.$$

Ako se partikularno rešenje traži u obliku $y=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos 2nx+B_n \sin x$ dobiće se konačno

$$y(x)=\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(4n^2-1)^3}\sin 2nx$$

Za $x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(4n^2-1)^3}\sin\frac{n\pi}{2}$.

2537. Ako se dati red diferencira tri puta uzastopce pa se saberu leve i desne strane polazne i tako dobijenih jednakosti dobija se diferencijalna jednačina

$$y'''+y''+y'+y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$$

čiji je odgovarajući partikularni integral

$$y(x)=\frac{1}{4}(e^x-e^{-x})+\frac{1}{2}\sin x=\frac{1}{4}\operatorname{sh} x+\frac{1}{2}\sin x.$$

2538. Problem se svodi na jednačinu

$$y^{IV}-y=0;\ y(0)=1;\ y'(0)=y''(0)=y'''(0)=0.$$

Nakon integracije konačno se dobija $y(x)=\frac{1}{2}(\operatorname{ch} x+\cos x)$.

2539. $a_n=(-1)^{n-1}\dfrac{\prod_{\nu=0}^{n}[(a+\lambda)\nu+b-\lambda]}{n[(n-1)!]^2}, \quad n=2,3,\ldots$

$$y(x)=x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\prod_{\nu=2}^{n}[(a+\lambda)\nu+b-\lambda]}{n[(n-1)!]^2}x^n \tag{1}$$

Kako je $n(n-1)a_n=-[(a+\lambda)n+b-\lambda]a_{n-1}$, $n=1,2,\ldots$ to je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=0$ što znači da red (1) konvergira za svako x.

2° U slučaju kad je $b=\lambda$ red (1) postaje

$$y(x)=x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-2}\frac{\alpha^{n-1}x^n}{(n-1)!}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\alpha^n}{n!}x^n,$$

gde je stavljeno $\alpha=a+b$; prema tome u ovom slučaju je $y(x)=xe^{-\alpha x}$.

3° Ako je $b=\lambda$, data diferencijalna jednačina može se napisati u obliku $y''+\alpha y'+\frac{\alpha}{x}y=0$.

Opšti integral ove jednačine može se napisati u obliku

$$y=xe^{-x\alpha}\left(c_1\int_0^x\frac{e^{\lambda t}}{t^2}dt+c_2\right)=\varphi(x,c_1,c_2).$$

4° Pod pretpostavkom da je

$$\lim_{x\to\infty}\varphi(x,c_1,c_2)=\lim_{x\to\infty}\frac{c_1\int_1^x\frac{e^{\alpha t}}{t^2}dt+c_2}{\frac{e^{\alpha x}}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{c_1\frac{e^{\alpha x}}{x^2}}{-\frac{e^{\alpha x}}{x^2}+\alpha\frac{e^{\alpha x}}{x}}=0.$$

Korišćeno je L'Hospitalovo pravilo.

2540. Ako se data jednačina napiše prethodno u obliku $xy''-(\alpha+\beta)y'=xy'-\alpha y$ pa se stavi (1) $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ dobija se da je $(n+1)(n-\alpha-\beta)a_{n+1}=(n-\alpha)a_n, n=1,2\ldots$ Odavde je jasno da se u redu (1) prvih $\alpha+1$ koeficijenata mogu odrediti pomoću proizvoljno izabranog koeficijenta a_0. Tada je $a_{\alpha+1}=0$ pa se može uzeti $a_n=0$ za $n>\alpha$. Prema tome, data jednačina ima sigurno za partikularni integral polinom različit od konstante. Drugi deo problema prepušta se čitaocu.

2542. 1° $y(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)}x^n$, $x\in[-1,1]$; 2° $n>4$;

3° $y(x)=\frac{(x+1)^2\ln(1+x)}{2x^2}-\frac{3(x+1)^2}{4x^2}+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}$.

2543. 1° Ako se data diferencijalna jednačina napiše u obliku

$$y''-\alpha xy''+\alpha^2(xy'-y)=0$$

i u njoj stavi $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ dobiće se $n(n-1)a_n=(n-1)(n-2)\alpha a_{n-1}+(n-3)\alpha^2 a_{n-2}$, $n=2,3,\ldots$, odakle je

$$a_n=\frac{n-2}{n}\alpha a_{n-1}-\frac{n-3}{n(n-1)}\alpha^2 a_{n-2},\ n=2,3,\ldots. \tag{1}$$

Odavde je dalje $a_2=-\frac{\alpha^2}{2!}a_0$, $a_3=\frac{\alpha^3}{3!}a_0$. Pretpostavi li se da je za $k=2,3,\ldots,n-1$

$$a_k=\frac{\alpha^k}{k!}a_0$$

tada je prema (1)

$$a_n=\alpha^n a_0\left[\frac{n-2}{n}\frac{1}{(n-1)!}-\frac{n-3}{n(n-1)(n-2)!}\right]=\alpha^n a_0\frac{n-2-n+3}{n!}=\frac{\alpha^n}{n!}a_0;$$

dakle $a_n=\frac{\alpha^n}{n!}a_0$, $n=2,3,\ldots$.

Prema tome red $y=a_0+a_1x+a_0\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}x^n$, gde su a_0 i a_1 proizvoljne konstante zadovoljava datu diferencijalnu jednačinu. Stavljajući prvo $a_0=1$, $a_1=\alpha$ pa potom $a_0=0$, $a_1=1$ dobijaju se partikularni integrali $y_1=e^{\alpha x}$ i $y_2=x$ koji su očigledno linearno nezavisni. Prema tome, opšti integral dat je jednačinom

$$y=c_1 e^{ax}+c_2 x$$

2° Jednačine traženih krivih mogu se napisati u obliku

$$y=e^x, \quad z=\psi(x).$$

Ako se u jednačini oscilatorne ravni ovakve jedne krive

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-e^x & Z-\psi(x) \\ 1 & e^x & \psi'(x) \\ 0 & e^x & \psi''(x) \end{vmatrix}$$

stavi $X=2x$, $Y=2e^x$, $Z=2\psi(x)$, dobija se

$$\begin{vmatrix} x & e^x & \psi(x) \\ 1 & e^x & \psi'(x) \\ 0 & e^x & \psi''(x) \end{vmatrix}=0$$

ili

$$\begin{vmatrix} x & e^x & \psi \\ 1-x & 0 & \psi'-\psi \\ -x & 0 & \psi''-\psi \end{vmatrix}=0$$

tj $e^x[(\psi''-\psi)(1-x)+x(\psi'-\psi)]=0$
ili konačno

$$(1-x)\psi''+x\psi'-\varphi=0.$$

Odavde su prema 1° tražene krive date jednačinama

$$y=e^x$$

(2) $$z=c_1 e^x+c_2 x$$

3° Kako treba da bude $\varphi(0)=1$, $\varphi'(0)=0$ to se iz druge jednačine (2) dobija $\varphi(x)=e^x$. Tako će tražena površina biti

$$P=\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)\sqrt{1+\varphi'^2(x)}\,dx=\int_{\infty}^{0}e^x\sqrt{1+e^{2x}}\,dx \Rightarrow P=\frac{1}{2}[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})].$$

2544. Diferencirajući po x prvu jednačinu imamo

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}+1.$$

S obzirom na polazne jednačine dalje će biti

$$\frac{d^2y}{dx^2}=(y+z+x)+(-4y-3z+2x)+1$$

ili

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-3y-2z+3x+1.$$

Iz prve jednačine datog sistema nalazimo

(1) $$z=\frac{dy}{dx}-y-x$$

pa zamenom u gornjoj jednačini dobijamo

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=5x+1 \Rightarrow$$

(2) $$y=(c_1+c_2x)e^{-x}+5x-9.$$

Ako se dy iz (2) zameni u (1) dobija se

$$z=(c_2-2c_1-2c_2x)e^{-x}-6x+14.$$

2545. $x=c_1e^{-t}+c_2e^{3t}-\frac{t}{3}-\frac{1}{9}$, $y=-c_1e^{-t}+c_2e^{3t}-\frac{t}{3}-\frac{1}{9}$.

2546. $x=c_1e^t+c_2e^{-t}+te^t-t^2-2$, $y=c_1e^t-c_2e^{-t}+(t-1)e^t-2t$.

2547. $x=c_1e^{2t}+c_2e^{-t}-2\sin t-\cos t$, $y=2c_1e^{2t}-c_2e^{-t}+\sin t+3\cos t$.

2548. $x=c_1e^{-t}+c_2e^{2t}$, $y=-(c_1+c_3)e^{-t}+c_2e^{2t}$, $z=c_3e^{-t}+c_2e^{2t}$.

2549. $z=c_2e^{c_1x}$, $y=x+\frac{1}{c_1c_2}e^{-c_1x}$.

2550. $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x$, $z=c_1e^x+c_2e^{-x}-c_3\cos x-c_4\sin x$.

2551. $x=e^t(c_1\cos t+c_2\sin t)+e^{-t}(c_3\cos t+c_4\sin t)$,
$y=e^t(c_1\sin t-c_2\cos t)+e^{-t}(c_4\cos t-c_3\sin t)$.

2552. $x=Ae^t+Be^{-t}+Ce^{2t}$, $y=2Ae^t-2Be^{-t}+\frac{5}{2}Ce^{2t}$.

2553. $x=c_1+c_2t+c_3t^2-\frac{1}{6}t^3+e^t$, $y=c_4-(c_1+2c_3)t-\frac{1}{2}(c_2-1)t^2-\frac{1}{3}c_3t^3+\frac{1}{24}t^5-e^t$.

2554. $x=c_1+c_2e^t+c_3\cos t+c_4\sin t$,

$$y=-c_1-c_2e^t+\left(\frac{3}{5}c_4-\frac{4}{5}c_3\right)\cos t-\left(\frac{3}{5}c_3+\frac{4}{5}c_4\right)\sin t.$$

2555. $x=Ae^t+Be^{2t}+Ce^{3t}+\frac{6t+11}{36}$, $y=-9Ae^t-12Be^{2t}-17Ce^{3t}+\frac{2}{9}(6t+11)$.

2556. $x=3\cos t-\cos 3t$, $y=3\sin t-\sin 3t$.

2557. Dati sistem može da se napiše u obliku

$$u''+u=0$$
$$v''+4v=0$$
$$9z=x''-2y''-2x-11y$$

gde je $u=5x+3y+8z$, $v=x+3y+3z$. Prema tome je

$$5x+3y+8z=A\sin(t+\alpha)$$
$$x+3y+3z=B\sin(2t+\beta).$$

Koristeći ove rezultate dobija se $z=c\sin(t+\gamma)-B\sin(2t+\beta)$. Konačno opšti integral sistema je

$$x=\frac{A}{4}\sin(t+\alpha)+B\sin(2t+\beta)-\frac{5}{4}C\sin(t+\gamma).$$

$$y=-\frac{A}{12}\sin(t+\alpha)+B\sin(2t+\beta)-\frac{7}{12}c\sin(t+\gamma),$$

$$z=-B\sin(2t+\beta)+C\sin(t+\gamma).$$

gde su $\alpha, \beta, \gamma, A, B$ i C proizvoljne konstante.

2558. Koristeći osobine proporcija možemo pisati

$$\frac{x\,dx+dy-dz}{x+y+z-x-y-z}=0 \quad \text{ili} \quad \frac{x\,dx+dy-dz}{0}=0,$$

što ima smisla samo ako je i

$$x\,dx+dy-dz=0 \Rightarrow d\left(\frac{x^2}{2}\right)+dy-dz=0$$

odnosno (1) $\frac{x^2}{2}+y-z=c_1$. Iz prve jednačine biće, s obzirom na (1)

$$\frac{dy}{dx}=2y+\frac{x^2}{2}-c_1 \Rightarrow y'-2y=\frac{x^2}{2}-c_1.$$

Nakon integracije ove jednačine, s obzirom na (1) dobija se drugi prvi integral

$$(2) \qquad \left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z^2}{2}+\frac{1}{4}\right)e^{2x}=c_2.$$

Jednačine (1) i (2) predstavljaju opšti integral datog sistema.

2559. Iz datog sistema dobija se jednačina

$$2x\frac{dx}{dt}-2y\frac{dy}{dt}=0 \Rightarrow (1)\ x^2-y^2=c_1^2.$$

Drugi prvi integral je (2) $y+x=c_2e^t$. Iz jednačina (1) i (2) može se dobiti opšti integral sistema u obliku

$$x=Ae^t+Be^{-t}, \quad y=Ae^t+Be^{-t}.$$

2560. $x^2-y^2=c_1;\ x-y=t+c_2.$

2561. Lako se dobijaju dva prva integrala sistema (1) $x^2+y^2+z^2=c_1$ i (2) $x-y+z=c_2$. Koristeći ove relacije druga i treća jednačina dobijaju respektivno oblik $\frac{dy}{dt}=y(y^2-c_1)$ i $\frac{dz}{dt}=z(c_1-z^2)$ koje treba integraliti.

2562. $x-y+z=c_1;\ x=c_1+c_2e^t,\ z=c_1-x+y,\ y=-c_1^2+e^t(2c_1c_2t+c_3)+c_2^2e^{2t}.$

2563. (1) $x+y-z=c_1$, (2) $(z-y)(z-x)=c_2$. Relacije (1) i (2) definišu opšti integral sistema.

2564. $\frac{x}{y}=c_1,\ xy+z^2=c_2.$ **2565.** $x-y=c_1(y-z),\ (x+y+z)(x-y)^2=c_2.$

2566. $x+z=c_1,\ y+u=c_2,\ (x-z)^2+(y-u)^2=c_3.$ **2567.** $y=c_1z,\ x-y^2-z^2=c_2z.$

2568. $y^2+z^2=c_1,\ x(y-z)=c_2.$ **2569.** $xz=c_1,\ xy+z^2=c_2.$

2570. $x^2+y^2+z^2=c_1,\ yz=c_2x.$

2571. $y=c_1x,\ z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=c_2.$ **2572.** $x-y=c_1;\ z-t(x-y+1)=c_2;\ y-\ln(z-t)=c_3.$

2573. $x^2+y^2=c_1;\ (x+y)(x+y+z)=c_2.$ **2574.** $z=x-y;\ y(y-2x)^3=(x-y)^2.$ Zavisni.

2576. Problem se svodi na sistem jednačina

$$\frac{dx}{dt}=k_1(a-x-y),\quad \frac{dy}{dt}=k_2(a-x-y).$$

Vodeći računa o uslovima zadatka konačno se dobija

$$x=\frac{a}{4}(1-2^{-t}),\quad y=\frac{3a}{4}(1-2^{-t}).$$

2577. Problem se svodi na analizu rešenja sistema diferencijalnih jednačina

$$\frac{dN}{dt}=kN-k_1Nx,\quad \frac{dx}{dt}=k_2N$$

gde je x količina otrova, $\frac{dN}{dt}$ i $\frac{dx}{dt}$ respektivno brzina razmnožavanja bakterija i stvaranja otrova a k, k_1 i k_2 koeficijenti proporcionalnosti.

2578. $x=A\sin(at+\alpha);\ y=B\sin(at+\beta);\ z=ct+D.$

2579. Na osnovu Kirhovljevog zakona dolazimo do sistema jednačina

$$L_1\frac{di_1}{dt}+R_1i_1+M\frac{di_2}{dt}=E,\quad L_2\frac{di_2}{dt}+R_2i_2+M\frac{di_1}{dt}=0$$

gde je M koeficijent samoindukcije kola dok su ostale oznake standardne. Rešavajući ovaj sistem dolazimo do relacija

$$(1-k^2)\frac{di_1}{dt}+2\alpha_1i_1-\frac{4M\alpha_1\alpha_2}{R_1}i_2=\frac{2\alpha_1E}{R_1},\quad i_1=\frac{E}{R}\left\{1+e^{\sigma t}\left[\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\beta(1-k^2)}\operatorname{sh}\beta t-\operatorname{ch}\beta t\right]\right\},$$

gde je $k^2=\frac{M^2}{L_1L_2};\ 2\alpha_1=\frac{R_1}{L_1};\ 2\alpha_2=\frac{R_2}{L_2};\ \sigma=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{1-k}$, koje definišu tražena partikularna rešenja.

2580. $x=\frac{b}{\omega}+\frac{p}{\omega^2}+A\sin(\omega t+\alpha);\ y=\frac{a}{\omega}-\frac{pt}{\omega}+A\cos(\omega t+\alpha);\ z=\frac{1}{2}rt^2+ct,$

gde je

$$mp=e\frac{\partial v}{\partial x};\ mr=e\frac{\partial v}{\partial z};\ mw=-eH=-\frac{\partial v}{\partial z};\ \frac{\partial v}{\partial y}=0;$$

a, b i c su projekcije početne brzine.

2581. Matrična forma datog sistema je

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ -5e^t\sin t\end{bmatrix}\Leftrightarrow\frac{dx}{dt}=AX+F$$

a) $\dfrac{dX}{dt}=AX.$

Pošto karakteristična jednačina $\begin{vmatrix}(2-\lambda) & -1\\ -1 & (2-\lambda)\end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda+3=0$ ima različite korene $\lambda_1=1$, $\lambda_2=3$, to će rešenja matrične diferencijalne jednačine biti oblika

$$X_i=A_a^{(i)}e^{\lambda_i t},\quad A_a^{(i)}=\begin{bmatrix}\alpha_{1i}\\ \alpha_{2i}\end{bmatrix};\ (i=1,2)$$

Iz jednačine

$$(A-\lambda_i E)A_a^{(i)}=0,$$

odnosno ekvivalentnog homogenog sistema

$$(2-\lambda_i)\alpha_{1i}-\alpha_{2i}=0$$
$$-\alpha_{1i}+(2-\lambda_i)\alpha_{2i}=0$$

sledi:

$$\underline{\lambda_1=1};\ \alpha_{11}-\alpha_{21}=0\Rightarrow\alpha_{11}=1,\ \alpha_{21}=1;\ A_a^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};\ X_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^t;$$

$$\underline{\lambda_2=3};\ \alpha_{12}+\alpha_{22}=0\Rightarrow\alpha_{12}=1,\ \alpha_{22}=-1;\ A_a^{(2)}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix};\ X_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{3t}$$

Stoga je opšte rešenje

$$X_h=c_1X_1+c_2X_2\Leftrightarrow\begin{array}{l}x_1(t)=c_1e^t+c_2e^{3t}\\ x_2(t)=c_1e^t-c_2e^{3t}\end{array}$$

b) $\dfrac{dX}{dt}=AX+F.$

Iz sistema jednačina:

$$\dot{c}_1e^t-\dot{c}_2e^{3t}=0$$
$$\dot{c}_1e^t-c_2e^{3t}=-5e^t\sin t$$

formiranog varijacijom konstanti, nalazimo

$$\begin{array}{lcl}\dot{c}_1=-\dfrac{5}{2}\sin t & & c_1(t)=\dfrac{5}{2}\cos t+D_1\\ & \Rightarrow & \\ \dot{c}_2=-\dfrac{5t}{2_t}e^{-2t}\sin t & & c_2(t)=\dfrac{e^{-2t}}{2}(\cos t+2\sin t)+D_2.\end{array}$$

Prema tome opšte rešenje datog sistema glasi

$$x_1(t)=D_1e^t-D_2e^{3t}+e^t(2\cos t-\sin t)$$
$$x_2(t)=D_1e^t+De^{3t}+e^t(3\cos t+\sin t).$$

2582. Odgovarajuća matrična diferencijalna jednačina je

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

a karakteristična jednačina $\begin{vmatrix}(1-\lambda) & -1\\ 1 & (3-\lambda)\end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda+4=0$ ima dvostruki koren $\lambda_{1/2}=2$ $(m=2)$. Pošto je rang $(A-2E)=1>n-m=2-2=0$ to rešenje treba tražiti u obliku

$$X=\left(A_a^{(1)}+A_a^{(2)}t\right)e^{2t},$$

odnosno

$$X=\begin{bmatrix}\alpha_1+\beta_1t\\ \alpha_2+\beta_2t\end{bmatrix}e^{2t}\ \text{gde je}\ A_a^{(1)}=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix},\ A_a^{(2)}=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}.$$

Kako je

$$\frac{dX}{dt}=\begin{bmatrix}2\alpha_1+\beta_1+2\beta_1t\\ 2\alpha_2+\beta_2+2\beta_2t\end{bmatrix}e^{2t}$$

i

$$AX=\begin{bmatrix}\alpha_1-\alpha_2+t(\beta_1-\beta_2)\\ \alpha_1-3\alpha_2+t(\beta_1-3\beta_2)\end{bmatrix}e^{2t}$$

to iz jednačine

$$\frac{dX}{dt}=AX$$

sledi

$$(*)\qquad\begin{array}{l}2\alpha_1+\beta_1=\alpha_1-\alpha_2\\ 2\beta_1=\beta_1-\beta_2\end{array}\Rightarrow\begin{array}{l}\beta_2=-\beta_1\\ \alpha_2=-\alpha_1-\beta_1\end{array}$$

Pošto su parametri α_1 i β_1 neodređeni možemo ih označiti kao proizvoljne integracione konstante

$$\alpha_1=c_1\qquad\beta_1=c_2.$$

Na takav način dobijamo opšte rešenje sistema

$$x_1(t)=(c_1+c_2t)e^{2t}$$
$$x_2(t)=-(c_1+c_2+c_2t)e^{2t}$$

Istaknimo na kraju da u sistemu (*) nedostaju još dve jednačine $2\alpha_2+\beta_2=\alpha_1+3\alpha_2$, $2\beta_2=\beta_1+3\beta_2$, formalno dobijene iz identiteta. Lako je proveriti da dobijena rešenja zadovoljavaju i ove jednačine.

2583. $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -5\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}.$

Iz karakteristične jednačine $\begin{vmatrix}(1-\lambda) & -5\\ 2 & -(1+\lambda)\end{vmatrix}=\lambda^2+9=0$ dobijamo kompleksne korene $\lambda_{1/2}=\pm3i$. Odredimo rešenje sistema za $\lambda_1=3i$ u obliku

$$X=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}e^{3it}\qquad(i=\sqrt{-1})$$

Iz jednačine

$$(A-3\,i\,E)\,A_a=0,$$

odnosno sistema homogenih jednačina

$$(1-3\,i)\,\alpha_1-5\,\alpha_2=0$$
$$2\,\alpha_1-(1+3\,i)\,\alpha_2=0$$

dajući proizvoljnu vrednost jednoj nepoznatoj, na primer, $\alpha_2=1-3\,i$ nalazimo $\alpha_1=5$. Stoga je

$$X=\begin{bmatrix}5\\1-3\,i\end{bmatrix}e^{3it}=\begin{bmatrix}5\cos 3\,t+i\,5\sin 3\,t\\ \cos 3\,t+3\sin 3\,t+i\,(-3\cos 3\,t+\sin 3\,t)\end{bmatrix}$$

ili

$$X=\begin{bmatrix}5\cos 3\,t\\ \cos 3\,t+3\sin 3\,t\end{bmatrix}+i\begin{bmatrix}5\sin 3\,t\\ \sin 3\,t-3\cos 3\,t\end{bmatrix}.$$

Pošto su koeficijenti sistema diferencijalnih jednačina realni, njegova rešenja su i vektorske funkcije

$$X_1=\begin{bmatrix}5\cos 3\,t\\ \cos 3\,t+3\sin 3\,t\end{bmatrix},\quad X_2=\begin{bmatrix}5\sin 3\,t\\ \sin 3\,t-3\cos 3\,t\end{bmatrix},$$

koje su očevidno linearno nezavisne. Stoga je traženo opšte rešenje

$$X_2=c_1\,X_1+c_2\,X_2\Leftrightarrow \begin{array}{l}x_1(t)=5\,c_1\cos 3\,t+5\,c_2\sin 3\,t\\ x_2(t)=c_1(\cos 3\,t+3\sin 3\,t)+c_2(\sin 3\,t-3\cos 3\,t).\end{array}$$

2584. Matrični oblik sistema je

$$\begin{vmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\\ \dot x_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\2&-1&0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{vmatrix}.$$

Karakteristična jednačina

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&1\\1&1-\lambda&-1\\2&-1&-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&1\\2-\lambda&-\lambda&0\\2+\lambda-\lambda^2&-(1+\lambda)&0\end{vmatrix}=(\lambda-2)\,(1+\lambda)+\lambda\,(2+\lambda-\lambda^2)=$$

$$=(\lambda-2)\,(1+\lambda)-\lambda\,(\lambda-2)\,(\lambda+1)=(\lambda+1)\,(1-\lambda)\,(\lambda-2)=0$$

ima realne, različite korene: $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=2$ pa će rešenje sistema imati oblik

$$X_i=A_a^{(i)}\,e^{\lambda_i t}\qquad (i=1,2,3).$$

Iz jednačine

$$(A-\lambda_i E)\,A_a^{(i)}=0,$$

odnosno sistema

$$(1-\lambda_i)\,\alpha_{1i}-\alpha_{2i}+\alpha_{3i}=0,$$
$$\alpha_{1i}+(1-\lambda_i)\,\alpha_{2i}-\alpha_{3i}=0$$
$$2\,\alpha_{1i}-\alpha_{2i}-\lambda_i\,\alpha_{3i}=0$$

uzimajući u obzir ma koje dve jednačine, jer je $\operatorname{rang}(A-\lambda_i E)=2$, sledi:

$$\underline{\lambda_1=-1};\quad \begin{array}{l}2\,\alpha_{11}-\alpha_{21}+\alpha_{31}=0\\ \alpha_{11}+2\,\alpha_{21}-\alpha_{31}=0\end{array}\Rightarrow \alpha_{11}=1,\ \alpha_{21}=-3,\ \alpha_{31}=-5;$$

$$A_a^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\-3\\-5\end{pmatrix},\quad X_1=A_a^{(1)}\,e^{-t}$$

$$\underline{\lambda_2=1};\quad \begin{array}{l}-\alpha_{22}+\alpha_{32}=0\\ \alpha_{12}-\alpha_{32}=0\end{array}\Rightarrow \alpha_{12}=1,\ \alpha_{22}=1,\ \alpha_{32}=1;$$

$$A_a^{(2)}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\quad X_2=A_a^{(2)}\,e^{t}$$

$$\underline{\lambda_3=2};\quad \begin{array}{l}-\alpha_{13}-\alpha_{23}+\alpha_{33}=0\\ \alpha_{13}-\alpha_{23}-\alpha_{33}=0\end{array}\Rightarrow \alpha_{13}=1,\ \alpha_{23}=0,\ \alpha_{33}=1;$$

$$A_a^{(3)}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\quad X_3=A_a^{(3)}\,e^{2t}.$$

Opšte rešenje glasi:

$$X_h=c_1\,X_1+c_2\,X_2+c_3\,X_3\Leftrightarrow \begin{array}{l}x_1(t)=c_1\,e^{-t}+c_2\,e^{t}+c_3\,e^{2t}\\ x_2(t)=-3\,c_1\,e^{-t}+c_2\,e^{t}\\ x_3(t)=-5\,c_1\,e^{-t}+c_2\,e^{t}+c_3\,e^{2t}\end{array}$$

2585. Korespondentna matrična jednačina datog sistema je

$$\begin{vmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\\ \dot x_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\3&0&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{vmatrix}.$$

Karakteristična jednačina

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&-1\\1&1-\lambda&0\\3&0&1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&-1\\1&1-\lambda&0\\3+(1-\lambda)^2&(\lambda-1)&0\end{vmatrix}=(1-\lambda)\,[4+(1-\lambda)^2]=0$$

ima korene:

$$\lambda_1=1,\ \lambda_2=1+2\,i,\ \lambda_3=1-2\,i\qquad (i=\sqrt{-1}).$$

Rešenje ćemo tražiti u obliku

$$X_i=A_a^{(i)}\,e^{\lambda_i t}$$

Radi izračunavanja elemenata matrica $A_a^{(i)}$ koristićemo sistem jednačina

$$(1-\lambda_i)\,\alpha_{1i}-\alpha_{2i}-\alpha_{3i}=0$$
$$\alpha_{1i}+(1-\lambda_i)\,\alpha_{2i}=0$$
$$3\,\alpha_{1i}+(1-\lambda_i)\,\alpha_{3i}=0$$

iz koga sledi:

$$\underline{\lambda_1=1;}\quad \begin{matrix}-a_{21}-a_{31}=0\\ a_{11}=0\end{matrix}\Rightarrow a_{11}=0,\ a_{21}=1,\ a_{31}=-1;$$

$$A_\alpha^{(1)}=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix};\ X_1=A_\alpha^{(1)}e^t$$

$$\underline{\lambda_2=1+2i;}\quad \begin{matrix}-2ia_{12}-a_{22}-a_{32}=0\\ a_{12}-2ia_{22}=0\end{matrix}\Rightarrow a_{12}=2i,\ a_{22}=1,\ a_{32}=3;$$

$$A_\alpha^{(2)}=\begin{bmatrix}2i\\1\\3\end{bmatrix}.$$

Kako je

$$\begin{bmatrix}2i\\1\\3\end{bmatrix}e^{(1+2i)t}=\begin{bmatrix}2ie^{2it}\\e^{2it}\\3e^{2it}\end{bmatrix}e^t=e^t\begin{bmatrix}-2\sin 2t\\ \cos 2t\\ 3\cos 2t\end{bmatrix}+ie^t\begin{bmatrix}2\cos 2t\\ \sin 2t\\ 3\sin 2t\end{bmatrix},$$

to ćemo za preostala dva matrična rešenja uzeti

$$X_2=e^t\begin{bmatrix}-2\sin 2t\\ \cos 2t\\ 3\cos 2t\end{bmatrix},\quad X_3=e^t\begin{bmatrix}2\cos 2t\\ \sin 2t\\ 3\sin 2t\end{bmatrix}.$$

Prema tome opšte rešenje sistema glasi:

$$X_h=c_1X_1+c_2X_2+c_3X_3\Leftrightarrow \begin{matrix}x_1(t)=-2c_2e^t\sin 2t+c_3e^t\,2\cos 2t\\ x_2(t)=c_1e^t+c_2e^t\cos 2t+c_3e^t\sin 2t\\ x_3(t)=-c_1e^t+3c_2e^t\cos 2t+3c_3e^t\sin 2t.\end{matrix}$$

2586. Odgovarajuća matrična jednačina je

$$\begin{bmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\\ \dot x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-1&0\\3&1&-1\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}.$$

Karakteristična jednačina

$$\begin{vmatrix}4-\lambda&-1&0\\3&1-\lambda&-1\\1&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)^3=0,$$

ima koren $\lambda=2$ trećeg reda. Pošto je za $\lambda=2$

$$\begin{bmatrix}2&-1&0\\3&-1&-1\\1&0&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

to je na osnovu poznatog stava, rang $(A-2E)=2>n-m=3-3=0$. Prema tome, rešenje sistema treba tražiti u obliku

$$X_h=\left(A_\alpha^{(1)}+A_\alpha^{(2)}t+A_\alpha^{(3)}t^2\right)e^{2t},$$

odnosno

$$X_h=\begin{bmatrix}a_1+b_1t+c_1t^2\\a_2+b_2t+c_2t^2\\a_3+b_3t+c_3t^2\end{bmatrix}\quad\text{gde je}\quad A_\alpha^{(1)}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix},\ A_\alpha^{(2)}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix},\ A_\alpha^{(3)}=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}.$$

Iz identičnosti

$$e^{2t}\begin{bmatrix}2a_1+b_1+t(2b_1+2c_1)+2c_1t^2\\2a_2+b_2+t(2b_2+2c_2)+2c_2t^2\\2a_3+b_3+t(2b_3+2c_3)+2c_3t^2\end{bmatrix}\equiv e^{2t}\begin{bmatrix}4a_1-a_2+t(4b_1-b_2)+t^2(4c_1-c_2)\\3a_1+a_2-a_3+t(3b_1+b_2-b_3)+t^2(3c_1+c_2-c_3)\\a_1+a_3+t(b_1+b_3)+t^2(c_1+c_3)\end{bmatrix}$$

sledi

$$\begin{matrix}2a_1+b_1=4a_1-a_2\\2b_1+2c_1=4b_1-b_2\\2c_1=4c_1-c_2\\2a_2+b_2=3a_1+a_2-a_3\\2b_2+2c_2=3b_1+b_2-b_3\\2c_2=3c_1+c_2-c_3\end{matrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{matrix}a_2=2a_1-b_1\\b_2=2b_1-2c_1\\c_2=2c_1\\a_3=a_1-b_1+2c_1\\b_3=b_1-2c_1\\c_3=c_1\end{matrix}$$

(nenapisane tri jednačine su posledice ovog sistema). S obzirom na proizvoljnost parametara a_1, b_1 i c_1, možemo staviti $a_1=D_1$; $b_1=D_2$; $c_1=D_3$, pa je opšte rešenje

$$x_1(t)=(D_1+D_2t+D_3t^2)e^{2t}$$

$$x_2(t)=[2D_1-D_2+(2D_2-2D_3)t+2D_3t^2]e^{2t}$$

$$x_3(t)=[D_1-D_2+2D_3+(D_2-2D_3)t+D_3t^2]e^{2t}.$$

2587. $$\begin{bmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\\ \dot x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}.$$

Karakteristična jednačina

$$\begin{vmatrix}-\lambda&1&1\\1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda^3-3\lambda-2)=-(\lambda-2)(\lambda+1)^2=0$$

ima korene $\lambda_1=2$; $\lambda_2=\lambda_3=-1$ $(m=2)$.

Kako je za $\lambda=-1$

$$A+E=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

to je rang $(A+E)=1=n-m=3-2$. Zbog toga rešenja treba tražiti u obliku

$$X_1=A_\alpha^{(1)}e^{2t}$$

$$X_2=A_\alpha^{(2)}e^{-t}$$

Iz sistema jednačina

$$-\lambda_i a_{1i}+a_{2i}+a_{3i}=0$$

$$a_{1i}-\lambda_i a_{2i}+a_{3i}=0$$

sledi

$$\underline{\lambda_1=2;}\quad \begin{matrix}-2a_{11}+a_{21}+a_{31}=0\\ a_{11}-2a_{21}+a_{31}=0\end{matrix}\ \Rightarrow a_{11}=1,\ a_{21}=1,\ a_{31}=1;\quad A_a^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};\quad X_1=A_a^{(1)}e^{2t}$$

$\underline{\lambda_2=-1;}$ $a_{12}+a_{22}+a_{32}=0 \Rightarrow a_{12}=-a_{22}-a_{32}$.

Zbog proizvoljnosti parametara a_{22}, a_{32} stavićemo $a_{22}=c_2$, $a_{32}=c_3$. Stoga je

$$X_2=\begin{bmatrix}-c_2 & -c_3\\ c_2 & \\ & c_3\end{bmatrix}e^{-t}$$

odnosno, opšte rešenje

$$X_h=c_1X_1+X_2 \Leftrightarrow \begin{matrix}x_1(t)=c_1e^{2t}-(c_2+c_3)e^{-t}\\ x_2(t)=c_1e^{2t}+c_2e^{-t}\\ x_3(t)=c_3e^{-t}+c_1e^{2t}.\end{matrix}$$

2588. Matrična forma datog sistema je

$$\begin{bmatrix}\dot x\\ \dot y\\ \dot z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix},$$

a karakteristična jednačina

$$\begin{vmatrix}-(1+\lambda) & 1 & 1\\ 1 & -(1+\lambda) & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(4-\lambda^2)=0$$

ima korene $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=2$. U tom slučaju rešenje sistema treba tražiti u obliku

$$X_i=A_a^{(i)}e^{\lambda_i t}\qquad (i=1,2,3).$$

Iz sistema linearnih jednačina

$$-(1+\lambda_i)a_{1i}+a_{2i}+a_{3i}=0$$

$$a_{1i}-(1+\lambda_i)a_{2i}+a_{3i}=0$$

$$a_{1i}+a_{2i}+(1-\lambda_i)a_{3i}=0$$

sledi:

$$\underline{\lambda_1=-2;}\quad \begin{matrix}a_{11}+a_{21}+a_{31}=0\\ a_{11}+a_{21}+3a_{31}=0\end{matrix}\ \Rightarrow a_{11}=1,\ a_{21}=-1,\ a_{31}=0;\quad A_a^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix};$$

$X_1=A_a^{(1)}e^{-2t}$.

$$\underline{\lambda_2=-1;}\quad \begin{matrix}a_{22}+a_{32}=0\\ a_{12}+a_{32}=0\end{matrix}\ \Rightarrow a_{12}=1,\ a_{22}=1,\ a_{32}=-1;\quad A_a^{(2)}=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

$X_2=A_a^{(2)}e^{-t}$.

$$\underline{\lambda_3=2;}\quad \begin{matrix}-3a_{13}+a_{23}+a_{33}=0\\ a_{13}-3a_{23}+a_{33}=0\end{matrix}\ \Rightarrow a_{13}=1,\ a_{23}=1,\ a_{33}=2,\ A_a^{(3)}=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix};$$

$X_3=A_a^{(3)}e^{2t}$.

Opšte rešenje sistema je

$$X_h=c_1X_1+c_2X_2+c_3X_3 \Leftrightarrow \begin{matrix}x(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{-t}+c_3e^{2t}\\ y(t)=-c_1e^{-2t}+c_2e^{-t}+c_3e^{2t}\\ z(t)=-c_2e^{-t}+2c_3e^{2t}.\end{matrix}$$

Iz datih uslova $x|_{t=0}=1$, $y|_{t=0}=z|_{t=0}=0$, nalazimo

$$c_1+c_2+c_3=1$$

$$-c_1+c_2+c_3=0$$

$$-c_2+2c_3=0$$

odnosno $c_1=\frac{1}{2}$, $c_2=\frac{1}{3}$, $c_3=\frac{1}{6}$.

Prema tome tražena partikularna rešenja biće

$$x_p(t)=\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{6}e^{2t}$$

$$y_p(t)=-\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{6}e^{2t}$$

$$z_p(t)=-\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t}.$$

2589. Datom nehomogenom sistemu odgovara matrična diferencijalna jednačina

$$\begin{bmatrix}\dot x\\ \dot y\\ \dot z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2-t\\ 1\\ 1-t\end{bmatrix}\Leftrightarrow \frac{dx}{dt}=AX+F.$$

Karakteristična jednačina

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & -2\\ -1 & -\lambda & 0\\ 1 & 1 & -(1+\lambda)\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda^2+1)=0$$

ima korene $\lambda_1=1$, $\lambda_{2/3}=\pm i$. Zbog toga, rešenja homogenog dela sistema imaju strukturu

$$X_i=A_a^{(i)}e^{\lambda_i t}.$$

Iz odgovarajućeg sistema algebarskih jednačina

$$(2-\lambda_i)\,\alpha_{1i}+\alpha_{2i}-2\,\alpha_{3i}=0$$
$$-\alpha_{1i}-\lambda_i\,\alpha_{2i}=0$$
$$\alpha_{1i}+\alpha_{2i}-(1+\lambda_i)\,\alpha_{3i}=0$$

dobijamo

$$\underline{\lambda_1=1;}\quad \begin{array}{l}\alpha_{11}+\alpha_{21}-2\alpha_{31}=0\\ -\alpha_{11}-\alpha_{21}=0\end{array} \Rightarrow \alpha_{11}=1,\ \alpha_{21}=-1,\ \alpha_{31}=0;\quad A_\alpha^{(1)}=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

$$X_1=A_\alpha^{(1)}\,e^t$$

$$\underline{\lambda_2=i;}\quad \begin{array}{l}(2-i)\,\alpha_{12}+\alpha_{22}-\alpha_{32}=0\\ -\alpha_{12}-i\,\alpha_{22}=0\end{array} \Rightarrow \alpha_{12}=i,\ \alpha_{22}=-1,\ \alpha_{32}=i.$$

Kako je

$$\begin{bmatrix}i\\-1\\i\end{bmatrix}e^{it}=\begin{bmatrix}i\cos t-\sin t\\-\cos t-i\sin t\\i\cos t-\sin t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sin t\\-\cos t\\-\sin t\end{bmatrix}+i\begin{bmatrix}\cos t\\-\sin t\\\cos t\end{bmatrix}$$

to će opšte rešenje homogenog dela datog sistema biti

$$X_h=c_1\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}e^t+c_2\begin{bmatrix}\sin t\\\cos t\\\sin t\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}\cos t\\-\sin t\\\cos t\end{bmatrix}$$

odnosno u skalarnom obliku

(*)
$$x(t)=c_1\,e^t+c_2\sin t+c_3\cos t$$
$$y(t)=-c_1\,e^t+c_2\cos t-c_3\sin t$$
$$z(t)=c_2\sin t+c_3\cos t.$$

Korespondentni sistem jednačina po $\dfrac{dc_i}{dt}$ $(i=1, 2, 3)$, dobijen varijacijom konstanti, glasi

$$\dot c_1\,e^t+\dot c_2\sin t+\dot c_3\cos t=2-t$$
$$-\dot c_1\,e^t+\dot c_2\cos t-\dot c_3\sin t=1$$
$$\dot c_2\sin t+\dot c_3\cos t=1-t.$$

čija su rešenja

$$\dot c_1=e^{-t}$$
$$\dot c_2=2\cos t+(1-t)\sin t$$
$$\dot c_3=-2\sin t+(1-t)\cos t.$$

Odatle, integracijom nalazimo

(**)
$$c_1(t)=-e^{-t}+D_1,$$
$$c_2(t)=\sin t-\cos t+t\cos t+D_2,$$
$$c_3(t)=\cos t+\sin t-t\sin t+D_3.$$

Putem zamene (**) u sistemu (*) dolazimo do opšteg rešenja datog sistema

$$x(t)=D_1\,e^t+D_2\sin t+D_3\cos t,$$
$$y(t)=-D_1\,e^t+D_2\cos t-D_3\sin t+t,$$
$$z(t)=D_2\sin t+D_3\cos t+1.$$

2590. $x=c_1\,e^{-t}+4\,c_2\,e^{2t}+3\,e^{-2t},$ $y=c_1\,e^{-t}+c_2\,e^{2t}+4\,e^{-2t}.$

2591. $x=c_1\,e^{-t}+2\,c_2\,e^{2t}-\cos t+3\sin t,$ $y=-c_1\,e^{-t}+c_2\,e^{2t}+2\cos t-\sin t.$

2592. $x=c_1\,e^{2t}+c_2\,e^{-2t}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{2}{3}\,e^t,$ $y=c_1 e^{2t}-3\,c_2 e^{-2t}-\dfrac{3}{4}-e^t.$

2593. $x=c_1\,e^t+3\,c_2\,e^{2t}+\cos t-2\sin t,$ $y=c_1\,e^t+2\,c_2\,e^{2t}+2\cos t-2\sin t.$

2594. $x=c_1\,e^t+c_2\,e^{3t}+te^t-e^{4t},$ $y=-c_1\,e^t+c_2\,e^{3t}-(t+1)\,e^t-2\,e^{4t}.$

2595. $x=c_1\cos 2t-c_2\sin 2t+2t+2,$ $y=(c_1+2\,c_2)\cos 2t+(2\,c_1-c_2)\sin 2t+10\,t.$

2596. $x=t^2+t+c_1\,e^{2t}+c_2\,e^{3t},$ $y=t+1+2\,c_1\,e^{2t}.$

2597. $x=c_1\,e^t+2\,c_2\,e^{2t}-e^t\ln(e^{2t}+1)+2\,e^{2t}\operatorname{arc\,tg} e^t,$ $y=c_1\,e^t+3\,c_2\,e^{2t}-e^t\ln(e^{2t}+1)+3\,e^{2t}\operatorname{arc\,tg} e^t.$

2598. $x=c_1+2\,c_2\,e^{-t}+2\,e^{-t}\ln|e^t-1|,$ $y=-2\,c_1-3\,c_2\,e^{-t}-3\,e^{-t}\ln|e^t-1|.$

2599. $x=c_1\cos t+c_2\sin t+t(\cos t+\sin t)+(\cos t-\sin t)\ln|\cos t|,$ $y=(c_1-c_2)\cos t+(c_1+c_2)\sin t+2\cos t\ln|\cos t|+2\,t\sin t.$

2600. $x=(c_1+2\,c_2\,t-8\,t^{5/2})\,e^t$ $y=(c_1+2\,c_2\,t-c_2-8\,t^{5/2}+10\,t^{3/2})\,e^t.$

2601. $x=2\,(2\,e^t+e^{-t})$ $y=-e^t-e^{-t}$

2602. $x=(1-2\,t)\,e^{-2t},$ $y=te^{-2t}.$

2603. $x=-\dfrac{4}{3}\,t-\dfrac{7}{9},$ $y=\dfrac{1}{3}\,t-\dfrac{5}{9}.$

2604. $x=e^{5t}+e^{3t},$ $y=6\,e^{5t}-7\,e^{3t}.$

2605. $x=\cos t,$ $y=-\sin t.$

2606. $x=c_1\,t^2+c_2\,t^{-2}-\dfrac{2}{3}\,t,$ $y=\dfrac{1}{3}\,c_1\,t^2-c_2\,t^{-2}-\dfrac{1}{3}\,t.$

2607. $x=c_1\,t^4+c_2\,t^{-4},$ $y=10\,c_1\,t^4+2\,c_2\,t^{-4}.$

2608. $x=c_1e^t+e^{-\frac{t}{2}}\left[c_2\cos\frac{t\sqrt{3}}{2}+c_3\sin\frac{t\sqrt{3}}{2}\right],$

$y=c_1e^t+e^{-\frac{t}{2}}\left[c_2\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)+c_3\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)\right],$

$z=c_1e^t+e^{-\frac{t}{2}}\left[c_2\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}-\frac{2\pi}{3}\right)+c_3\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}-\frac{2\pi}{3}\right)\right].$

2609. $x=4c_1+c_2(t+1)e^{-3t}+c_3e^{-3t},$ $y=4c_1-c_2(2t+1)e^{-3t}-2c_3e^{-3t},$ $z=c_1+c_2te^{-3t}+c_3e^{-3t}.$

2610. $x=c_1+3c_2e^{2t},$ $y=-2c_2e^{2t}+c_3e^{-t},$ $z=c_1+c_2e^{2t}-2c_3e^{-t}.$

2611. $x=c_2e^{2t}+c_3e^{3t},$ $y=c_1e^t+c_2e^{2t},$ $z=c_1e^t+c_2e^{2t}+c_3e^{3t}.$

2612. $x=c_1e^t+c_2e^{2t}+c_3e^{5t},$ $y=c_1e^t-2c_2e^{2t}+c_3e^{5t},$ $z=-c_1e^t-3c_2e^{2t}+3c_3e^{5t}.$

2613. $x=c_1e^t+c_3e^{-t},$ $y=c_1e^t+c_2e^{2t},$ $z=2c_2e^{2t}-c_3e^{-t}.$

2614. $x=c_2\cos t+(c_2+2c_3)\sin t,$ $y=2c_1e^t+c_2\cos t+(c_2+2c_3)\sin t,$ $z=c_1e^t+c_3\cos t-(c_2+c_3)\sin t.$

2615. $x=c_1e^{2t}+(c_2+c_3)e^{3t},$ $y=c_1e^{2t}+c_2e^{3t},$ $z=c_1e^{2t}+c_3e^{3t}.$

2616. $x=c_1+c_2e^t,$ $y=3c_1+c_3e^t,$ $z=-c_1+(c_2-c_3)e^t.$

2617. $x=c_1e^{3t}+c_2e^{-t},$ $y=-c_1e^{3t}+(c_2+2c_3)e^{-t},$ $z=-3c_1e^{3t}+c_3e^{-t}.$

2618. $x=c_1e^{2t}+c_3e^{-5t},$ $y=c_2e^{2t}+3c_3e^{-5t},$ $z=(c_1-2c_2)e^{2t}+2c_3e^{-5t}.$

2619. $x=(c_1+c_2t)e^t+c_3e^{2t},$ $y=(c_1-2c_2+c_2t)e^t,$ $z=(c_1-c_2+c_2t)e^t+c_3e^{2t}.$

2620. $x=(c_2+c_3t)e^{-t},$ $y=2c_1e^t-(2c_2+c_3+2c_3t)e^{-t},$ $z=c_1e^t-(c_2+c_3+c_3t)e^{-t}.$

2621. $x=2c_1+3c_2e^{2t}+4c_3e^{-t},$ $y=2c_1+2c_2e^{2t}+c_3e^{-t},$ $z=3c_1+3c_2e^{2t}+c_3e^{-t}.$

2622. $x=c_1+c_2e^{2t}+c_3e^{-2t},$ $y=\frac{1}{3}c_2e^{2t}-c_3e^{-2t},$ $z=\frac{2}{3}c_2e^{2t}+2c_3e^{-2t}.$

2623. $x=c_1e^{3t}+c_2e^{-2t},$ $y=\frac{3}{2}c_1e^{3t}-c_2e^{-2t}+c_3e^{-t},$ $z=\frac{3}{2}c_1e^{3t}-c_2e^{-2t}-c_3e^{-t}.$

2624. $x=c_1e^{-2t}+c_2\sin4t+c_3\cos4t,$ $y=-\frac{1}{4}c_1e^{-2t}+\frac{1}{2}c_2\cos4t-\frac{1}{2}c_3\sin4t,$ $z=-\frac{1}{4}c_1e^{-2t}+c_2\sin4t+c_3\cos4t.$

2625. $x=c_1e^t+c_2e^{2t}+c_3e^{3t},$ $y=\frac{1}{2}c_1e^t+\frac{1}{2}c_3e^{3t},$ $z=-c_1e^t-c_2e^{2t}-\frac{3}{2}c_3e^{3t}.$

2626. $x=c_2+2c_3e^{2t},$ $y=-(c_1+c_2)-c_2t+c_3e^{2t},$ $z=c_1+c_2t+c_3e^{2t}.$

2627. $x=c_1+c_2e^t+c_3e^{-t},$ $y=c_1+c_3e^{-t}$ $z=-c_1-c_2e^t-2c_3e^{-t}.$

2628. $x=c_1\sin2t+c_2\cos2t+c_3,$ $y=t+(c_1+c_2)\cos2t+(c_1-c_2)\sin2t,$ $z=3+(c_1+c_2)\sin2t+(c_2-c_1)\cos2t.$

2629. $x=c_1+c_2t,$ $y=c_3t^2-\frac{3}{4}c_1,$ $z=\frac{5}{4}c_1-c_2t+c_3t^2.$

2630. $x=c_1t+c_2t^2+c_3t^3,$ $y=\sin t-c_1t-c_3t^3,$ $z=\cos t-c_1t-c_2t^2.$

2631. Rešenje $y=y_0e^{-a^2(t-t_0)}$ asimptotski je stabilno, pošto je za $t>t_0$ ako je $|y_0-\bar{y}_0|<\varepsilon e^{-a^2t_0}$ i $\lim\limits_{t\to\infty}e^{-a^2(t-t_0)}|y_0-\bar{y}_0|=0.$

2632. Rešenje $y=y_0e^{a^2(t-t_0)}$ nije stabilno, pošto nije moguće izabrati tako malo $\delta>0$, da iz nejednakosti $|\bar{y}_0-y_0|<\delta(\varepsilon)$ sledi

$$|\bar{y}_0e^{a^2(t-t_0)}-y_0e^{a^2(t-t_0)}|<\varepsilon$$

ili

$$e^{a^2(t-t_0)}|\bar{y}_0-y_0|<\varepsilon$$

za svako $t>t_0$.

2633. Stabilno. 2634. Stabilno. 2635. Karakteristična jednačina je $\begin{vmatrix}2-\lambda & 0\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0,$ odnosno $(2-\lambda)(1-\lambda)=0\Rightarrow\lambda=1,\ \lambda_2=2$. Pošto su koreni realni, i različiti i istog znaka to je singularna tačka uzao.

2636. Koreni karakteristične jednačine

$\begin{vmatrix}1-\lambda & -2\\ 4 & -3-\lambda\end{vmatrix}=0$ odnosno $\lambda^2+2\lambda+5=0$ su $\lambda=-1\pm2i$. Singularna tačka je fokus.

2637. Sedlo. 2638. Fokus. 2639. Uzao. 2640. Singularni uzao.

2641. Fokus. 2642. Sedlo. 2643. Singularne tačke popunjavaju pravu liniju.

2644. $(-2,\ -1)$ — uzao. 2645. $(1,\ -2)$ — fokus.

2647. $(0,\ 1)$ — centar; $(0,\ -1)$ — sedlo.

2648. $(0,\ 0)$ — fokus; $(0,\ 8)$ — sedlo; $(3,\ -1)$ — sedlo; $(7,\ 1)$ — uzao.

2649. Karakteristična jednačina je $\begin{vmatrix}1-k & -1\\ 2 & 3-k\end{vmatrix}=0$ ili $k^2-4k+5=0$, čiji su koreni $k_{1,2}=2\pm i$ pa je radi toga $x=0,\ y=0$ nestabilni fokus.

2650. Karakteristična jednačina je

$$\begin{vmatrix} -k & 2 & -1 \\ 3 & -k & -2 \\ 5 & -4 & -k \end{vmatrix} = 0$$

ili $k^3 - 9k + 9 = 8$. Lako je videti da je jedan koren jednačine $k_1 = 1$, pa pošto je njegov realni deo pozitivan možemo utvrditi da je tačka mirovanja $x=0$, $y=0$, $z=0$ nestabilna.

2651. Stabilni fokus. **2652.** Stabilni uzao. **2653.** Tačka (0, 0, 0) je nestabilni uzao.

2654. Nestabilni uzao. **2655.** Tačka mirovanja je nestabilna. **2656.** Sedlo.

2657. Centar. **2658.** Centar. **2659.** Nestabilni fokus.

2660. Tačka (0, 0, 0) je stabilna. **2661.** Tačka (0, 0, 0) je nestabilna.

2662. $a<0$. **2663.** $a<-\frac{1}{2}$.

2666. Nelinearni članovi zadovoljavaju uslove teorema 1 i 2. Ispitujemo stabilnost tačke mirovanja sistema prve aproksimacije

$$\dot{x} = -x + y,$$
$$\dot{y} = x - 3y.$$

Karakteristična jednačina

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ima korene $\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}$. Na osnovu teoreme 1, pošto koreni imaju negativan realni deo, tačka mirovanja (0, 0) sistema je asimptotski stabilna.

2667. Nestabilna. **2668.** Stabilna. **2669.** Stabilna. **2670.** Nestabilna.

2671. Stabilna. **2672.** Asimptotski stabilna. **2673.** Stabilna.

2674. Ispitivanje po prvoj aproksimaciji nije moguće. Po drugom metodu Ljapunova, koji nije naveden u paragrafu, utvrđuje se da je tačka (0, 0) asimptotski stabilna.

2675. Tačka mirovanja je stabilna. **2676.** Stabilno.

2679. Karakteristična jednačina sistema je

$$f(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 + 7\lambda^3 + 4\lambda^2 + 10\lambda + 3 = 0.$$

Ovde je

$$a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = 7,\ a_3 = 4,\ a_4 = 10,\ a_5 = 3$$

Dijagonalni minori su:

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\Delta_4 = 3\cdot 8 = 24 > 0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 10 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 10\Delta_3 - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 3 & 10 & 7 \end{vmatrix} = 50 - 3(49 + 3 - 10 - 28) = 8 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 5 > 0,\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3 > 0,\quad \Delta_1 = 1 > 0.$$

Tako se dobija da je

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 > 0,\ \Delta_4 > 0,\ \Delta_5 > 0.$$

Otuda sledi da je trivijalno rešenje $y \equiv 0$ jednačine asimptotski stabilno.

2680. Stabilno. **2681.** Stabilno. **2682.** Nestabilno. **2683.** Za $a > \frac{3}{2}$.

2684. Rešenje je nestabilno za svako a. **2685.** Za $a > \frac{13}{6}$.

2686. Karakteristična jednačina ima oblik

$$\begin{vmatrix} -k & 0 & 1 \\ -3 & -k & 0 \\ a & 2 & -1-k \end{vmatrix} = 0$$

ili $k^3 + k^2 - ak + 6 = 0$. Na osnovu Hurwitzovog kriterijuma, uslovi asimptotske stabilnosti su $a_1 > 0$, $a_1 a_2 - a_3 > 0$, $a_3 > 0$.

Ti uslovi se u datom slučaju svode na nejednakost

$$-a - 6 > 0 \Rightarrow a < -6.$$

2687. $\beta < 2\alpha$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. **2688.** Za svako (α, β) iz oblasti definisane nejednakostima

$$\alpha\beta > 3;\ \alpha > 0;\ \beta > 0.$$

2689. Rešenje je nestabilno za svako (α, β)

$$\alpha\beta > 3;\ \alpha > 0;\ \beta > 0.$$

2690. Kao početnu aproksimaciju uzimamo $y_0(x) = 1$. Pošto je

$$y = 1 + \int_0^x (x - y)\,dx$$

to je

$$y_1 = 1 + \int_0^x (x-1)\,dx = 1 - x + \frac{x^2}{2}.$$

Analogno je

$$y_2 = 1 + \int_0^x \left(x - 1 + x - \frac{x^2}{2}\right)dx = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{6}.$$

Na sličan način dobijamo

$$y_3 = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24}, \quad y_4 = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{120} \quad \text{itd.}$$

Ocenimo grešku, na primer, četvrte aproksimacije $y_4 = y_4(x)$. Razmotrimo neku oblast

$$R\,\{0 < x < a,\ |y| < b\}$$

gde je desna strana date jednačine (1) $f(x, y) = x - y$ definisana i neprekidna. Pošto je funkcija (1) neprekidna na celoj ravni xOy onda za a i b mogu biti uzeti proizvoljni pozitivni brojevi.

Za $(x, y) \in R$ imamo

$$|f(x, y)| < |x - y| < |x| + |y| < a + b = M.$$

Otuda uzimajući $a > 1$ iz odgovarajuće formule dobijamo

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) = \min\left(a, \frac{b}{a+b}\right) = \frac{b}{a+b}.$$

Uzevši određenosti radi $a = 1$ i $b = 1$ imamo $k = \frac{1}{2}$.

Lipschitzova konstanta za oblast R u datom slučaju će biti

$$N = \max|f_y'(x, y)| = 1.$$

Koristeći obrazac za ocenu greške kada je $0 < x < \frac{1}{2}$, konačno dobijamo

$$\varepsilon_4(x) = |y(x) - y_4(x)| < 2 \cdot 1^4 \cdot \frac{x^5}{5!} = \frac{x^5}{60}$$

i otuda

$$\varepsilon_4 = \max \varepsilon_4(x) = \frac{1}{60 \cdot 32} = \frac{1}{1920}.$$

Primetimo, na kraju, da je data diferencijalna jednačina linearna sa konstantnim koeficijentima, te otuda tačno rešenje, koje zadovoljava zadate početne uslove, može biti nađeno elementarnim putem. U specijalnom slučaju možemo u tu svrhu koristiti metodu uzastopnih aproksimacija. Nije teško videti da je

$$y_n = 1 - x + 2\left[\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}\right] + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad (n = 3, 4, 5, \ldots)$$

te je otuda

$$y = \lim_{n \to \infty} y_n = 1 - x + 2\left[e^{-x} - (1 - x)\right] = 2e^{-x} - (1 - x)$$

pri čemu je konvergencija uniformna na proizvoljnom odsečku $[0, a]$.

2691. $y_1 = 1 + \int_0^x (x + y_1 y_2)\,dx; \quad y_2 = \int_0^x (x^2 - y_1^2)\,dx.$

Otuda stavljajući

$$y_1^{(0)} = 1, \quad y_2(0) = 0,$$

dobijamo

$$y_1^{(1)} = 1 + \int_0^x (x + 0)\,dx = 1 + \frac{x^2}{2};$$

$$y_2^{(1)} = \int_0^x (x^2 - 1)\,dx = -x + \frac{x^3}{3};$$

$$y_1^{(2)} = 1 + \int_0^x \left[x + \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)\left(-x + \frac{x^2}{3}\right)\right] dx = 1 - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{36};$$

$$y_2^{(2)} = \int_0^x \left[x^2 - \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{4}\right)\right] dx = -x - \frac{x^5}{20}, \quad \text{itd.}$$

2692. Pokazaćemo početak procesa.

Izračunavanje y_1.

Uzastopno nalazimo

$k_1^{(0)} = (0 + 1) \cdot 0{,}1 = 0{,}1;$

$k_2^{(0)} = [0{,}05 + (1 + 0{,}05)]\,0{,}1 = 0{,}11;$

$k_3^{(0)} = [0{,}05 + (1 + 0{,}055)] \cdot 0{,}1 = 0{,}1105;$

$k_4^{(0)} = [0{,}1 + (1 + 0{,}1105)] \cdot 0{,}1 = 0{,}12105.$

Otuda je

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(0{,}1 + 2 \cdot 0{,}11 + 2 \cdot 0{,}1105 + 0{,}12105) = 0{,}1103$$

i

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0{,}1103 = 1{,}1103.$$

Analogno se izračunavaju i sledeće aproksimacije. Rezultati izračunavanja dati su u tablici 1. Na taj način je $y(0{,}5) = 1{,}7974$. Poređenja radi dajemo tačno rešenje

$$y = 2e^x - x - 1 \Rightarrow y(0{,}5) = 2\sqrt{e} - 1{,}5 = 1{,}79744\cdots)$$

2693. Stavljajući $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ datu jednačinu možemo zapisati u obliku

$$\dot{\theta} = \omega$$

$$\dot{\omega} = -0{,}2\,\omega - 10 \sin\theta$$

pri čemu

$$\theta_0 = 0{,}3, \quad \omega_0 = 0.$$

Izabiramo korak

$$h = \Delta t = 0{,}1$$

stavljamo

$$f = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} k^{(1)} \\ k^{(2)} \end{pmatrix}$$

gde je

$$\dot{\theta} = \omega; \quad \dot{\omega} = -0{,}2\,\omega - 10 \sin\theta$$

a komponente $k^{(1)}$, $k^{(2)}$ određuju se iz odgovarajućih formula. Rezultati izračunavanja dati su u tablici 2.

Tablica 1

i	x	y	$k=0,1\,(x+y)$	Δy
0	0 0,05 0,05 0,1	1 1,05 1,055 1,1105	0,1 0,11 0,1105 0,1210	0,1000 0,2200 0,2210 0,1210
				$\frac{1}{6}\cdot 0{,}6620=0{,}1103$
1	0,1 0,15 0,15 0,2	1,1103 1,1708 1,1763 1,2429	0,1210 0,1321 0,1326 0,1443	0,1210 0,2642 0,2652 0,1443
				$\frac{1}{6}\cdot 0{,}7947=0{,}1324$
2	0,2 0,25 0,25 0,3	1,2427 1,3149 0,3209 1 3998	0,1443 0,1565 0,1571 0,1700	0,1443 0,3130 0,3142 0,1700
				$\frac{1}{6}\cdot 0{,}9415=0{,}1569$
3	0,3 0,35 0,35 0,4	1,3996 1,4846 1,4904 1,5836	0,1700 0,1835 0,1840 0,1984	0,1700 0,3670 0,3680 0,1984
				$\frac{1}{6}\cdot 1{,}1034=0{,}1840$
4	0,4 0,45 0,45 0,5	1,5836 1,6828 1,6902 1,7976	0,1984 0,2133 0,2140 0,2298	0,1984 0,4266 0,4280 0,2298
				$\frac{1}{6}\cdot 1{,}2828=0{,}2138$
5	0,5	1,7974		

Tablica 2

i	t	θ	ω	$k^{(1)}=0{,}1\,\dot\theta$	$k^{(2)}=0{,}1\,\dot\omega$	$\Delta\theta$	$\Delta\omega$
0	0 0,05 0,05 0,1					0 —0,0296 —0,0292 —0,0286	—0,2955 —0,5852 —0,5710 —0,2810
						$-0{,}0874\cdot\frac{1}{6}=$ $=-0{,}0146$	$-1{,}327\cdot\frac{1}{6}=$ $=-0{,}2888$
1	0,1 0,15 0,15 0,2						
2	0,2 0,25 0,25 0,3				—0,2301 —0,2013 —0,1960 —0,1633		—0,2301 —0,4026 —0,3920 —0,1633
						$-0{,}3889\cdot\frac{1}{6}=$ $=-0{,}0648$	$-1{,}1895\cdot\frac{1}{6}=$ $=-0{,}1980$
3	0,3	0,1786	—0,7418	—0,0742	—0,1647		

2694. Uzimamo $h=0{,}1$; pošto se dobija greška rezultata reda $h^4=0{,}0001$, to je zadata tačnost praktično dostignuta. Izračunavanje izvodimo sa jednim rezervnim znakom. Vrednosti y_0 i y_0' poznate su neposredno iz početnog uslova i same jednačine

$$y_0=1,\ y_0'=1.$$

Ostale tri vrednosti

$$y_i=y(x_i)\ (i=1,\ 2,\ 3)$$

nalazimo kojim bilo drugim metodom numerične integracije diferencijalnih jednačina. Iz date jednačine dobijamo odgovarajuće vrednosti

$$y_i'=y'(x_i)\ (i=1,\ 2,\ 3).$$

U tablici 1, zad. 2692 date su te vrednosti nađene Runge-Kuttovom metodom.

Početni odrezak za Milneov metod dat je

Tablica 3

i	x_i	y_i	y_i'
0	0	1	1
1	0,1	1,1103	1,2103
2	0,2	1,2427	1,4427
3	0,3	1,3996	1,6996

Počinjemo izračunavanjem vrednosti y_4 i y_5 po Milneovim formulama.

1) Izračunavanje y_4.

Primenjujući prvu Milneovu formulu dobijamo

$$y_4^{(1)}=1+\frac{4\cdot 0,1}{3}(2\cdot 1,2103+2\cdot 1,6996-1,4427)=1,5836.$$

Otuda, zamenom u diferencijalnu jednačinu dobijamo

$$y_4'^{(1)}=1,9836.$$

Dalje, primenjujući drugu Milneovu formulu, nalazimo

$$y_4^{(2)}=1,2427+\frac{0,1}{3}(1,4427+1,9836+4\cdot 1,6996)=1,5835.$$

Na taj način, nađene vrednosti $y_4^{(1)}$ i $y_4^{(2)}$ poklapaju se na tri sadržane decimale, pa radi toga pišemo

$$y_4=y_4^{(2)}=1,5835.$$

Tako se dobija

$$y_4'=y_4'^{(2)}=1,9835.$$

Izračunavanje y_5:

Po prvoj Milneovoj formuli biće

$$y_5^{(1)}=1,1103+\frac{4\cdot 0,1}{3}(2\cdot 1,4427+2\cdot 1,9835-1,6996)=1,7973;$$

odgovarajuće

$$y_5'^{(1)}=0,5+1,7973=2,2973.$$

Po drugoj Milneovoj formuli imamo

$$y_5^{(2)}=1,3996+\frac{0,1}{3}(1,6996+2,2973+4\cdot 1,9835)=1,7973.$$

Pošto se $y_5^{(1)}$ i $y_5^{(2)}$ poklapaju, onda možemo staviti $y_5=1,7973$. Otuda je $y(0,5)=1,797$. Primetimo da, blagodareći malom koraku h, ovde nije potrebno ocenjivati grešku približnih vrednosti traženog rešenja.

2695. Radi udobnosti pisanja stavljamo

$$f=\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix},$$

gde je $f_1=\dfrac{z}{x}$ i $f_2=-xy$.

Primetimo da je sistem neodređen za $x=0$. Kao posledica $y'(0)$ ima oblik neodređenosti, te se primenom L'Hospitalovog pravila dobija

$$y'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{z}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{z'}{1}=z'(0)=0.$$

Za korak uzimamo $h=0,2$. Početni odsečak za Milneovu metodu izračunavamo metodom Runge-Kutta sa pet desetnih mesta iza zapete. Proračun izostavljamo, dok su konačne vrednosti: $y=0,91200$, $z=-0,17197$, $f_1=\dfrac{z}{x}=-0,28662$, $f_2=-xy=-0,54721$.

Imajući početni odsečak $Y_i=(y_i, z_i)$ $(i=0, 1, 2, 3\ldots)$ dalja izračunavanja vršimo po odgovarajućim formulama. Postupak izračunavanja moramo izostaviti. Nakon izračunavanja, definitivno se dobija

$$y(1)=0,76520;\quad z(1)=-0,44000.$$

Poređenja radi, ako bismo radili Adamsovom metodom imali bismo

$$y(1)=0,76520;\quad z(1)=-0,44005.$$

Primetimo da je u našem slučaju poznato početno rešenje datog sistema. Naime

$$y=I_0(x);\quad z=-x\,I_1(x),$$

gde su I_0 i I_1 Besselove funkcije nultog i prvog indeksa respektivno. Korišćenjem tablica za Besselove funkcije dobija se

$$y(1)=I_0(1)=0,765198\ldots,$$

$$z(1)=-I_1(x)=-0,440051\ldots$$

2696. Usvajamo korak $h=0,1$. Za početak procesa izračunavanja koristimo vrednosti, nađene u zadatku 2692 metodom Runge-Kutta, tj.

$$y_0=1;\ y_1=1,1103;\ y_2=1,2427;\ y_3=1,3996.$$

Dalja izračunavanja data su u tablicama 4 i 5, osnovnoj i ponovnoj respektivno.

Tablica 4

i	x	y	Δy	hy'	$\Delta(hy')$	$\Delta^2(hy')$	$\Delta^3(hy')$	y^*
0	0	1		0,1000	210	23	1	1
1	0,1	1,1103		0,1210	233	24	2	1,1103
2	0,2	1,2427		0,1443	257	26	5	1,2428
3	0,3	1,3996	0,1838	0,1700	283	31	2	1,3997
4	0,4	1,5834	0,2137	0,1983	314	33	3	1,5836
5	0,5	1,7971	0,2469	0,2297	347	36	5	1,7974
6	0,6	2,0440	0,2833	0,2644	383	41	3	2,0442
7	0,7	2,3273	0,3235	0,3027	424	44		2,6511
8	0,8	2,6508	0,3682	0,3451	468			3,0192
9	0,9	3,0190	0,4172	0,3919				3,4366
10	1,0	3,4362						

Tablica 5

i	3	4	5	6	7	8	9
hy'_i	0,1700	0,1983	0,2297	0,2644	0,3027	0,3451	0,3919
$\frac{1}{2}\Delta(h'_{i-1})$	128	142	157	174	192	212	234
$\frac{5}{12}\Delta^2(h'_{i-2})$	10	11	13	14	15	17	18
$\frac{3}{8}\Delta^3(h'_{i-3})$	0	1	2	1	1	2	1
$\Delta y_i = \Sigma$	0,1838	0,2137	0,2469	0,2833	0,3235	0,3682	0,4172

U zadnjem stupcu, poređenja radi, date su tačne vrednosti rešenja

$$y^* = 2e^x - x - 1.$$

Tako je očigledno da maksimalna greška približnog rešenja y ne prevazilazi četiri jedinice zadnjeg decimalnog mesta.

2697. Zapisujemo jednačinu u obliku sistema

$$\dot{\theta} = \omega;$$
$$\dot{\omega} = -0{,}2\,\omega - 10\sin\theta.$$

Početni odsečak za korak $h = \Delta t = 0{,}1$, dobijen Runge-Kuttovom metodom, uzimamo iz zadatka 2693 pri čemu se ograničavamo na tri desetna mesta:

$t = 0$; $\theta_0 = 0{,}300$; $\omega_0 = 0$;

$t = 0{,}1$; $\theta_1 = 0{,}285$; $\omega_1 = -0{,}389$;

$t = 0{,}2$; $\theta_2 = 0{,}243$; $\omega_2 = -0{,}544$;

$t = 0{,}3$; $\theta_3 = 0{,}179$; $\omega_3 = -0{,}742$.

Koristeći ove podatke možemo popuniti osnovnu tablicu 6 i pomoćnu tablicu 7. Na taj način traženo vreme, za koje je odstupanje $\theta(t) = 0$, zadovoljava nejednakost $0{,}5 < t < 0{,}6$.

Preciziranja radi sastavimo tablicu (tablica 8) konačnih razlika veličina θ i ω.

Neka je $q = \dfrac{t - 0{,}5}{0{,}1}$ Primenjujući drugu Newtonovu integracionu formulu imaćemo

$$0 = \theta = 0{,}011 + q(-0{,}088) + \frac{q(q+1)}{2}(-0{,}006).$$

Tablica 6

i	t	θ	$\Delta\theta$	$h\dot{\theta}$	$\Delta(h\dot{\theta})$	$\Delta^2(h\dot{\theta})$
0	0	0,300		0	−29	4
1	0,1	0,285		−0,029	−25	5
2	0,2	0,243		−0,054	−20	8
3	0,3	0,181	−0,082	−0,074	−12	8
4	0,4	0,099	−0,088	−0,086	− 4	
5	0,5	0,11	−0,089	−0,090		
6	0,6	−0,078				

Nastavak tablice 6

$\Delta^3(h\dot{\theta})$	ω	$\Delta\omega$	$h\dot{\omega}$	$\Delta(h\dot{\omega})$	$\Delta^2(h\dot{\omega})$	$\Delta^3(h\dot{\omega})$
1	0		−0,296	20	26	− 5
3	−0,289		−0,276	46	21	− 5
0	−0,544		0,230	67	16	−10
	−0,742	−0,122	−0,163	83	6	
	−0,864	−0,033	−0,080	89		
	−0,897	0,051	0,009			
	−0,846					

Tablica 7

i	3	4	5
$h\dot{\theta}$	− 0,074	− 0,086	−0,090
$\frac{1}{2}\Delta(h\dot{\theta}_{i-1})$	−10	− 6	−2
$\frac{5}{12}\Delta^2(h\dot{\theta}_{i-2})$	+ 2	+ 3	+3
$\frac{3}{8}\Delta^3(h\dot{\theta}_{i-3})$	0	+ 1	0
$\Delta\theta_i = \Sigma_1$	−0,082	−0,088	−0,089

i	3	4	5
$h\dot{\omega}_i$	− 0,163	− 0,080	+ 0,009
$\frac{1}{2}\Delta(h\dot{\omega}_{i-1})$	+34	+42	+44
$\frac{5}{12}\Delta^2(h\dot{\omega}_{i-2})$	+ 9	+ 7	+ 2
$\frac{3}{8}\Delta^3(h\dot{\omega}_{i-3})$	−12	− 2	− 4
$\Delta\omega_i = \Sigma_2$	−0,122	−0,033	+0,051

Tablica 8

t	θ	$\Delta\theta$	$\Delta^2\theta$	ω	$\Delta\omega$	$\Delta^2\omega$
0,3	0,181	−82	−6	−0,742	−122	89
0,4	0,099	−80		−0,864	− 33	
0,5	0,011			−0,897		

Otuda je

$$q \approx \frac{0{,}011}{0{,}088} - \frac{0{,}003}{0{,}088}\, q\,(q+1) = 0{,}125 - 0{,}034\, q\,(q+1).$$

Primenjujući postupak uzastopnih aproksimacija, imaćemo

$q^{(0)} = 0{,}125;$

$q^{(1)} = 0{,}125 - 0{,}034 \cdot 0{,}102 \cdot 1{,}102 = 0{,}125 - 0{,}004 = 0{,}121;$

$q^{(2)} = 0{,}125 - 0{,}034 \cdot 0{,}098 \cdot 1{,}098 = 0{,}125 - 0{,}004 = 0{,}121.$

Otuda možemo usvojiti $q = 0{,}121$ i $t = 0{,}5 + 0{,}1\, q = 0{,}512.$

Koristeći ponovo Newtonovu interpolacionu formulu, nalazimo

$$\omega = -0{,}897 + q\,(-0{,}033) + \frac{q\,(q+1)}{2} \cdot 0{,}089 = -0{,}897 - 0{,}004 + 0{,}006 = -0{,}895.$$

Na taj način konačno imamo

$$\omega = \dot{\theta} = -0{,}895.$$

2698. $y_1(x) = \frac{3}{2} x^2 + x + 1;\ y_2(x) = \frac{9}{20} x^5 + \frac{3}{4} x^4 + \frac{4}{3} x^3 + \frac{5}{2} x^2 + x + 1;\ y_3(x) = \frac{81}{4400} x^{11} +$

$$+ \frac{27}{400} x^{10} + \frac{47}{240} x^9 + \frac{17}{32} x^8 + \frac{1157}{1260} x^7 + \frac{68}{45} x^6 + \frac{25}{12} x^5 + \frac{23}{12} x^4 + 2 x^3 + \frac{5}{2} x^2 + x + 1$$

2699. $y_1(x) = \frac{x^3}{3};\quad y_2(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63};\quad y_3(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2 x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}.$

2700. $y_1 = 0{,}905,\ y_2 = 0{,}9143,\ y_3 = 0{,}9138.$ 2701. $y_1 = 1{,}22;\ y_2 = 1{,}2657;\ y_3 = 1{,}2727.$

2702. $y_1(x) = \frac{x^2}{2} - x + 1;\ y_2(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} - x + 1,\quad y_3(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} + \frac{3}{2} x^2 - x + 1;\ z_1(x) = 3x - 2;$

$$z_2(x) = \frac{x^3}{6} - 2x^2 + 3x - 2;\quad z_3(x) = \frac{7}{6} x^3 - 2x^2 + 3x - 2.$$

2703. $y_1(x) = x,\ y_2(x) = x - \frac{x^3}{6},\quad y_3(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$

2704. $y_1 = 2{,}105;\ y_2 = 2{,}08517;\ y_3 = 2{,}08447;\ z_1 = 0{,}605;\ z_2 = 0{,}58397;\ z = 0{,}58672.$

2705. $y(0{,}6) = 0{,}36916$ 2706. $1{,}12725.$ 2707. $y(2) = 0{,}80.$

2708. $y(0{,}8) = 0{,}84811.$ 2709. $y(1) = 3{,}72;\ z(1) = 2{,}72.$

2710. $y(0{,}3) = 0{,}53841;\ z(0{,}3) = 0{,}03759.$ 2711. $y(0{,}2) = 0{,}4548;\ z(0{,}2) = 0{,}1450.$

2712. $y(0{,}2) = 0{,}1191.$ 2713. $y(0{,}5) = 1{,}80.$ 2714. $y(1) = 3{,}15.$

2715. $y(0{,}5) = 0{,}14.$ 2716. $y(0{,}5) = 3{,}15;\ z(0{,}5) = -3{,}15.$

2717. $X = X^{(2)} = 0{,}87758;\ X' = X'^{(2)} = 0{,}38941.$ Vrednost komponente tačnog rešenja je $\tilde{X} = 0{,}87758$

2718. $0{,}87.$ 2719. $x(\pi) = 3{,}58;\ x'(\pi) = 0{,}79.$ 2720. $px + qy = 3z.$

2721. $(x-y)^2(p^2+q^2+1) = 25(p-q)^2.$ 2722. $2z = xp + xq.$ 2723. $yp + xq = z.$

2724. $ps - qr = 0.$ 2725. $qr - (1+p+q)s + (1+p)t = 0.$

2726. $r - 2t + rt - s^2 = 2.$ 2727. $xr + 2xys + y^2 t - (a+b-1)(xp+yq) + abz = 0.$

2728. $abc\, z = [(ab+bc+ca) - (a+b+c) + 1]\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right) - [(a+b+c) - 3]\left(x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} +\right.$

$$\left. + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + \left(x^3\frac{\partial^3 x}{\partial x^3} + 3x^2 y\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} + 3xy^2\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} + y^3\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right).$$ 2729. $z = xy + \frac{x^2}{2} + \varphi(y).$

2730. $\varphi_1(x) + \varphi_2(y)$, gde su φ_1 i φ_2 dve proizvoljne diferencijabilne funkcije po x i y respektivno.

2731. $z = x\varphi_1(y) + \varphi_2(y) + \frac{1}{6} x^3 y.$ 2732. $z = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) + \frac{1}{3}(x^3 y + xy^3).$

2733. $z = y\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \sin xy.$

2734. $\frac{\partial}{\partial y}(p + yz) = 0 \Rightarrow p + yz = \varphi(x) \Rightarrow z = e^{-xy}\left[\psi(y) + \int e^{xy}\varphi(x)\,dx\right].$

2735. $z = e^{-\frac{xy^2}{2}}\left[\varphi(x) + \int e^{\frac{xy^2}{2}}\psi(y)\,dy\right].$ 2736. $z = \frac{x}{y} + \frac{\varphi(x)}{y^2} + \psi(y).$

2737. $z = y^2\varphi(x) + \psi(x) + x^2 y^2 \ln y$ 2738. $z = \varphi(x^2 y) + \psi(x) + \frac{1}{4} x^2 y^2.$

2739. $x = \varphi(y) + \psi(z).$ 2740. $z = \varphi(x)\,\psi(y).$

2741. Polazeći od sistema jednačina $\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-xy}$

dobijamo njegove prve integrale

(1) $$\frac{x}{y} = c_1,\ z^2 + xy = c_2.$$

Prema tome, opšte rešenje date jednačine može biti zapisano u implicitnom obliku

$$\Phi\left(\frac{x}{y},\ z^2 + xy\right) = 0.$$

gde je Φ proizvoljna funkcija. Pošto z ulazi samo u jedan od prvih integrala (1) to se opšte rešenje može napisati u eksplicitnom obliku. Tako dobijamo

$$z^2 + xy = f\left(\frac{x}{y}\right);\ z = \pm\sqrt{f\left(\frac{x}{y}\right) - xy}$$

gde je f proizvoljna funkcija.
Da bismo našli integralnu površinu koja prolazi kroz datu liniju zapišimo jednačine te linije u parametarskom obliku, na primer, uzimajući x kao parametar

$$x = x,\ y = x^2,\ z = x^3.$$

Zamenjujući ove vrednosti u (1) dobijamo

$$\frac{1}{x} = c,\ x^6 + x^3 + c_2.$$

Ako se sada iz zadnjih jednačina isključi x, dobijamo

$$\frac{1}{c_1{}^6}+\frac{1}{c_1{}^3}=c_2.$$

Zamenjujući umesto c_1 i c_2 leve strane prvih integrala (1), nalazimo traženo rešenje

$$\left(\frac{y}{x}\right)^6+\left(\frac{y}{x}\right)^3=z^2+xy.$$

2742. $\Phi\left(\frac{z}{x^3}, \frac{z}{y^3}\right)=0.$ 2743. $\Phi\left(\frac{x}{y}, \frac{t}{y}, xyt-3z\right)=0.$

2744. $\Phi\left(\frac{y}{z}, \frac{x^2+y^2+z^2}{z}\right)=0.$ 2745. $z=e^{-cy/b}\,\Phi(ay-bx).$

2746. $x-y=xy\,\Phi\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{z}\right).$ 2747. $\Phi(x^2-y^2,\ x-y+z)=0.$

2748. $\Phi\left(e^{-x}-y^{-1};\ z+\frac{x-\ln|y|}{e^{-x}-y^{-1}}\right)=0.$ 2749. $\Phi\left(x^2-4z;\ \frac{(x+y)^2}{x}\right)=0.$

2750. $\Phi\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{z}, \frac{1}{x-y}+\frac{1}{z}\right)=0.$ 2751. $\Phi(x^2+y^4;\ y(z+\sqrt{z^2+1})]=0.$

2752. $\Phi\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y},\ \ln|x-y|-\frac{z^2}{2}\right)=0.$ 2753. $\Phi\left[x^2+y^2,\ \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}+(z+1)e^{-z}\right]=0.$

2754. $z=\sin y+\Phi(\sin x-\sin y).$ 2755. $\Phi(\operatorname{tg} z+\operatorname{ctg} x;\ 2y+2\operatorname{tg} z\cdot\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg}^2 x=0.$

2756. $z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=x^{a+1}\,\Phi\left(\frac{y}{x}\right).$ 2757. $z=x^3y^3\,\Phi\left(\frac{x^3+y^3}{x^2y^2}\right).$

2758. $y+z+u=x^2\,\Phi[x(y-z),\ x(y-u)].$ 2759. $\Phi\left[u(x-y),\ u(y-z),\ \frac{x+y+z}{u^2}\right]=0.$

2760. $u=\Phi[2yz+ax(y+\sqrt{1-y^2}),\ xe^{\arcsin y}].$ 2761. $\Phi\left(\frac{x}{y},\ xy-2u,\ \frac{z+u-xy}{x}\right)=0.$

2762. $\Phi[(x-y)\sqrt[3]{s},\ (y-u)\sqrt[3]{s},\ (z-u)\sqrt[3]{s}]=0.$

2763. $\Phi\left[\frac{x-y}{z},\ (2u+x+y)z,\ \frac{u-x-y}{z^2}\right]=0.$

2764. $z=e^{mx}\cos(py+u)+\Phi(y+ax);\ m\operatorname{tg}\alpha=ap.$

2765. $12u=6x^2yz-2x^3(bz+cy)+bcx^2+\Phi(y-bx,\ z-cx).$

2766. $x^2+y^2+z^2=\Phi(ax+by+z).$ 2767. $y^2-x^2-\ln\sqrt{y^2-x^2}=z-\ln|y|.$

2768. $2x^2(y+1)=y^2+4z-1).$

2769. $\sqrt{\frac{z}{y^3}}\sin x=\sin x\sqrt{\frac{z}{y}}.$ 2770. $x-2y=x^2+y^2+z.$ 2771. $2xyz-z^2=2.$

2772. $2x^2-y^2-z^2=a^2.$ 2773. $z^2+xy=a^2+h.$ 2774. $3(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2.$

2775. $xz=(xz-y-x+2z)^2.$ 2776. $x+y+z=0.$ 2777. $(x^2+y^2+z^2)^2=2a^2(x^2+y^2+xy).$

2778. $2(x^3-4z^3-3yz)^2=9(y+z^2)^3.$ 2779. $(x-y)(3x+y+4z)$ 2780. $xy+y^2=0.$

2781. $(x^2+y^2)(a^2z^2-h^2y^2)=a^2hx^2z.$

2782. $z=xy+f\left(\frac{y}{x}\right)$, gde je f proizvoljna diferencijabilna funkcija takva da je $f(1)=0.$

2783. $\Phi(z^2+x^2,\ x^2-y^2)=0.$ 2784. $\Phi(z^2-x^2,\ x^2-y^2)=0.$

2785. $\Phi(z^2+2x^2,\ x^2-y^2)=0.$ 2786. $z^2+2x^2=\Phi(x^2-y^2).$

2787. $z(x^2+y^2+z^2)=h(z^2+2y^2).$ 2788. $x^2+y^2+2z^2=a^2+2h^2.$

2789. $2y^2+z^2=z(x^2+y^2+z^2).$ 2790. $l\frac{\partial u}{\partial x}+m\frac{\partial u}{\partial y}+n\frac{\partial u}{\partial z}=0.$

2791. $\Phi(2x-z,\ x-y)=0.$ 2792. $(x-y)^2+(z-x-y)^2=4.$

2793. $\Phi\left(\frac{y-b}{x-a}, \frac{z-c}{x-a}\right)=0.$ 2794. $\Phi\left(\frac{x^2}{y}, \frac{z}{y}\right)=0.$

2795 $z=cxy^2.$ 2796. Nema rešenja. 2797. $z=0.$ 2798. Nema rešenja.

2799. 1° Datoj parcijalnoj jednačini odgovara sistem

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{0},\ \Rightarrow z=c_1,\ \frac{y}{x}=c_2,$$

pa je opšti integral jednačine $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$, gde je f proizvoljna funkcija.

2° Pošto je $p=-\frac{y}{x^2}f'\left(\frac{y}{x}\right)$ i $q=\frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)$ to se zamenom u jednačini $p^2+q^2=$ $=\frac{a^2}{x^2+y^2}$ dobija $f'^2\left(\frac{y}{x}\right)=a^2\frac{x^4}{(x^2+y^2)^2}$ ili, nakon zamene $\frac{y}{x}=t$, biće

$$f'^2(t)=\frac{a^2}{(1+t^2)^2},\ \Rightarrow f'(t)=\pm\frac{a}{1+t^2}$$

pa je definitivno $z=\pm a\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}+c$, što predstavlja najopštiju funkciju koja zadovoljava parcijalne jednačine.

2800. 1° Odgovarajuća parcijalna jednačina je

$$pz(x+y)+qz(y-x)=-(x^2+y^2).$$

Sistem diferencijalnih jednačina karakteristika ove linearne parcijalne jednačine je

$$\frac{dx}{z(x+y)}=\frac{dy}{z(y-x)}=\frac{dz}{x^2+y^2}.$$

Dva prva integrala ovog sistema su

$$\sqrt{x^2+y^2}\, a^{\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}} = c_1 \quad \text{i} \quad x^2+y^2+z^2 = c_2.$$

Otuda je traženi opšti oblik jednačine površi u Dekartovim koordinatama

$$(1) \qquad f\left(\sqrt{x^2+y^2}\, e^{\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}\right) = x^2+y^2+z^2$$

a u cilindričnim

$$f(re^{\varphi}) = r^2+z^2$$

gde je f proizvoljna funkcija.

2° Stavljajući u (1) $y=0$ i $z=0$ dobija se $f(x)=x^2$. Otuda je jednačina površi koja prolazi kroz Ox osu

$$x^2+y^2+z^2=(x^2+y^2)\, e^{2\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}} \quad \text{ili} \quad z^2=r^2(e^{2\varphi}-1).$$

3° Očigledno je da su to površi drugog reda definisane jednačinom $x^2+y^2+z^2=a^2$.

2801. 1° Odgovarajuća parcijalna jednačina ortogonalnih trajektorija je

$$axzp+byzq=c-ax^2-by^2.$$

Opšta jednačina ortogonalnih trajektorija je

$$a(x^2+y^2+z^2)-2c\ln x=\varphi\left(\frac{y^a}{x^b}\right)$$

gde je φ proizvoljna funkcija. Traženi Cauchyev integral ima oblik

$$a(x^2+y^2+z^2)-2c\ln x=a\left(1+x^{-b}y^a+x^{-\frac{2b}{a}}y^2\right).$$

2° Mogući su sledeći slučajevi:

1) $a=c=0$, $b=-1$, φ — kvadratna funkcija, ili

$a=c=0$, $b=-2$, φ — linearna funkcija.

Površ drugog reda čine dve ravni 2) $a=0$, $c\neq 0$, $b=\pm 1$, $\varphi(u)=\pm 2c\ln u+\alpha u^2+\beta u+\gamma$, gde su α, β i γ proizvoljne konstante; površ se ponovo sastoji iz dve ravni.

3) $c=0$, $a\neq 0$, $a=-b=k$, $\varphi(u)=\alpha^{1/k}+\beta$, gde su α i β proizvoljne konstante; površ ima oblik $a(x^2+y^2+z^2)=\alpha xy+\beta$ i predstavlja elipsoid ili hiperboloid kada je $\beta\neq 0$, a konus sa centrom u početku kada je $\beta=0$. Specijalno za $\alpha=0$ i $\beta\neq 0$ površ je sfera sa centrom u koordinatnom početku, a ako je $\alpha=\beta=0$ ona se svodi na tačku — koordinatni početak.

2802. 1° Opšti integral date jednačine je $z=xyf(y^2-x^2)$, a njen Cauchyev integral

$$z=axy(x^2-y^2)$$

2° Polazimo od opšteg integrala

$$z=xyf(y^2-x^2)$$

date jednačine. Diferencijalna jednačina projekcija asimptotskih linija površi $z=\varphi(x,y)$ na ravan $z=0$ ima oblik (1) $ty'^2+2sy'+r=0$ gde r, s i t označavaju druge parcijalne izvode funkcije $\varphi(x,y)$. Kako je duž karakteristika $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{y}$ to se zamenom vrednosti $\dfrac{dy}{dx}$ u jednačini (1) dobija $tx^2+2sxy+ry^2=0$. Traženi opšti oblik je rešenje ove jednačine $z=kxy(y^2-x^2)$, gde je k proizvoljna konstanta.

2803. 1° Opšti integral date parcijalne jednačine je (1) $(x+y)(x+z)=f(x+y+z)$ gde je f proizvoljna funkcija.

2° Prema (1) očigledno je jednačina traženog opšteg oblika

$$(x+y)(x+z)=A(x+y+z)^2+B(x+y+z)+C$$

gde su A, B i C proizvoljne konstante.

3° Traženi Cauchyev integral je

$$x^2-y^2-z^2+x+y+z=0$$

4° $\left(\dfrac{x+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(\dfrac{y-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(\dfrac{z-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^2=-1$, jednograni hiperboloid sa centrom u tački $C\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$.

2804. 1° Da bi dati izraz bio totalni diferencijal potrebno je i dovoljno da bude

$$2yf''(u-x)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=2y[1+f''(u-x)]\Rightarrow$$

njen opšti integral $f'(u-x)-x=\varphi(u-x-y^2)$ gde φ označava proizvoljnu funkciju.

2° Tražena funkcija je $z=\dfrac{x^2}{2}+xy+f(y^2)+c$.

2807. Opšte rešenje je $z=x^2y+y^2+\varphi(x)$. Traženo rešenje ima oblik: $z=1+x^2y+y^2-2x^4$.

2808. $z=x+y^2+\dfrac{xy}{2}(x+y)$.

2809. Ako se jednačina podeli sa x^2 dobije se

$$\left(2xy+\frac{1}{x^2}\right)dx+x^2dy+\operatorname{tg} z\cdot dz=0\Rightarrow(2xy\,dx+x^2dy)+\frac{1}{x^2}dx+\operatorname{tg} z\,dz=0\Rightarrow x^2y-\frac{1}{x}-\ln(\cos z)=c.$$

2810. Data jednačina može da se napiše u obliku

$$2x\,dx+2y\,dy+\frac{dz}{z}+\frac{x\,dz-z\,dx}{x^2}=0\Rightarrow x^2+y^2+\frac{dz}{z}\quad \ln z+\frac{z}{x}=c.$$

2811. Lako se proverava da je uslov integrabilnosti ispunjen. Ako se uvede smena $x=uz$ i $y=vz$ dobija se jednačina

$$2z(v+1)(u\,dz+z\,du)-z(u+1)(v\,dz+z\,dv)+z(2v-u+1)\,dz=0\Rightarrow\frac{2\,du}{u+1}-\frac{dv}{v+1}+\frac{dz}{z}=0\Rightarrow y+z=c(x+z)^2.$$

2812. $y = ce^{\frac{x}{z}}$. 2813. $2xy - xz - 2yz = c$. 2814. $x(y^2+z^2)+y(x^2+z^2)+z(x^2+y^2)=c$

2815. Jednačina nije integrabilna jednom relacijom.

2816. Pošto je leva strana totalni diferencijal to je

$$\int_0^x (6x+yz)\,dx - 2\int_0^y y\,dy + 2\int_0^z z\,dz = c \Rightarrow 3x^2 - y^2 + z^2 + xyz = c.$$

2817. Uslovi integrabilnosti su ispunjeni. Nalazimo na kakvoj bilo površi, na primer, na ravni $z=1$, krive ortogonalne na vektorske linije:

$$z=1,\ y dx + 2x dy = 0,\ xy^2 = a.$$

Postavljamo kroz familiju krivih $z=1$, $xy^2=a$ rotorske površi, radi čega integralimo sistem jednačina rotorskih linija

$$\frac{dx}{-x} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{z},\ y = c_1,\ xz = c_2.$$

Isključivanjem x, y i z iz jednačina $z=1$, $xy^2=a$, $y=c_1$, $xz=c_2$ dobija se $c_1^2 c_2 = a_1$. Na osnovu toga, traženi integral polazne jednačine ima oblik $xy^2 z = a$. Na ovom primeru smo ilustrovali najavljeni metod karakteristika.

2818. Ako se primeni postupak dat u uvodu odgovarajućeg paragrafa, stavljajući $y = \text{const} \Rightarrow dy = 0$, onda se dobija jednačina

$$yz\,dx - 2xy\,dz = 0 \Rightarrow \ln x - 2\ln z = \ln\varphi(y) \quad \text{ili} \quad (1)\ \frac{x}{z^2} = \varphi(y).$$

Na taj način biće dalje

$$\frac{\frac{1}{z^2}}{yz} = \frac{\frac{-2x}{z^3}}{-2xy} = \frac{0-\varphi'(y)}{xz-yz^3},\ \Rightarrow \frac{1}{z^3 y} = \frac{\varphi'(y)}{yz^3 - xz}$$

odnosno $1 - \dfrac{x}{yz^2} = \varphi'(y)$ ili s obzirom na (1) $1 - \dfrac{\varphi(y)}{y} = \varphi'(y) \Rightarrow \Phi y - \dfrac{1}{2} y^2 = c$. Zamenjujući φ iz (1) konačno se dobija $2xy = y^2 z^2 + cz^2$.

2819. Smatrajući z kao konstantu i postupajući kao u prethodnom primeru, konačno se dobija $y+z = c(x+z)^2$.

2820. Postupajući kao u prethodna dva primera, pri čemu se uzima $z = \text{const}$ konačno se dobija $e^z y + e^y z + e^z x = ce^z$. 2821. $xy + 2yz + 3xz = c$.

2822. $e^z y + e^y z + \sin x = c$. 2823. $x^3 + yz = c(y+z)$. 2824. Nije integrabilna.

2825. $x^2 + y^2 + z^2 = c(y+z)$. 2826. $\dfrac{x+y}{z} + \dfrac{y+z}{x} = c$.

2827. $xy + yz + zx = c_1$, $x^2 + y^2 + 2(c_1 - xy - yz) = c_2$.

2828. $xyz = c_1$, $xy + yz + xz = c_2$. 2829. $z + \ln x = c_1$, $x^2 + 2xy = c_2$.

2830. $x + y = c_1 e^{-z}$, $x + y = \dfrac{c_2}{z}$. 2831. $x^2 yz = c_1$, $x^2 z + x + z = c_2$.

2832. $x^2 y - 3xyz = c$. 2833. Takva familija ne postoji pošto je $\vec{A}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} \neq 0$.

2834. $x^2 + 2z^2 + 2yz = c$.

2835. Jednačine vektorskih linija su $\dfrac{y}{x} = c_1$, $xz = c_2$. Jednačine vektorskih površi: $z = \dfrac{1}{x}\Phi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Jednačine površi normalnih na vektorske linije: $x^2 + y^2 - z^2 = c$.

2836. $\dfrac{p}{x} = \dfrac{2y}{q}$, $p = ax$, $q = \dfrac{2y}{a}$, $dz = ax\,dx + \dfrac{2y}{a}dy$, $z = \dfrac{ax^2}{2} + \dfrac{y^2}{a} + b$.

2837. $q = a$, $p = 3a^3$, $dz = 3a^3 dx + a\,dy \Rightarrow dz = 3a^3 x + ay + b$.

2838. $z = z(u)$, gde je $u = ax + y$, $p = a\dfrac{dz}{du}$, $q = \dfrac{dz}{du}$, $z^3 = a\left(\dfrac{dz}{du}\right)^3$ ili $\dfrac{dz}{du} = a_1 z$ gde je $a_1 = a^{-1/3}$, $\ln|z| = a_1 u + \ln b \Rightarrow z = be^{a_1 u}$, $z = be^{a_1\left(\frac{x}{a_1^3} + y\right)}$.

2839. $z = ax + by + a^2 + b^2$.

2840. Primenjujući Lagrange-Charpitеov metod, sistem jednačina (25) ima oblik

$$\frac{dx}{2pyz} = -dy = \frac{dz}{2p^2 yz - q} = -\frac{dp}{yp^3} = -\frac{dp}{zp^2 + yp^2 q}.$$

Koristeći datu jednačinu uprošćavamo imenilac treće relacije i dobijamo integralnu kombinaciju

$$\frac{dz}{p^2 yz} = -\frac{dp}{p^3 y} \Rightarrow p = \frac{a}{z}.$$

Iz polazne i zadnje jednačine dobija se

$$p = \frac{a}{z},\ q = \frac{a^2 y}{z} \Rightarrow dz = \frac{a}{z}dx + \frac{a^2 y}{z}dy.$$

Množenjem sa $2z$ i integracijom dobija se potpuni integral polazne jednačine

$$z^2 = 2ax + a^2 y^2 + b.$$

2841. $z = ax + by + a^3 b^3$; mogući su i drugi odgovori.

2842. $z = be^{3/a\,(a^2 x + y)}$; mogući su i drugi odgovori.

2843. $z = x\sin a + ay + b$; mogući su i drugi odgovori.

2844. $z = ax - (a^2 - 1)^{1/2} y + b$. 2845. $2az = 2a^2 x - ax^2 + y^2 + b$.

2846. $z = ax + \sqrt{9 - a^2}\,y + b$. 2847. $z = ax - \dfrac{u}{a+1} y + b$.

2848. $\ln z=\frac{2}{3}(a+x)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}(a-y)^{3/2}+b.$ 2849. $z=ax+by+ab;\ z=-xy.$

2850. $z(a^2+1)=(x+ay+b)^2;\ z=0.$

2851. $\ln z^2=(\sqrt{a^2+4}-a)(\ln x+a\ln y+b)$. Singularni integral ne postoji.

2852. $(1+a^2)(1-z^2)=(x+ay+b)^2;\ z^2-1=0.$

2853. $z=ax^2+by^2+ab;\ z+x^2y^2=0.$ 2854. $\frac{(x-a)^2}{4}+\frac{(y-b)^2}{9/4}+z^2=1;\ z=\pm 1.$

2855. $z=ax+b(y^2+2y+a);\ z+x(y^2+2y)=0.$ 2856. $z=xy+1.$ 2857. $z=3xy.$

2858. $z=3x+4y+24,$ 2859. $\frac{z^{1-l}}{1-l}=a\frac{x^{m+1}}{m+1}+\frac{y^{n+1}}{a(n+1)}+b.$

2860. 1° Data jednačina može da se napiše u obliku $\left(\frac{2zp}{x}\right)^2+\left(\frac{2zq}{y}\right)^2=8$, pa ako se stavi

$z^2=z_1\Rightarrow\frac{\partial z_1}{\partial x}=p_1$ i $\frac{\partial z_1}{\partial y}=q_1$ dobija se $\left(\frac{p_1}{x}\right)^2+\left(\frac{q_1}{y}\right)^2=8$. Ako se dalje stavi

$$\frac{p_1}{x}=2c\Rightarrow p_1=2cx,\ \text{biće}\ \frac{q_1}{y}=\sqrt{8-4c^2}=2\sqrt{2-c^2}$$

i

$$dz=p_1\,dx+q_1\,dy=2cx\,dx+2y\sqrt{2-c^2}\,dy,\Rightarrow z_1=cx^2+y^2\sqrt{2-c^2}+c_1.$$

Tako dobijamo potpuni integral polazne jednačine

$$z^2=cx^2+y^2\sqrt{2-c^2}+c_1$$

i njen opšti integral

$$z^2=cx^2+y^2\sqrt{2-c^2}+f(c),\ 0=x^2-\frac{cy^2}{\sqrt{2-c^2}}+f'(c).$$

gde je f proizvoljna funkcija.

2° Ako se u potpunom integralu stavi $y=0$ i $z=x-1$ dobija se $(x-1)^2=cx^2+c_1\Rightarrow$ uzimajući izvod po x da je $x-1=cx$, pa se iz ove dve jednačine dobija $x=\frac{1}{1-c}$

i

$$c_1=(x-1)^2-cx^2=cx(x-1-x)=-cx=\frac{c}{c-1}.$$

Otuda je traženi Cauchyev integral, dat u parametarskom obliku

$$z^2=cx^2+y^2\sqrt{2-c^2}+\frac{c}{c-1},$$

$$0=x-\frac{cy^2}{\sqrt{2-c^2}}-\frac{1}{(c-1)^2}.$$

2861. 1° Data parcijalna jednačina može da se napiše u obliku

$$\left(z^{-\frac{m}{2}}p\right)\left(z^{-\frac{m}{2}}q\right)=xy,$$

pa se smenom

$$n=\begin{cases}\frac{2}{2-m}z^{1-\frac{m}{2}}, & n\neq 2,\\ \ln z, & n=2,\end{cases}\quad \frac{\partial u}{\partial x}=p_1,\ \frac{\partial u}{\partial y}=q_1$$

transformiše na jednačinu $p_1q_1=xy$. Ova jednačina razdvaja promenljive. Njena integracija daje

$$\frac{p_1}{x}=c=\frac{y}{q_1},$$

$$du=cx\,dx+\frac{1}{c}y\,dy,$$

$$u=c\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2c}+c_1$$

gde su c i c_1 proizvoljne konstante. Otuda je potpuni integral date parcijalne jednačine

$$\frac{2}{2-m}z^{1-\frac{m}{2}}=c\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2c}+c_1,\ n\neq 2$$

$$\ln z=\frac{c}{2}x^2+\frac{1}{2c}y^2+c_1,\ n=2$$

gde su c i c_1 proizvoljne konstante. Opšti integral date parcijalne jednačine je

$$\frac{2}{2-m}z^{1-\frac{m}{2}}=\frac{c}{2}x^2+\frac{1}{2c}y^2+f(c),$$

za $m\neq 2$

$$0=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2c^2}y^2+f'(c).$$

$$\ln z=\frac{c}{2}x^2+\frac{1}{2c}y^2+f(c),$$

za $m=2$

$$0=\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2c^2}+f'(c).$$

pri čemu je f proizvoljna funkcija.

2° Samo za $n=0$ i $n=-2$

3° $z=x\sqrt{x^2+1}$.

2862. 1° $z^2=2ax+by+4a^2$; opšti integral je definisan jednačinama

$$z^2=2ax+\varphi(a)y+4a^2$$

$$0=2x+\varphi'(a)y+8a$$

$$z^2=-\frac{x^2}{4}+by.$$

2° $z^2=y$.

2863. 1° Odgovarajuća parcijalna jednačina je (1) $px+qy=f(p,q)$. Jedan integral je $q=c_1 p$. Ako se dobijena vrednost za q zameni u jednačini (1), koja, s obzirom na homogenost, može da se napiše u obliku

$$px+qy=p^n\left(1,\frac{q}{p}\right),$$

dobija se $x+c_1 y=p^{n-1} f(c_1, 1)$ pod pretpostavkom $n\neq 1$, a odatle

$$p=\left[\frac{x+c_1 y}{f(1,c_1)}\right]^{\frac{1}{n-1}},\quad q=c_1\left[\frac{x+c_1 y}{f(1,c_1)}\right]^{\frac{1}{n-1}}.$$

Prema tome integracija jednačine (1) svodi se na integraciju totalnog diferencijala

$$dz=\left[\frac{x+c_1 y}{f(1,c_1)}\right]^{\frac{1}{n-1}}(dx+c_1\,dy),$$

$$\Rightarrow \text{potpuni integral}\quad z=\frac{n-1}{n}\,\frac{(x+c_1 y)^{\frac{1}{n-1}}}{[f(1,c_1)]^{\frac{1}{n-1}}}+c_2,$$

čime su obuhvaćene sve tražene površi.

2° $2z=\dfrac{[x+c_1(a,b)\,y]^2}{c_1^2(a,b)}$ gde $c_1=c_1(a,b)$ označava korene jednačine $a+bc_1+cc_1^2=c_1^2$, pri čemu su a, b i c konstante. Tražena površ, kao što se lako da videti, predstavlja parabolični cilindar.

2864. Za rešavanje ove jednačine primenićemo metod razdvajanja promenljivih (Fountrov metod). Tražićemo partikularno rešenje (koje nije identički jednako nuli) date jednačine koje zadovoljava granične uslove (1) i (2) u obliku proizvoda dveju funkcija $X(x)$ i $T(t)$, od kojih jedna zavisi samo od x a druga samo od t.

(5) $$n(x,t)=X(x)\,T(t).$$

Zamenom u datoj jednačini dobija se

$$X(x)\,T''(t)=a^2 X''(x)\,T(t)$$

ili

(6) $$\frac{T''}{a^2 T}=\frac{X''}{X}.$$

Pošto na levoj strani jednačine figuriše funkcija koja ne zavisi od x, zdesna funkcija koja ne zavisi od t, onda je jednakost (6) moguća samo u tom slučaju kada i leva i desna strana ne zavise ni od x ni od t, tj. kada su obe strane jednake nekoj konstanti. Obeležimo tu konstantu sa $-\lambda$ gde je $\lambda>0$ (razmotrićemo i slučaj $\lambda<0$). Tako će biti

$$\frac{T''}{a^2 T}=\frac{X''}{X}=-\lambda.$$

Prema tome, dobijamo dalje dve jednačine

(7) $$X''+\lambda X=0,$$

(8) $$T''+a^2\lambda T=0.$$

Opšte rešenje ovih jednačina će biti:

(9) $$X(x)=A\cos x\sqrt{\lambda}+B\sin x\sqrt{\lambda}.$$

(10) $$T(x)=C\cos at\sqrt{\lambda}+D\sin at\sqrt{\lambda},$$

gde su A, B, C, D — proizvoljne konstante. Zamenom izraza $X(x)$ i $T(t)$ u jednakosti (5) dobijamo

$$n(x,t)=\left(A\cos x\sqrt{\lambda}+B\sin x\sqrt{\lambda}\right)\left(c\cos at\sqrt{\lambda}+D\sin at\sqrt{\lambda}\right).$$

Izaberimo sada konstante A i B takve, da zadovoljavaju uslove (1) i (2). Pošto je $T(t)\not\equiv 0$ (u protivnom slučaju bilo bi $n(x,t)\equiv 0$ što protivreči postavljenom uslovu), to funkcija $X(x)$ mora zadovoljavati uslove (1) i (2), tj. mora biti $X(0)=0$, $X(l)=0$. Zamenjujući vrednosti $x=0$ i $x=l$ u jednakost (9) na osnovu (1) i (2) dobijamo:

$$0=A\cdot 1+B\cdot 0$$

$$0=A\cos l\sqrt{\lambda}+B\,l\sin\sqrt{\lambda}.$$

Iz prve jednačine nalazimo $A=0$. Iz druge sledi $B\sin l\sqrt{\lambda}=0$ pošto je $B\neq 0$, jer bi u protivnom slučaju bilo $X\equiv 0$ i $n\equiv 0$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom. Zato mora biti

$$\sin l\sqrt{\lambda}=0,$$

odakle je

(11) $$\lambda=\frac{n\pi}{l}\ (n=1,2,\dots)$$

(pri tome ne uzimamo vrednost $n=0$, jer bi u tom slučaju bilo $X\equiv 0$ i $n\equiv 0$). Tako dobijamo:

(12) $$X=B\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Nađena vrednost za λ naziva se sopstvena vrednost datog konturnog problema. Njima odgovarajuće funkcije $X(x)$ nazivaju se sopstvene funkcije.
Primedba. Ako bismo mesto $-\lambda$ uzeli $+\lambda=k^2$ onda bi jednačina (7) imala oblik

$$X''-k^2 X=0.$$

Opšte rešenje te jednačine je

$$X=Ae^{kx}+Be^{-kx}.$$

Rešenje dato u ovom obliku ne može zadovoljavati granične uslove (1) i (2).
Znajući $\sqrt{\lambda}$, onda koristeći jednakost (10) možemo pisati:

(13) $$T(t)=C\cos\frac{an\pi}{l}t+D\sin\frac{an\pi}{l}t\ (n=1,2,\dots)$$

Za svaku vrednost od n, odnosno za svaku vrednost λ, izraze (12) i (13) zamenjujemo u jednakost 6 i dobijamo rešenje jednačine (1), koje zadovoljava konturne uslove (1) i (2). Ako to rešenje obeležimo sa $U_n(x,t)$ onda je

(14) $$U_n(x,t)=\sin\frac{n\pi}{l}x\left(C_n\cos\frac{an\pi t}{l}+D_n\sin\frac{a_n\pi t}{l}\right).$$

Za svaku vrednost n mi možemo birati njegove konstante C i D i radi toga pišemo C_n i D_n (konstanta B uključena je u C_n i D_n). Pošto je polazna jednačina linearna i homogena, onda je zbir rešenja takođe rešenje, te je otuda funkcija, predstavljena redom

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x,t)$$

ili

(15) $$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{an\pi}{l}t+D_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

takođe rešenje date diferencijalne jednačine, koje zadovoljava granične uslove (1) i (2). Očigledno, red (15) biće rešenje jednačine (1) samo u tom slučaju, ako su koeficijenti C_n i D_n takvi da taj red konvergira, a takođe konvergiraju redovi dobijeni nakon dvostrukog diferenciranja član po član po x i t.

Rešenje (15) mora još zadovoljavati početne uslove (3) i (4). To možemo postići izborom konstanti C_n i D_n. Zamenjujući u jednakost (15) $t=0$, s obzirom na uslov (3), dobijamo:

(16) $$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Ako je funkcija $f(x)$ takva da je možemo razviti u Furkeov red u intervalu $(0, l)$, onda će uslov (16) biti ispunjen ako se stavi

(17) $$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx.$$

Dalje, diferenciramo članove jednakosti (16) po t i stavljamo $t=0$. Iz uslova (4) dobija se jednakost

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} D_n\frac{an\pi}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Zatim određujemo Fourierove koeficijente ovog reda

$$D_n\frac{an\pi}{l}=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

ili

(18) $$D_n=\frac{2}{an\pi}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx.$$

Tako smo dokazali da red (15), gde su koeficijenti C_n i D_n određeni po formulama (17) i (18), ako se može dva puta diferencirati član po član, predstavlja funkciju $u(x,t)$ koja je rešenje polazne jednačine i sem toga zadovoljava konturne i početne uslove (1) — (4).

2865. Moment savijanja u preseku osovine čija je apscisa x određuje se formulom $M=GI\frac{\partial\theta}{\partial x}$, gde je $\theta(x, t)$ ugao savijanja preseka sa apscisom x u momentu t, G — moduo savijanja, I — polarni moment inercije poprečnog preseka osovine. Tražena jednačina je $\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$, gde je $a^2=\frac{GI}{k}$ dok je k moment inercije jedinice dužine osovine.

2866. $$\theta(x,t)=\frac{8\theta_0}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}\cos\frac{(2k+1)\pi at}{l}.$$

2867. Ako je $u(x, t)$ pomeranje preseka (naprezanje, nerastezanje) osovine apscise x u momentu t, onda se uzdužno naprezanje T u preseku x određuje formulom $T=ES\frac{\partial u}{\partial x}$ gde je E moduo elastičnosti materijala, S — površina poprečnog preseka osovine. Tražena jednačina je $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ gde je $a^2=\frac{E}{\varrho}$, ϱ — gustina materijala osovine.

2868. $$u(x,t)=\frac{8\lambda}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2l}.$$

2869. $$\frac{8Pl}{ES\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}.$$

Ovde E i S imaju isto značenje kao i u zadatku 2867.

2870. $$u(x,t)=\frac{A\sin\frac{\omega}{a}x\sin\omega t}{\sin\frac{\omega}{a}l}+\frac{2A\omega a}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\omega^2-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2}\cdot\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Uputstvo. Rešenje tražiti u obliku zbira dva rešenja:

$u=v+w$ gde je $w=\dfrac{A\sin\frac{\omega}{a}x\sin\omega x}{\sin\frac{\omega}{a}l}$ rešenje koje zadovoljava uslove $v(0,t)=0$, $v(l,t)=0$

$$v(x,0)=-w(x,0),\quad \frac{\partial v(x,0)}{\partial t}=-\frac{\partial w(x,0)}{\partial t}.$$

Pretpostavlja se da je $\sin\frac{\omega}{a}l\neq 0$.

2871. Za nalaženje rešenja koristi se metod razdvajanja promenljivih, tj. traži se partikularno rešenje date jednačine u obliku proizvoda dveju funkcija

$$u(x,t)=X(x)\,T(t).$$

Rešenje jednačine može biti, nakon niza transformacija, konačno napisano u obliku

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\,e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2t}}\,d\alpha.$$

Ova formula naziva se *Poissonov integral.*

2872. $u(x,t)=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2t}{l^2}}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$

Zadatak rešiti metodom razdvajanja promenljivih.

2873. $u(x,t)=\frac{8}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2t}{l^2}}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$

2874. $u(x,t)=u_0+\sum_{n=0}^{\infty}A_n e^{-a^2\lambda_n^2 t}\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x,$

gde je

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}dx-\frac{(-1)^n 4u_0}{\pi(2n+1)}.$$

Rešenje tražiti u obliku $u=n_0+v(x,t)$.

2875. $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\frac{p^2+\mu_n^2}{p(p+1)+\mu_n^2}e^{-\frac{\mu_n^2a^2t^2}{l^2}}\sin\frac{\mu_n x}{l}$, gde je $A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\mu_n x}{l}dx,$

$p=Hl$, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ — pozitivni koreni jednačine $\operatorname{tg}\mu=-\frac{\mu}{p}$. Na kraju štapa za $x=l$ postoji razmena toplote sa okolinom čija je temperatura jednaka nuli.

2876. Poći od jednačine $r^2\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}=0$ date u polarnom koordinatnom sistemu. Traženje rešenja je

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(t-\varphi)+r^2}dt.$$

Dobijeno rešenje naziva se Poissonov integral.

2877. Rešenje tražiti metodom razdvajanja promenljivih tj. stavljajući $u=\Phi(\varphi)R(r)$. Traženo rešenje je

$$u(x,t)=\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-\frac{n\pi y}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}.$$

2878. $u(x,t)=\frac{8Ab^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\frac{(2n+1)\pi(a-x)}{b}}{(2n+1)^3}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi y}{b}}{\operatorname{sh}\frac{(2n+1)\pi a}{b}}.$

2879. $u=u_2-\frac{Q}{2\lambda\pi}\ln\frac{R^2}{\pi}$. Zadatak rešiti u polarnim koordinatama.

2889. $z=\frac{x+y}{bx+ay}.$

2894. 1° Euler-Lagrangeova jednačina postaje $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ što znači da funkcija $y=y(x)$ ne može zadovoljavati proizvoljne granične uslove $y(a)=A$ i $y(b)=B$ pa u opštem slučaju integral nema ekstremum. 2° $\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}=0$. Ovo znači da je izraz $\varphi(x,y)dx+\psi(x,y)dy$ totalni diferencijal pa integral $I(y)=\int_a^b(\varphi+y'\psi)dx=\int_a^b\varphi dx+\psi dy$ ne zavisi od oblika krive $y=y(x)$ koja prolazi kroz tačke (a,A) i (b,B). To znači da ekstremum u pravom smislu ne postoji.

2895. 1° $\frac{\partial f}{\partial y'}=c$; 2° $\frac{\partial f}{\partial y'}=c$. Kako je još $\frac{\partial f}{\partial y'}=\varphi(y')$ sledi $y'=c_1$ i $y=c_1x+c_2$. 3° Neposredno se dobija da Euler-Lagrangeova jednačina postaje $\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'}y'-\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}y''=0$.

Ako ovu jednačinu pomnožimo sa y' dobijamo $\frac{d}{dx}\left(f-y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0$, odakle je $f-y'\frac{\partial f}{\partial y'}=c_1$.

2896. Treba naći $y=y(x)$ da bi integral $I(y)=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx$ imao minimum. $(f=f(y'))$.

Ekstremala je oblika $y=c_1x+c_2$; $c_1=\frac{B-A}{b-a}$, $c_2=A-\frac{B-A}{b-a}a$.

2897. Zadatak se svodi na nalaženje funkcije $y=y(x)$ za koju je integral minimalan. U ovom slučaju Euler-Lagrangeova jednačina iz koje se određuje funkcija $y=y(x)$ postaje $f-y'\frac{\partial f}{\partial y'}=c_1$ tj. $y\sqrt{1+y'^2}-y'\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}}=c_1$ odakle je $y=c_1\operatorname{ch}\left(\frac{x}{c_1}+c_2\right)$. c_1 i c_2 se određuju iz graničnih uslova: $y(a)=A$, $y(b)=B$. Iz prirode zadatka sledi da je $I(y)$ minimum za ovako određeno y.

2898. U ovom slučaju ekstremala se određuje iz jednačine $f-y'\frac{\partial f}{\partial y'}=c_1$ tj. iz

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}-y'^2\frac{1}{y\sqrt{1+y'^2}}=c_1$$

odakle je $(x+c_2)^2+y^2=c_1^2$ gde još treba odrediti konstante c_1 i c_2 iz graničnih uslova

$$y(x_1)=y_1,\ y(x_2)=y_2.$$

2899. Iz Euler-Lagrangeove jednačine sledi $y=\frac{c_1}{x}+c_2$ što znači da ne postoji ni jedna neprekidna kriva koja prolazi kroz tačke: $(-1,-1)$, $(1,1)$.

2900. Ne postoji neprekidna ekstremala.

2901. Ne postoji neprekidna ekstremala.

2902. $y-1=\left(\frac{x-1}{2}\right)^2$. 2903. $y=\frac{1}{x}$.

2904. Cikloida: $x=c_1(t-\sin t)+c_2$, $y=c_1(1-\cos t)$. 2915. $y=c_1\sin(4x+c_2)$.

2906. $y=c_1+c_2x-\frac{x^2}{4}$. 2907. $y=x$. 2908. $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+\frac{1}{2}\sin x$.

2909. $y=c_1\cos x+c_2\sin x+\operatorname{ch}\frac{x}{2}$. 2910. $y=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{x}{2}\cos x$.

2911. $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+\frac{x}{2}e^x$. 2912. $\varphi=c_2+c_1\int\frac{d\varrho}{\sqrt{\varrho^{2n+2}-c_1^2}}$ gde je $x=\varrho\cos\varphi$, $y=\varrho\sin\varphi$.

2913. Za $\alpha=0: y=c_1x+c_2$; za $a\neq 0$: $\begin{cases} x=k\sin^\beta t \\ y=c_1k\beta\int\sin^\beta t, \quad \beta=\frac{1}{a}, \quad k=c_1^\beta. \end{cases}$

2914. Ekstremala $y=c_1\sin x+c_2\sin y$ pod uslovom $y(0)=0$ zadovoljava Jacobiev uslov.

Osim toga je $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}=2>0$ pa dati funkcional ima jaki minimum.

2915. Iz Euler-Lagrangeove jednačine se dobija $x^2y''+2xy'-12y=0$, odakle je $y=c_1x^3+c_2x^{-4}$. Granični uslovi daju $c_1=1$, $c_2=0$. Jacobieva jednačina je takođe $x^2u''+2xu'-12u=0$ i kako je $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}=2x^2>0$ zaključujemo da dati integral ima jaki minimum.

2916. Slabi minimum za $y=-\frac{6}{x}+7$. 2917. Jaki maksimum za $y=\sin 2x-1$.

2918. Ekstremala je $y=x$. 2919. Jaki maksimum za $y=x^3$.

2920. Jaki maksimum za $y=e^{2x}/3$. 2921. Jaki maksimum za $y=\sin 2x$.

2922. Slabi minimum za $y=\operatorname{sh}(x\operatorname{ar}\operatorname{sh}1)$. 2923. Slabi minimum za $y=\frac{g}{b}x$.

2924. Slabi minimum za $y=0$. 2925. Jaki minimum za $y=x-1$.

2926. Za $\frac{b}{a}<1$ slabi minimum za $y=\frac{b}{a}x$. Za $\frac{b}{a}>\sqrt{3}$ jaki maksimum. Za $1<\frac{b}{a}<\sqrt{3}$ nema jakog maksimuma ni jakog minimuma.

2927. Jaki minimum za $y=x^3-1$. 2928. Za $a<\frac{\pi}{4}$ jaki minimum. Za $a>\frac{\pi}{4}$ ne postoji ekstremum.

2929. Slabi minimum za $y=\frac{b}{a}x$. 2930. Slabi minimum za $y=\frac{b}{a}x$.

2931. Slabi minimum za $y=x^2$.

2932. $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}<0$ za postojanje maksimuma. $\frac{\partial f}{\partial y^2}=0$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}>0$ za postojanje minimuma.

2933. Za $y=\sqrt{a^2-x^2}$ jaki minimum $I=-\frac{\pi a^4}{4}$. Za $y=-\sqrt{a^2-x^2}$ jaki maksimum $I=\frac{\pi a^4}{4}$.

2934. Postavimo koordinatni sistem tako da mu je tačka A početak, x-osa horizontalna a y-osa orijentisana vertikalno na dole. Ako su pri tome (a, b) $(b<0)$ koordinate tačke B, zadatak se svodi na traženje minimuma funkcionala

$$I(y)=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^a\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\,dx, \quad y(0)=0, \quad y(a)=b.$$

Rešavanjem Euler-Lagrangeove jednačine i korišćenjem prvog graničnog uslova dobija se $x=c_1(t-\sin t)$, $y=c_1(1-\cos t)$.
c_1 se određuje iz drugog graničnog uslova $y(a)=b$.

2935. Ekstremale su $e^x\cos(y-c_2)=c_1$. 2936. Jaki minimum za $y=c_1\left[x+\left(\frac{x-c_2}{2c_1}\right)^2\right]$ gde još treba odrediti konstante c_1 i c_2 iz graničnih uslova.

2937. Nema ekstremuma jer su ekstremale $y=c_1\operatorname{tg}x+c_2$ prekidne u $[0, \pi]$.

2938. Treba naći minimum funkcionala $I(y)=\int_c\sqrt{1+y'^2}\,dx$ gde je c kriva koja spaja tačku $A(a, a_1)$ sa tačkom $M(x, \varphi(x))$. Iz Euler-Lagrangeove jednačine sledi $y=c_1x+c_2$. Iz uslova transverzalnosti sledi

$$\left.\sqrt{1+y'^2}+(\varphi'-y')\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right|_{x=b}=0.$$

Konstante c_1, c_2 i b se određuju iz jednačina:

$$ac_1+c_2=a_1, \quad bc_1+c_2=\varphi(b), \quad \sqrt{1+c_1^2}+(\varphi'(b)-c_1)\frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}}=0.$$

2939. $y=\frac{\sqrt[3]{2-x_1}\sin x}{\sin x_1}$. 2941. $x^2+y^2=8x$. 2942. $y=t\sqrt{2}\sin x$.

2943. Iz Euler - Lagrangeove jednačine se dobija $y=c_1 x+c_2$ a iz uslova transverzalnosti $1+\psi'(a)\,y'(a)=0$ i $1+\psi'(b)\,y'(b)=0$. Zadnje dve jednakosti govore da ekstremala $y=c_1 x+c_2$ dolazi ortogonalno u granične tačke na date krive. Za određivanje konstanti c_1, c_2 a i b treba pored uslova transverzalnosti iskoristiti i jednačine:

$$c_1 a+c_2=\varphi(a),\quad c_1 b+c_2=\psi(b).$$

2944. $f-y'\dfrac{\partial f}{\partial y'}\Big|_{x=b}=0.$ **2945.** $F(x, y, y')=G(x, y)\sqrt{1+y'^2}$.

2946. $F(x, y, y')=G(x, y)\sqrt{1+y'^2}\,e^{\pm \operatorname{arc\,tg} y'}$. **2947.** $y^2=4\sin^2 n\pi x$.

2948. $(x-c_2)^2+(c_1-y)^2=\lambda^2$ gde se konstante c_1 i c_2 određuju iz uslova da krug prolazi kroz tačke $A(0, 0)$ i $B(x_1, 0)$.

2949. $2\pi y+\lambda=\dfrac{c_1}{2}\left(e^{2\pi\frac{x-c_2}{c_1}}+e^{-2\pi\frac{x-c_2}{c_1}}\right)$ gde se c_1, c_2 i λ određuju iz uslova $y(x_0)=y_0$,

$y(x_1)=y_1$ i $\displaystyle\int_{x_1}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx=l$.

2950. Kriva se dobija rešavanjem jednačina $y'=\dfrac{\pi x^2-c_1}{\sqrt{\lambda^2-(\pi x^2-c_1)^2}}$ uz uslove: $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx=l$,

$y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$.

2951. $\lambda^2(x-c_2)^2+(c_1-\lambda y)^2=1$ gde konstante c_1, c_2 i λ treba odrediti iz uslova $y(0)=0$,

$y(a)=y_1$ i $\displaystyle\int_0^a y\,dx=P$.

2952. Minimum za $y^2=\dfrac{2}{\pi}\sin^2 x$. **2953.** Kriva c se dobija iz familije $(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=\lambda^2$ i ostalih uslova.

2954. Iz Euler - Lagrangeove jednačine dobijamo $y^{IV}=0$ odakle je $y=c_1x^3+c_2x^2+c_3x+c_4$. Koristeći još granične uslove, konačno se dobija $y=x(x-1)\,[(y_0'+y_1')\,x-y_0']$.

2955. $y=\dfrac{x^7}{7!}$. **2956.** $x=\dfrac{1}{8}\,[-c_1\cos t+c_2(t+\sin t)]+c_3$, $y=\dfrac{1}{8}\,[c_1(t-\sin t)-c_2\cos t]+c_4$.

gde se konstante c_1, c_2, c_3 i c_4 određuju iz datih uslova.

2957. Krug poluprečnika $l/2\pi$. **2962.** $y=\sin x$, $z=-\sin x$.

2963. Luk kruga poluprečnika ϱ koji prolazi kroz tačku O i M.

2964. Iz jednačine $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ sledi $z=\varphi(x+y)+\psi(x-y)$. **2966.** $\nabla^2 z-f(x, y)=0$.

2967. $(1+q^2)\,r-2\,pqs+(1+p^2)\,t=0$. Ta jednačina govori da je u svakoj tački minimalne površi srednja krivina jednaka nuli. Jedinstvena rešenja ove jednačine u obliku

$z=\varphi(x)+\psi(y)$ su ravni $z=Ax+By+C$ i $e^{a(z-z_0)}=\dfrac{\cos a\,(y-y_0)}{\cos a\,(x-x_0)}$ gde je a konstanta.

2969. $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2=0$. **2971.** Prema prethodnom zadatku za geodezijske linije se dobijaju veliki krugovi.

2972. Zavojnica; $x^2+y^2=a^2$, $z=k\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$.

2974. Dužina duži $\overline{AB}$ gde su $A(0, a, 0)$ i $B(0, y_1, z_1)$ preseci ekstremale $y=-\dfrac{\sqrt{z_1^2-b^2}}{z_1}+a$ i hiperbole.

2975. $\dfrac{(1+q^2)\,r-2\,pqs+(1+p^2)\,t}{\sqrt{(1+p^2+q^2)^3}}=\lambda$. **2976.** $\dfrac{(1+q^2)\,r-2\,pqs+(1+p^2)\,t}{\sqrt{(1+p^2+q^2)^3}}=\dfrac{z+\lambda}{\mu}$. Ortogonalno.

2977. $\dfrac{(1+q^2)\,r-2\,pqs+(1+p^2)\,t}{\sqrt{(1+p^2+q^2)^3}}=\dfrac{1}{\lambda}$.

Glava IX

2979. $a=i,\ b=-1+i.$ **2980.** Kompleksan broj $a/\bar{a}$ je unimodularan. Zaista, $\left|\frac{a}{\bar{a}}\right|=\frac{|a|}{|\bar{a}|}=1$. Neka je sada $|a|=1$. Tada je $a(1+\bar{a})=a+a\bar{a}=a+1$ odakle je $a=\frac{1+a}{1+\bar{a}}\ (1+\bar{a}\neq 0)$, odnosno $a=\frac{1+a}{\overline{1+a}}$. Ako je $1+\bar{a}=0$, može da se napiše $a=-1=\frac{-i}{i}=\frac{i}{\bar{i}}$, što znači da je iskaz tačan bez izuzetka.

2985. Koristiti obrasce: $\sin^n x=\left(\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}\right)^n$, $\cos^n x=\left(\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}\right)^n$ i primeniti binomni obrazac, pa Eulerov obrazac.

2993. $\frac{1}{2}\,\frac{\sin^2\frac{n}{2}x}{\sin^2\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}n.$ **2995.** $1+i.$ **2996.** $x=\frac{4m\pi}{n(n+1)}\quad (m=0,\pm 1,\ldots,)$

2997. $z=1,\ n=1;\ z=a\in R,\ n=2;\ z=\frac{2k\pi}{n},\ n>2\quad (k=0,1,\ldots,n-1).$

2998. Nije uvek $\sqrt{z}\cdot\sqrt{z}=\sqrt{z^2}$. **3000.** Elipsa. **3001.** $R_e(z)>1$.

3002. Krug $3x^2+3y^2-2x-8y+3<0$. **3003.** Unutrašnjost leve grane hiperbole sa žižama u tačkama $F_1(2,0)$, $F_2(-2,0)$ i realnom poluosom 1.

3004. Parabola $y^2=2x+1$. **3006.** Prava kroz tačke z_1 i z_2 bez tačke z_2.

3005. Krug čije su dijametralne tačke z_1 i z_2 bez tačke z_2.

3007. Oblast $(x+1)^2+y^2>2\wedge x<0$. **3012.** Pođimo od $(|R_e(a)|-|I_m(a)|)^2>0$ odakle je $|R_e(a)|^2+|I_m(a)|)^2>2|R_e(a)|\,|I_m(a)$. Dodajmo levoj i desnoj strani $|a^2|$ i iskoristimo jednakost $|R_e(a)|^2+|I_m(a)|^2=|a|^2$. Dobijamo $2|a|^2>R_e(a)|^2+I_m(a)|^2+2|R_e(a)|\,|I_m(a)|$, odnosno $|a|\sqrt{2}>|R_e(a)|+|I_m(a)|$.

3013. Može. Koristiti jednakosti $|P_n(z)|=|\overline{P_n(z)}|$ i $z\bar{z}=1$.

3018. $z=x+iy=2\frac{\xi+i\eta}{1-\zeta}\quad(\zeta\neq 1)$; $\xi=\frac{4x}{x^2+y^2+4}$, $\eta=\frac{4y}{x^2+y^2+4}$, $\zeta=\frac{x^2+y^2-4}{x^2+y^2+4}$.

3020. 1° $(0,0,-1)$; 2° $\left(0,\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$; 3° $\left(-\frac{4}{5},0,-\frac{3}{5}\right)$; 4° $\left(\frac{2\sqrt{2}}{5},-\frac{2\sqrt{2}}{5},-\frac{3}{5}\right)$.

3021. Prava kroz tačku $z=0$ sa koeficijentom pravca $\operatorname{tg}\alpha$.

3022. 1° Polumeridijan sa geografskom dužinom α; 2° krug paralelan polutaru geografske širine $\beta=\operatorname{arc\,tg}\frac{r^2-4}{4r}$. **3023.** $|w|=1$.

3024. Pošto su tačke z_1, z_2 i z_3 na jediničnom krugu, onda se množenjem sa $e^{\alpha i}$ mogu dovesti u položaj da jedna od njih, npr. z_3, bude u tački $z=-1$ a da se pri tome postavljeni uslovi ne promene. Tada će biti $z_3=-1$, $z_1=\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1$, $z_2=\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2$. Koristeći uslov $z_1+z_2+z_3=0$ dobija se sistem jednačina $\cos\varphi_1+\cos\varphi_2-1=0$, $\sin\varphi_1+\sin\varphi_2=0$ odakle je $\varphi_1=\pi/3$ i $\varphi_2=-\pi/3$; ili $\varphi_1=-\pi/3$ i $\varphi_2=\pi/3$ čime je dokaz završen.

3027. Pretpostavimo da je prava imaginarna osa i da se sve tačke nalaze desno od nje. Ako tako nije, onda treba pomnožiti sve z_k sa $e^{\alpha i}$, gde je α pogodno izabran broj. Tada je sigurno $R_e(z_k)>0$ i $R_e(1/z_k)>0$ za svako z_k što znači da je $z_1+z_2+\cdots+z_n\neq 0$ i $1/z_1+1/z_2+\cdots+1/z_n\neq 0$.

3029. $a+bi+Re^{\left(\frac{2k\pi}{n}+\frac{\pi}{2}\right)i}$. **3030.** $z_3=(z_2-z_1)\,e^{\frac{2\pi}{n}i}+z_2$

3031. 1° $C^1_{2n+1}(1-x)^n-C^3_{2n+1}(1-x)^{n-1}x+\cdots+(-1)^n x^n=0$;

2° $C^1_{2n+1}x^n-C^3_{2n+1}x^{n-1}+C^5_{2n+1}x^{n-2}-\cdots=0.$ **3035.** $\frac{5\,000\cdot 50!}{(25!)^2}R^{50}$.

3036. Neka su O_1 i O_2 dve okoline tačke z_0 i $V_{\varepsilon_1}(z_0)$ i $V_{\varepsilon_2}(z_0)$ diskovi u odgovarajućim okolinama. Neka je, pored toga, $\varepsilon_1<\varepsilon_2$. Tada je $V_{\varepsilon_1}(z_0)\subset V_{\varepsilon_2}(z_0)\subset O_2$. Kako je još $V_{\varepsilon_1}(z_0)\subset O_1$ to je $V_{\varepsilon_1}(z_0)\subset O_1\cap O_2$.

3037. Ni otvoren ni zatvoren. **3038.** Otvoren. **3039.** Ne. **3041.** Ne.

3042. Prava $u=-2$. (Uputstvo: $w=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi=-2+2xyi$).

3044. $u=\frac{1-x^2-y^2}{(1+x)^2+y^2}$, $v=\frac{-2y}{(1+x)^2+y^2}$. **3046.** 1° $|w|=1$, $\arg w=\frac{\pi}{2}$;

2° $|w|=e^2$, $\arg w=-3$; 3° $|w|=e^{-3}$, $\arg w=2\pi-4$;

4° $|w|=1$, $\arg w=\begin{cases}-\varphi, & |\varphi|<\pi\\ \pi, & |\varphi|=\pi\end{cases}$.

3047. -7. **3048.** $-3{,}1658+1{,}9596\,i$. **3049.** $-0{,}02839-1{,}02386\,i$.

3050. $\cos 2\operatorname{ch}1-i\sin 2\operatorname{sh}1$. **3051.** $\frac{8+15i}{17}$. **3052.** $\frac{1}{2}\ln 13+\left(2k\pi-\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{2}\right)i$.

3053. $(0{,}18347+0{,}98306\,i)\,286751^k\quad(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$.

3054. $\cos(2k\sqrt{2}\pi)+i\sin(2k\sqrt{2}\pi)$. **3055.** $e^{2k\pi}$. **3056.** $e^{\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi}$.

3057. $-5\,e^{\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}+(2k+1)\pi}\left[\cos\left(\ln 5-\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}\right)+i\sin\left(\ln 5-\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}\right)\right]\quad(k=0,\pm 1\pm 2,\ldots)$.

3058. $e^{\frac{1}{2}\ln 2-\frac{7\pi}{4}-2k\pi}\cos\left(\frac{7\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2\right)$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. **3059.** $e^{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}$.

3070. Koristiti zadatke 3066, 3067 i 3064.

3075. $u=e^{2x}[(x^2-y^2)\cos 2y-2xy\sin 2y]$, $v=e^{2x}[2xy\cos 2y+(x^2-y^2)\sin 2y]$.

3077. Označimo sa $\Delta\arg[f(z)]$ promenu argumenta funkcije $f(z)$ za izvesnu promenu nezavisno promenljive z. Tada je, u ovom slučaju, $\Delta\arg\sqrt[n]{z-a}=\frac{\Delta\arg(z-a)}{n}=\frac{2\pi}{n}$. Tačka $z=a$ je algebarska tačka grananja $n-1$-og reda. Tačka $z=\infty$ je algebarska tačka grananja $n-1$-og reda.

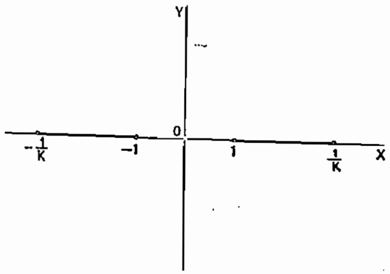
3078. 1° $\Delta\arg\sqrt{1-z^2}=\frac{\Delta\arg(1-z^2)}{2}=\frac{\Delta[\arg(1-z)+\arg(z+1)]}{2}=$
$=\frac{\Delta[\pi+\arg(z-1)+\arg(z+1)]}{2}=\pi$. (Ako kriva c obuhvata $z=1$ onda se $\arg(z-1)$ promeni za 2π a $\arg(z+1)$ se ne menja i obrnuto za tačku $z=-1$.)

2° $\Delta\arg\sqrt{1-z^2}=2\pi$. Funkcija ne menja vrednost.

3° $\Delta\arg\sqrt{1-z^2}=0$. Funkcija ne menja vrednost.

3079. Algebarske tačke granjanja.

3080. Algebarske tačke granjanja su ± 1 i $\pm\frac{1}{k}$.
Tačka $z=\infty$ nije tačka granjanja. Jednoznačne grane se mogu izdvojiti „zasecima" u z-ravni: $-\frac{1}{k}<x<-1$ i $1<x<\frac{1}{k}$ (sl. 41).
Naime, ako tačka z opisuje ma kakvu krivu koja ne preseca „zaseke", njena slika je u jednoj grani. Same grane $f_1(z)$ i $f_2(z)$ se određuju, na primer, vrednostima u koordinatnom početku: $f_1(0)=1$, $f_2(0)=-1$.


Sl. 41

3081. $\sqrt{2\sin\varphi}\,e^{\frac{3\pi i}{4}}$ za $\sin\varphi>0$ i $\sqrt{-2\sin\varphi}\,e^{\frac{\pi i}{4}}$ za $\sin\varphi<0$. **3082.** $f(-i)=\sqrt[3]{2}\,e^{\frac{13\pi i}{12}}$.

3083. $\frac{i}{1+\sqrt{2}}$. **3084.** $f(-i)=\frac{3\pi i}{2}$. **3085.** 1° $e^{-e(1+\pi i)}$; 2° $e^{-e(1-\pi i)}$.

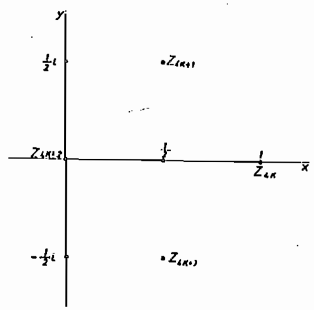
3088. 1° $z_{4k}=1$, $z_{4k+1}=\frac{1}{2}(1+i)$, $z_{4k+2}=0$, $z_{4k+3}=\frac{1}{2}(1-i)$ (sl. 42).

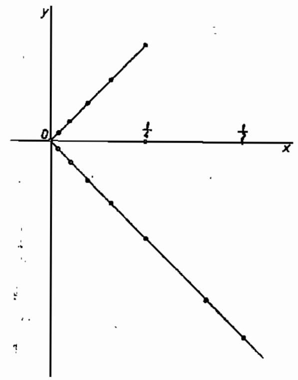
2° $z_1=1$, $z_2=\frac{1}{2}(1+i)$, $z_3=0$, $z_4=\frac{1}{2}(1-i)$. 3° Niz je ograničen ($|z_n|\leq 1$, $n\in N$

4° 0, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1; 5° $\overline{\lim_{n\to\infty}}|z_n|=1$, $\underline{\lim_{n\to\infty}}|z_n|=0$.

3089. 1° Na odsečku prave $y=x$ za $x\in\left[0,\frac{1}{4}\right]$ i na odsečku prave $y=-x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

2° 0. 3° $\lim_{n\to\infty} z_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{(-i)^n}{1+n}=0$. 4° 0 (sl. 43).


Sl. 42


Sl. 43

3090. $e^{\frac{\pi i}{3}}$; $e^{\frac{2\pi i}{3}}$; -1; $e^{\frac{4\pi i}{3}}$; $e^{\frac{5\pi i}{3}}$; 1. **3091.** 0.

3092. 1° 1; ∞. 2° za $\alpha=\frac{p}{q}$ $(p, q\in C)$ tačke nagomilavanja su na jediničnom krugu, a za α iracionalno tačke nagomilavanja su gusto raspoređene na jediničnom krugu.

3093. $z_n=\frac{n+1}{n-1}e^{ni}$. $\lim_{n\to\infty}|z_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n-1}=1$. Međutim, $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n-1}e^{ni}=\lim_{n\to\infty}e^{ni}$ a ovaj limes ne postoji.

3094. Divergira. **3095.** $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+i}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi i}{4}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{2}\,e^{\frac{\pi i}{4n}}=1$. **3096.** 0.

3097. $\frac{1}{2}i$. **3098.** 1. **3099.** Ne postoji u otvorenoj z-ravni. **3102.** $1-\frac{1}{2}i$.

3103. $\frac{1}{3}$. **3104.** $\frac{1}{6}-\frac{i\sqrt{3}}{6}$. **3105.** $\frac{1}{2}$. **3106.** ∞. **3107.** $\frac{\pi^2}{8}$.

3112. $z=0$. **3113.** ± 2, $\pm 2i$. **3114.** $k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

3115. $\pm i,\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

3117. $|z^n-a^n|=|z-a|\,|z^{n-1}+z^{n-2}a+\cdots+za^{n-2}+a^{n-1}|$. Za svako z i a postoji konstanta M takva da je $|z|<M$ i $|a|<M$ pa je $|z^n-a^n|<|z-a|\,(|z^{n-1}|+|z^{n-2}a|+\cdots+|za^{n-2}|+|a^{n-1}|)<|z-a|\,nM^{n-1}$. Ako je $\delta=\frac{\varepsilon}{nM^{n-1}}$ sledi da je $|z^n-a^n|<\varepsilon$.

3118. Posmatrajmo niz $z^n = 1 + \frac{e^{\alpha t}}{n} \cdot z^n \to 1$ kad $n \to \infty$.

Međutim: $f(z_n) = \frac{1-|1+e^{\alpha t}/n|}{-e^{\alpha t}/n} = \frac{n-|n+e^{\alpha t}|}{-e^{\alpha t}} = (\sqrt{n^2+2n\cos\alpha+1}-n)\, e^{-\alpha t} \to e^{-\alpha t}\cos\alpha$ kad $n \to \infty$ što znači da $f(z_n)$ teži različitim vrednostima za različite vrednosti α.

3119. 1° Ne; 2° ne; 3° da. Treba uzeti $f(0)=0$. 3120. Ne.

3127. $f(z)=u+iv=x-iy$, $u=x$, $v=-y$, $\frac{\partial u}{\partial x}=1$, $\frac{\partial v}{\partial y}=-1$ pa je $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$ za svako z.

3132. Lako je proveriti da je funkcija $u=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ harmonijska u oblasti gde je $x>0 \wedge y>0$. Zaista je: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$. Analogno je $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ pa je $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. Dalje je: $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{x^2+y^2}$ i $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}$, odakle je $v=\int \frac{x}{x^2+y^2}\,dy=\operatorname{arc tg}\frac{y}{x}+\varphi(x)$. Koristeći još $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$ dobijamo $\varphi'(x)=0$ pa je $v=\arg z+c$. Na osnovu svega je $w=u+iv=\ln|z|+i\arg z+ic$. Iz $w(0)=0$ sledi $c=0$ pa je konačno $w(z)=\ln|z|+i\arg z$.

3133. $w(z)=\frac{z^2}{2}(2-i)$. 3134. $w(z)=z^2+(5-i)z-\frac{i}{z}+ci$. 3135. $w(z)=\frac{-1+i}{z}$.

3136. $w(z)=2i\ln z-(2-i)z+c$. 3137. $w(z)=\operatorname{ctg} z$. 3138. $w(z)=\frac{z}{1+z^2}$.

3139. $\alpha i\ln z+\beta i+\gamma$, $(\alpha\ \beta, \gamma \in R)$. 3140. $\alpha i\ln z+\beta i+\gamma$ $(\alpha, \beta, \gamma \in R)$.

3143. 1° Ne. u nije harmonijska. 2° Ne. 3° Ne. 3144. $\varphi(t)=-\frac{c_1}{t}+c_2$, $u=\frac{c_1 x}{x^2+y^2}+c_2$.

3145. $u=c_1\ln(x^2+y^2)+c_2$. 3146. 1° $\alpha i\ln z+\lambda$; 2° $\alpha\ln z+\lambda$; 3° $\lambda e^{\alpha i\ln z}$; 4° $\lambda e^{\alpha\ln z}$.

3147. $f(z)=ce^{\alpha i\ln z}$. 3148. $f(z)=cz^2+z^4$. 3153. z^3+2iz^2+6-2i.

3161. 1/6. 3162. $e^{m\pi i}/\operatorname{ch} m\pi$. 3163. $e^{-1/6}$. 3164. $z=-1\pm i$ (pol prvog reda)*

3165. $z=-3i$ transcendentna tačka grananja, $z=0$ pol drugog reda.

3166. $z=0$ esencijalni singularitet. 3167. $0, \pm i$ algebarske tačke grananja.

3168. $z=-i$ pol trećeg reda. 3169. ± 1 prosti polovi, $z=\infty$ pol prvog reda.

3170. $z=1/\sqrt{m\pi}$ $(m=\pm 1, \pm 2, \ldots)$ prosti polovi; $z=0$ esencijalni singularitet; $z=\infty$ pol drugog reda.

3171. $z=0$ algebarska tačka grananja; $z=\infty$ algebarska tačka grananja.

* O vrstama singulariteta videti paragraf Laurentov red.

3172. 1° Neka je z_1 proizvoljna tačka z-ravni. Njena slika ovim preslikavanjem je tačka z_1+b u w-ravni odakle se vidi da se dobija translacijom tačke z_1 za vektor $\vec{b}$ sa koordinatama $(R_e(b))$, $I_m(b)$).

2° Pošto je $|a|=1$ datu funkciju možemo napisati u obliku $w=\varrho e^{i(\theta+\alpha)}$ gde je $z=\varrho e^{i\theta}$ i $a=e^{i\alpha}$. Odavde se vidi da je $|w|=|z|=\varrho$ i da je $\arg w=\arg z+\alpha$.

3173. $w=(a\varrho)e^{\theta i}$. Odavde se vidi da je $|w|=a|z|$. 3174. Neka je $a=|a|e^{\alpha i}$; tada je $w=|a|\varrho e^{(\theta+\alpha)i}+b$. Označimo: $w_1=\varrho e^{(\theta+\alpha)i}$ — rotacija, $w_2=|a|w_1$ — homotetija, i $w=w_2+b$ — translacija.

3175. Rotacija, homotetija i translacija su konformna preslikavanja pa je takvo i rezultujuće preslikavanje.

3176. Pošto je linearna funkcija konformno preslikavanje, teme pravog ugla mora preći u teme pravog ugla tj. tačka $z=-1$ u tačku $w=i$. Ako je preslikavanje $w=az+b$ biće: $i=-a+b$ i $-1=a\cdot 0+b$ odakle je $a=-(1+i)$ i $b=-1$. Prema tome tražena funkcija je $w=-(1+i)z-1$. Lako je proveriti da se i treće teme $z=-1+i$ preslikava ovom funkcijom u $w=1$.

3177. 1° Linearna funkcija može se napisati u obliku $w=w_1+b$ gde je $w_1=az=|a|\varrho e^{(\theta+\alpha)i}$. Da bi slika ma koje tačke iz gornje poluravni ponovo bila u poluravni, potrebno je da bude $\arg w_1=\arg z$, odnosno $\alpha=0$. Da bi translacija $w=w_1+b$ preslikavala gornju poluravan u gornju poluravan potrebno je da bude b realno. Prema tome je $w=az+b$, $a>0$, $b\in R$. 2° $w=-i(az+b)$, $a>0$, $b\in R$.

3178. $w=z+bi$ ili $w=-z+1+bi$, $b\in R$. 3179. Iz uslova zadatka sledi: $b=1$, $w=|a|\varrho e^{(\theta+\alpha)i}$ pa je $|w-1|=|a|\varrho$. Za tačke z na krugu $|z|=1$ imamo $\varrho=1$ pa je $|w-1|=|a|$ tj. $|a|=2$. Znači de je $w=2e^{\alpha i}z+1$.

3180. 1° $w=\frac{1}{z}$. Za $|z|=1$ imamo $z=e^{\theta i}$ pa je $w=\frac{1}{e^{-\theta i}}=e^{\theta i}=z$.

2° $z=\varrho e^{\theta i}$. Iz $\varrho>1$ sledi $w=\frac{1}{\varrho}e^{\theta i}$ odakle se vidi da je $|w|=\frac{1}{\varrho}<1$.

3181. Jednačina $\delta z\bar{z}+a\bar{z}+\bar{a}z+\gamma=0$ $(\delta, \gamma \in R)$ preslikavanjem $w=\frac{1}{z}$ prelazi u jednačinu $\gamma w\bar{w}+a\bar{w}+\bar{a}w+\delta=0$.

3182. 1° Na tačke jedinične kružnice. 2° Na tačke unutar jedinične kružnice.

3183. 1° Za $a\neq 0$ prave $R_e(w)=\frac{1}{a}$, za $a=0$ tačka $w=\infty$.

2° Za $b\neq 0$ prave $I_m(w)=-\frac{1}{b}$, za $b=0$ tačka $w=\infty$.

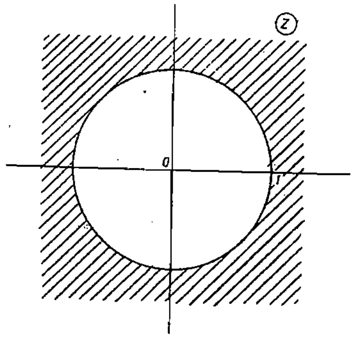
3° Za $b\neq 0$ kružnice $b(u^2+v^2)+u+v=0$, za $b=0$ prava $u+v=0$.

4° Skup pravih $v=-au$.

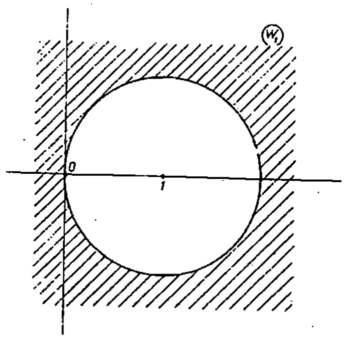
5° Za $p^2+q^2=r^2$ skup pravih koje prolaze kroz koordinatni početak, za $p^2+q^2\neq r^2$ skup krugova koji ne prolaze kroz koordinatni početak.

6° Za $b\neq 0$ skup krugova koji ne prolaze kroz početak, za $b=0$ videti 4°.

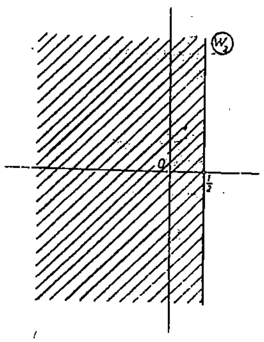
3184. Data funkcija može se razložiti na sledeći niz funkcija: $w_1 = z+1$, $w_2 = \frac{1}{w_1}$, $w_3 = 2e^{\pi i} w_2$, $w = w_3 + 1 + i$. Uzastopne slike oblasti ovim funkcijama prikazane su na slikama: 44, 45, 46, 47 i 48.



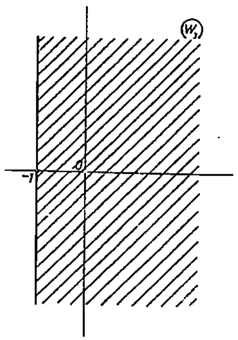
Sl. 44



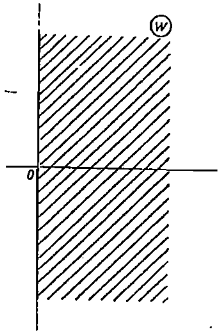
Sl. 45



Sl. 46



Sl. 47



Sl. 48

Prema tome slika date oblasti je $R_e(w) > 0$.

3186. $w = \dfrac{z\left(e^{\frac{3\pi}{4}i} + e^{\frac{\pi}{2}i}\right) - e^{\frac{5\pi}{4}i} - 1}{z\left(e^{\frac{3\pi}{4}i} - e^{\frac{\pi}{2}i}\right) - e^{\frac{5\pi}{4}i} + 1}$. **3187.** $u^2 + v^2 + \frac{y}{2} < 0$. ? **3189.** $|z| = 1$.

3190. $|w| = 1$. **3194.** $v^2 = 4c^2(u + c^2)$. **3195.** $P = \frac{15\pi}{2}$. **3196.** $I_m(w) > 0$.

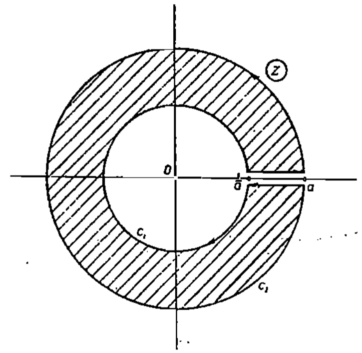
3199. 1° Data oblast (sl. 49) se preslikava u oblast unutrašnjosti elipse $u = \left(a^3 + \frac{1}{a}\right)\cos\theta$, $v = \left(a^3 - \frac{1}{a}\right)\sin\theta$ $(0 < \theta < 2\pi)$ iz koje je isečena duž $w = t$ $\left(-2a < t < a^3 + \frac{1}{a}\right)$ (sl. 50).

2° $a < 1$! slika je ista kao u 1°.

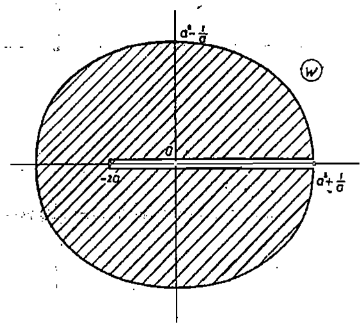
3° $a = 1$ jedinični krug $|z| = 1$ se preslikava u duž $w = t$ $(-2 < t < 2)$.

3201. $u = (a^3 - 3a)\cos t\,(1 - 4\sin^2 t)$, $v = (b^3 + 3b)\sin t\,(4\cos^2 t - 1)$.

3202. $I_m(w) > 0 \wedge |w| > 1$. **3203.** $w = \frac{iz^2 - 2z + i}{z^2 - 2iz + 1}$.

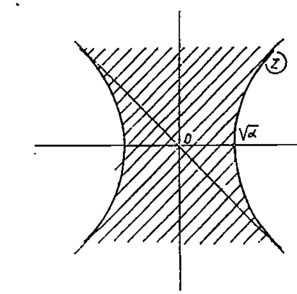


Sl. 49

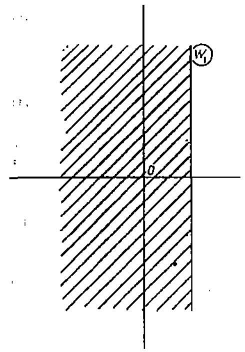


Sl. 50

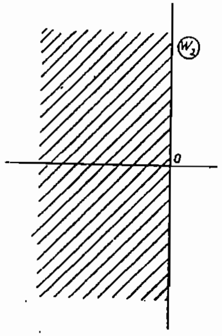
3204. Iz $z = x + iy$ sledi $= x^2 - y^2 + 2ixy = w_1 = u_1 + iv_1$. Funkcija $w_1 = z^2$ preslikava hiperbolu $x^2 - y^2 = a$ na pravu: $u_1 = a$, $v_1 = \pm 2x\sqrt{x^2 - a}$ $\sqrt{a} < |x| < \infty$. Zbog $w_1(0) = 0$, unutrašnjost hiperbole preslikava se na levu poluravan $I_m(w_1) < a$. Funkcija $w_2 = w_1 - a$ preslikava ovu poluravan $I_m(w_1) < a$ na poluravan $I_m(w_2) < 0$. Najzad, $w = \frac{w_2 + 1}{w_2 - 1}$ preslikava zadnju poluravan na unutrašnjost jediničnog kruga. Dakle je $w = \frac{z^2 - a + 1}{z^2 - a - 1}$ (sl. 51, sl. 52, sl. 53, sl. 54).



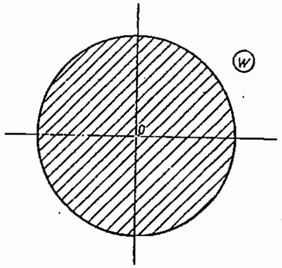
Sl. 51



Sl. 52



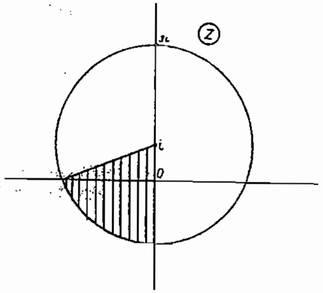
Sl. 53



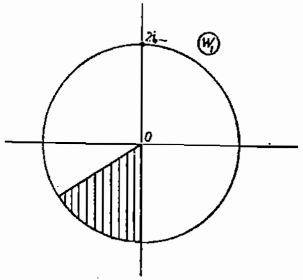
Sl. 54

3205. $w = i\left[1+\dfrac{2}{(z-i)^2+2}\right]$. Uvedimo niz elementarnih preslikavanja: $w_1 = z - i$, $w_2 = w_1^2$, $w_3 = w_2 + 2$, $w_4 = \dfrac{1}{w_3}$, $w_5 = 2\,w_4$, $w_6 = w_5 + 1$, $w = i w_6$.

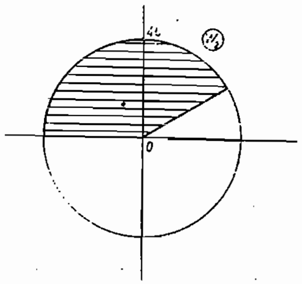
Preslikavanja su prikazana na slikama: 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61 i 62.



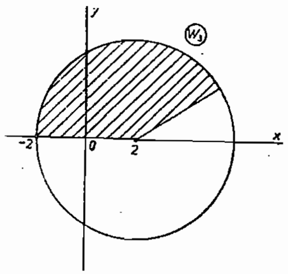
Sl. 55



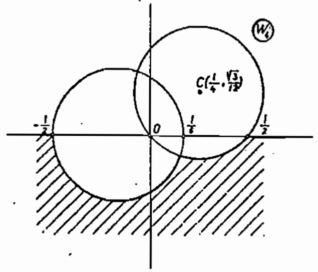
Sl. 56



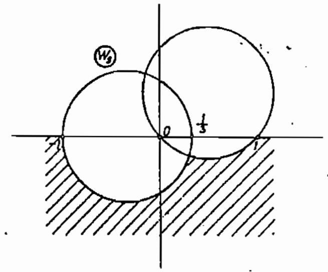
Sl. 57



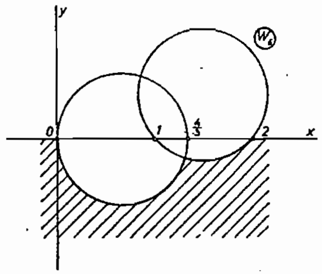
Sl. 58



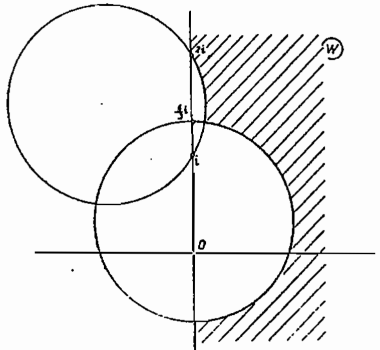
Sl. 59



Sl. 60



Sl. 61

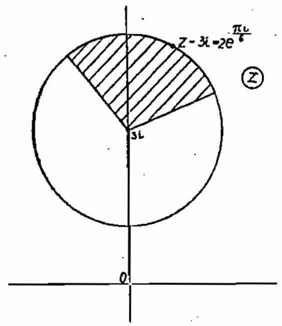


Sl. 62

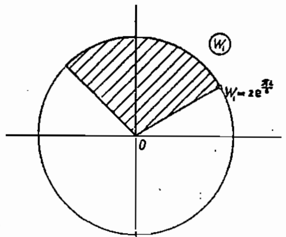
3206. $w = 1 + \dfrac{1}{(z-3\,i)^2}$. Uvedimo niz elementarnih preslikavanja:

$$w_1 = z - 3\,i,\quad w_2 = w_1^2,\quad w_3 = \frac{1}{w_2},\quad w_4 = w_3 + 1 = w.$$

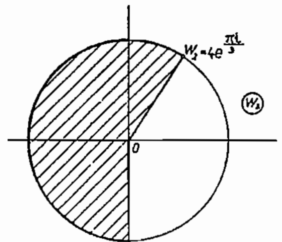
Preslikavanje oblasti G navedenim uzastopnim preslikavanjima prikazano je na slikama: 63, 64, 65, 66, 67.



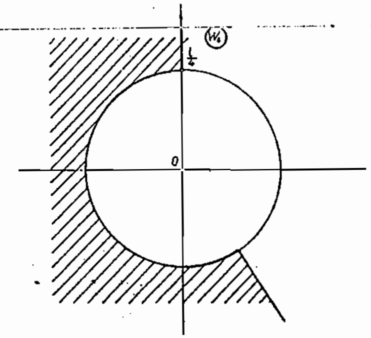
Sl. 63



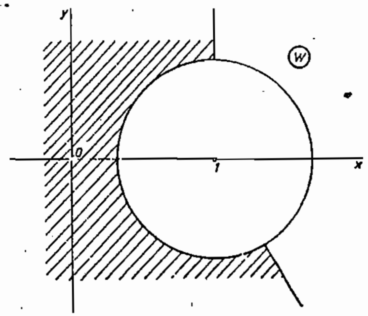
Sl. 64



Sl. 65



Sl. 66



Sl. 67

3207. Napisati: $w=1+\dfrac{1}{(z-2i)^2+1}$ i uvesti niz elementarnih preslikavanja:

$$w_1=z-2i,\ w_2=w_1^2,\ w_3=w_2+1,\ w_4=\frac{1}{w_3},\ w=1+w_4.$$

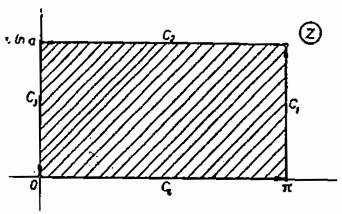
3209. $a\bar d-\bar bc=0\wedge I_m\left(\dfrac{b}{d}\right)>0.$ **3210.** $w=-i\dfrac{z+1}{z-1}.$

3211. Iz $w=e^{i\theta_0}\dfrac{z-z_0}{z-\bar z_0}$ za $z=i$ i $w=0$ sledi $z_0=i$, a za $z=\infty$ i $w=-1$ sledi $e^{i\theta_0}=-1$ pa je $w=\dfrac{i-z}{i+z}.$

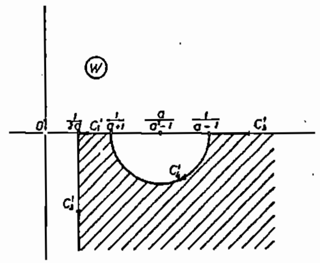
3212. $f(z)=\dfrac{(1+z^3)^2-i(1-z^3)^2}{(1+z^3)^2+i(1-z^3)^2}.$ **3213.** $(1-i)\dfrac{z-i}{2(z-1)}.$

3217. $R_e(w)>0\wedge I_m(w)>0.$ **3218.** Gornji polukrug $\left(u+\dfrac{1}{e^2-1}\right)^2+v^2=\left(\dfrac{e}{e^2-1}\right)^2.$

3219. Kontura slike je sastavljena od duži c_1', polupravih c_2' i c_3' i polukruga c_4' (sl. 68 i sl. 69).



Sl. 68

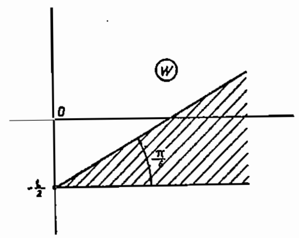


Sl. 69

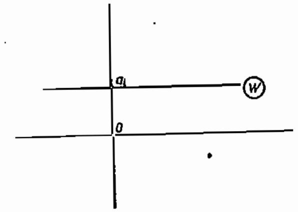
3220. Oblast ugla prikazanog na sl. 70. **3225.** 1° $e^\alpha<|w|<e^\beta\wedge\gamma<\arg w<\delta.$
2° Cela kompleksna ravan osim tačke $w=0$.

3226. $0<I_m(w)<\alpha.$ **3227.** Desna poluravan bez odsečka [0, 1].

3228. Gornja poluravan bez zareza po v osi za $0<v<1$.

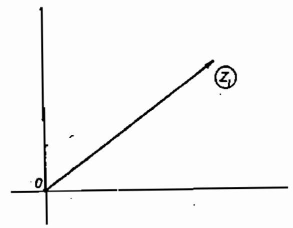


Sl. 70.

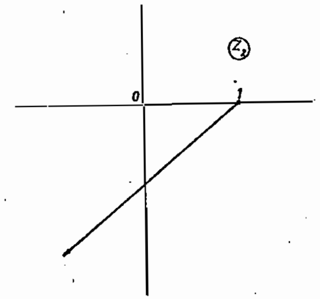


Sl. 71

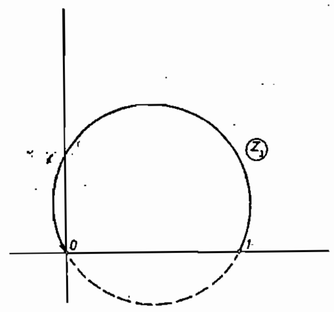
3229. 1° Iz $w=\ln\dfrac{z-1}{z+1}$ sledi $z=\dfrac{2}{1-e^w}-1$. Ovo preslikavanje se može razložiti na sledeći niz preslikavanja: $z_1=e^w$ $z_2=1-z_1$, $z_3=\dfrac{1}{z_2}$, $z=2z_3-1$ koja su redom prikazana na slikama: 71, 72, 73, 74, 75.



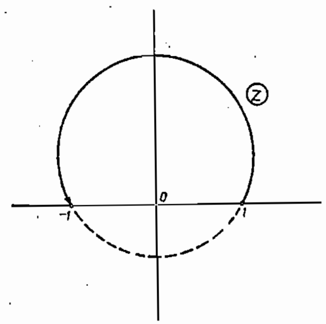
Sl. 72



Sl. 73



Sl. 74



Sl. 75

Dakle, na $I_m(w)=a\ (a\neq k\pi)$ se preslikavaju kružni luci sa krajnjim tačkama 1 i -1. Pri tome ako je $2k\pi<a<(2k+1)\pi$, luk je u gornjoj poluravni a ako je $(2k+1)\pi<a<(2k+2)\pi$, luk je u donjoj poluravni.

2° Između čitave z-ravni bez tačaka $z=\pm 1$ i svake trake $(2k-1)\pi<I_m(w)<(2k+1)\pi$ w-ravni iz koje je isključena tačka $w=2k\pi$ postoji obostrano jednoznačno preslikavanje.

3235. Za $|z|=1$ i $z=e^{i\theta}$ $(-\pi<\theta<\pi)$ imamo $w=\dfrac{\theta i}{2\cos\theta}$. Vidi se da je slika od $|z|=1$ deo imaginarne ose. Ispitajmo sada funkciju $\varphi(\theta)=\dfrac{\theta}{2\cos\theta}$. Nije teško pokazati da je za $-\pi<\theta<\theta_1$ slika deo v-ose za koju je $\dfrac{\pi}{2}>v>\dfrac{\theta_1}{2\cos\theta_1}$. Za $\theta_1<\theta<-\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\theta_1}{2\cos\theta_1}<v<\infty$. Za $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$, $-\infty<v<\infty$. Za $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\theta_2$, $\dfrac{\theta_2}{2\cos\theta_2}<v<\infty$. Za $\theta_2<\theta<\pi$, $-\dfrac{\pi}{2}<v<\dfrac{\theta_2}{2\cos\theta_2}$. θ_1 i θ_2 su nule funkcije $\varphi'(\theta)=\dfrac{\cos\theta+\theta\sin\theta}{2\cos^2\theta}$.

3237. $f(z)=1$. $\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k-z_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}(z_k-z_{k-1})=z_n-z_0=z'-z_0$. Ako je kriva Γ zatvorena tada je $\oint_\Gamma dz=0$.

3238. $\dfrac{(1+i)^2}{2}$. **3239.** $10-8\,i/3$. **3240.** Γ: $z-a=re^{it}$ $(-\pi<t<\pi)\Rightarrow z=a+re^{it}=\lambda(t)$, $\lambda'(t)=ire^{it}$, $f(z)=\dfrac{1}{z-a}=f[\lambda(t)]=\dfrac{1}{re^{it}}$. $\displaystyle\int_{|z-a|=r}\frac{1}{z-a}\,dz=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{re^{it}}\cdot ire^{it}\,dt=2\pi i$.

?(−2)

3241. 1° $\sqrt{5}\,(1-i/2)$; 2° 2; 3° $2i$; 4° 0; 5° $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$. **3242.** $2(1-i)$.

3243. 0. **3244.** πi. **3245.** 1° $2\pi i$; 2° $-2\pi i$.

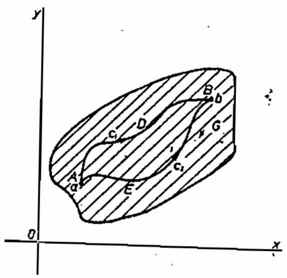
3246. $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}$ odakle je $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$ i $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}$. Osim toga ovi izvodi su neprekidni unutar i na konturi Γ. Po Greenovoj formuli imamo:

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz=\oint_\Gamma (u+iv)(dx+idy)=\oint_\Gamma (udx-vdy)+i\oint_\Gamma (vdx+udy)=$$

$$=\iint_G\left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy+i\iint_G\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy=0.$$

3248. Posmatrajmo dve putanje c_1 i c_2 koje su u oblasti G i koje spajaju tačku a sa tačkom b (sl. 76). Označimo sa Γ putanju $ADBEA$. Tada je na osnovu Cauchyeve teoreme $\oint_\Gamma f(z)\,dz=0$ ili $\int_{c_1} f(z)\,dz-\int_{c_2} f(z)\,dz=0$, odakle je

$$\int_{c_1} f(z)\,dz=\int_{c_2} f(z)\,dz.$$



Sl. 76

3249. Posmatrajmo sl. 77. Po Cauchyevoj teoremi je $\displaystyle\int_{ABCDBAEFHA} f(z)\,dz=0$. Kako je još $\displaystyle\int_{AB} f(z)\,dz=-\int_{BA} f(z)\,dz$ tj. $\displaystyle\int_{AB}+\int_{BA}=0$ to je $\displaystyle\int_{BCDB}+\int_{AEFHA}=0$ ili $\displaystyle\oint_{c_1} f(z)\,dz=\oint_{c_2} f(z)\,dz$.

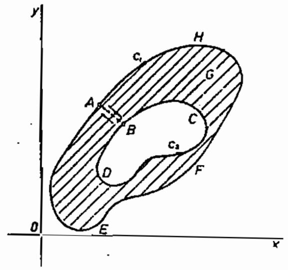
3250. $2\pi i$ za $n=1$; 0 za $n>1$. **3251.** $-156+38\,i$.

3253. $[-2+(\pi+2)\,i]\,e^{-1}-1+2\,i$

3254. $\dfrac{1}{4}\,\mathrm{ch}\,2-\dfrac{1}{2}\,\mathrm{sh}\,2+\dfrac{1}{2}\,\pi i\,\mathrm{sh}\,2$. **3255.** $\dfrac{32}{3}$.

3259. $-1+i$. **3262.** Ako je $\varrho<1$ tada je $\displaystyle\int_{|z|=\varrho}\frac{dz}{z^2+1}=0$ jer je $\dfrac{1}{z^2+1}$ regularna funkcija za $|z|<1$. Ako je $\varrho>1$ onda je $\displaystyle\int_{|z|=\varrho}\frac{dz}{z^2+1}=\int_{\gamma_1}\frac{dz}{z^2+1}+\int_{\gamma_2}\frac{dz}{z^2+1}$ gde su γ_1 i γ_2 krugovi kao na sl. 78. Dalje je $\displaystyle\int_{\gamma_1}\frac{dz}{z^2+1}=\int_{\gamma_1}\frac{1}{z-i}\,\frac{dz}{z+i}=2\pi i\cdot\frac{1}{-i-i}=-\pi$.

Slično je $\displaystyle\int_{\gamma_2}\frac{dz}{z^2+1}=\pi$. Prema tome je u svim slučajevima $\displaystyle\int_{|z|=\varrho}\frac{dz}{z^2+1}=0$.

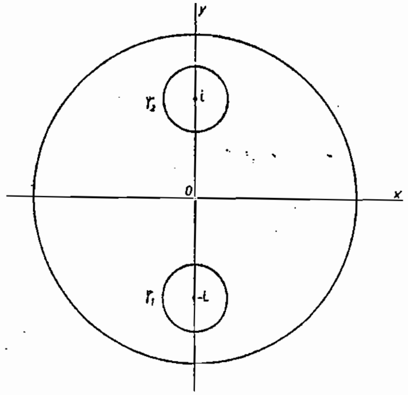


Sl. 77

3263. Ako su tačke $z=1$ i $z=-1$ izvan konture c integral je jednak nuli. Inače vrednost integrala zavisi od toga da li su jedna ili obe od ovih tačaka unutar konture c.

3265. Na e^{iz^2} se može primeniti Cauchyeva teorema pa je $\displaystyle\int_c e^{iz^2}dz=\int_{\widehat{OA}}+\int_{\widehat{AB}}+\int_{BO}=0$. $\left(\displaystyle\int_{\widehat{OA}}=\int_{\widehat{OA}} e^{iz^2}dz\right)$. Izračunajmo posebno svaki od ovih integrala. Na $\widehat{OA}$ je $z=x$ pa je $0<x<R$ i $\displaystyle\int_{\widehat{OA}}=\int_0^R e^{ix^2}dx$. Na luku $\widehat{AB}$ je $z=R(\cos\theta+i\sin\theta)$, $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}$, pa je $\displaystyle\int_{AB}=\int_0^{\pi/4} e^{iR^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)}\cdot R(-\sin\theta+i\cos\theta)\,d\theta$. Na $\widehat{BO}$ je $z=e^{\frac{\pi}{4}i}\,t$, $0\le t\le R$, $dz=e^{\frac{\pi}{4}i}\,dt$, pa je

$$\int_{\widehat{BO}}=e^{\frac{\pi}{4}i}\int_R^0 e^{-t^2}\,dt=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\int_0^R e^{-t^2}\,dt.$$



Sl. 78

Za $R \to \infty$ $\int\limits_{\widehat{BO}}$ teži $-\frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1+i)$ jer je $\int\limits_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$. Pokažimo sada da $\int\limits_{\widehat{AB}}$ teži nuli kad $R \to \infty$. Imamo:

$$\left|\int\limits_{\widehat{AB}}\right| \leqslant R \int\limits_0^{\pi/4} |e^{iR^2\cos 2\theta + i\sin 2\theta}|\,|-\sin\theta + i\cos\theta|\,d\theta \leqslant R\int\limits_0^{\pi/4} e^{-R^2\sin 2\theta}\,d\theta.$$

Kako je $\sin\alpha > \frac{2}{\pi}\alpha$ za $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ to je $\left|\int\limits_{\widehat{AB}}\right| \leqslant R\int\limits_0^{\pi/4} e^{-\frac{4R^2}{\pi}}\,d\theta = -\frac{\pi}{4R}(e^{-R^2}-1)$.

Odavde se vidi da $\int\limits_{\widehat{AB}} \to 0$ kad $R\to\infty$. Prema tome je za $R\to\infty$ $\int\limits_{\widehat{OA}} -\frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1+i)$ tj.

$$\int\limits_0^\infty \cos x^2\,dx = \int\limits_0^\infty \sin x^2\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

3266. Na osnovu Cauchyeve teoreme imamo $\int\limits_{\widehat{AB}} + \int\limits_{\widehat{BC}} + \int\limits_{\widehat{CD}} + \int\limits_{\widehat{DA}} = 0$. Lako je pokazati da je:

$$\int\limits_{AB} = \int\limits_{-R}^{R} e^{-\lambda x^2}\,dx,\quad \int\limits_{\widehat{BC}} = i\int\limits_0^a e^{-\lambda(R^2-y^2)}(\cos 2\lambda Ry - i\sin 2\lambda Ry)\,dy,\quad \int\limits_{\widehat{CD}} =$$

$$= -e^{a^2\lambda}\int\limits_{-R}^{R} e^{-\lambda x^2}(\cos 2a\lambda x - i\sin 2a\lambda x),\quad \int\limits_{DA} = -i\int\limits_0^R e^{-\lambda(R^2-y^2)}\,e^{2R\lambda iy}\,dy.$$ Za $R\to\infty$ pokazuje se da $\int\limits_{BC} \to 0$, $\int\limits_{DA} \to 0$, $\int\limits_{AB} \to \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$, $\int\limits_{CD} \to -e^{\lambda a^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 x^2}\cos 2\lambda a x\,dx$ pa je

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2}\cos 2\lambda a x\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\,e^{-\lambda a^2}.$$

3267. $\frac{\pi}{2}$.

3268. 1° $f(z) = \frac{1}{z^2+25}$ je regularna funkcija unutar i na konturi c pa je na osnovu Cauchyeve integralne teoreme $\oint\limits_c \frac{dz}{z^2+25} = 0$.

2° Na osnovu Cauchyeve integralne formule je $\oint\limits_c \frac{dz}{z^2+25} = \oint\limits_c \frac{dz}{(z+5i)(z-5i)} =$

$= 2\pi i\varphi(5i)$ gde je $\varphi(z) = \frac{1}{z+5i}$. Prema tome je $\oint\limits_c \frac{dz}{(z+5i)(z-5i)} =$

$= 2\pi i\frac{1}{5i+5i} = \frac{\pi}{5}$.

3° $\oint\limits_c \frac{dz}{(z+5i)(z-5i)} = 2\pi i\frac{1}{-5i-5i} = -\frac{\pi}{5}$.

4° $\oint\limits_c \frac{dz}{z^2+25} = \oint\limits_{\gamma_1} \frac{dz}{z^2+25} + \oint\limits_{\gamma_2} \frac{dz}{z^2+25}$, gde su γ_1 i γ_2 krugovi jedan izvan drugog tako da je tačka $5i$ u unutrašnjosti kruga γ_1 a tačka $-5i$ u unutrašnjosti kruga γ_2.

Dalje je $\int\limits_{\gamma_1} = 2\pi i\frac{1}{5i+5i} = \frac{\pi}{5}$ i $\int\limits_{\gamma_2} = 2\pi i\frac{1}{-5i-5i} = -\frac{\pi}{5}$ pa je $\oint\limits_c \frac{dz}{z^2+25} = 0$.

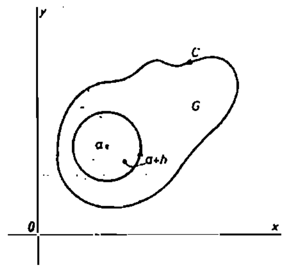
3269. Ako je 0 u unutrašnjosti konture c a 1 i -1 izvan te konture, tada je $I = -2\pi i$. Ako je 1 ili -1 u unutrašnjosti konture c a 0 izvan, tada je $I = \pi i$. Postoje još slučajevi kad je $I = 2\pi i$, $I = -\pi i$ i $I = 0$.

3271. Neka je K krug sa centrom u tački a i poluprečnikom r, koji je sadržan u G i $a+h$ tačka toga kruga (sl. 79). Tada je na osnovu Cauchyeve integralne formule

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_c \frac{1}{h}\left[\frac{1}{z-(a+h)} - \frac{1}{z-a}\right]f(z)\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_c \frac{f(z)\,dz}{(z-a-h)(z-a)} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_c \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2} +$$

$$+ \frac{h}{2\pi i}\oint\limits_c \frac{f(z)\,dz}{(z-a-h)(z-a)^2}.$$



Sl. 79

Neka je $|h| < \frac{r}{2}$. Tada je $|z-a-h| \geqslant |z-a| - |h| > r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}$. Pošto je funkcija $f(z)$ regularna unutar K i na K ona je ograničena na K. Neka je na K $|f(z)| < M$. Imaćemo:

$$\left|\frac{h}{2\pi i}\oint\limits_c \frac{f(z)\,dz}{(z-a-h)(z-a)^2}\right| = \frac{|h|}{2\pi}\left|\oint\limits_c \frac{f(z)\,dz}{(z-a-h)(z-a)^2}\right| < \frac{|h|}{2\pi}\cdot\frac{M\,2r}{\frac{r}{2}\cdot r^2} = 2|h|M/r^2.$$ Ako $h\to 0$ sledi da je $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_c \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz$.

3274. Sledi iz Cauchyeve integralne formule $f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_c \frac{f(z)}{z-a}\,dz$ ako se stavi $z-a = re^{it}$.

3275. $\frac{1}{4}$. **3276.** $-\pi\ln 2$. **3277.** $\oint\limits_c \frac{\sin\pi z^2+\cos\pi z^2}{(z-1)(z-2)}\,dz = \oint\limits_c \frac{\sin\pi z^2+\cos\pi z^2}{(z-2)}\,dz - \oint\limits_c \frac{\sin\pi z^2+\cos\pi z^2}{z-1}\,dz$. Primenom Cauchyeve integralne formule dobijamo da je prvi integral jednak $2\pi i$ a drugi $-2\pi i$. Prema tome je $\oint\limits_c \frac{\sin\pi z^2+\cos\pi z^2}{(z-1)(z-2)}\,dz = 4\pi i$.

3278. Primenom rezultata iz zadatka 3272 za $f(z) = e^{2z}$, $a=-1$, $n=3$, dobija se $8e^{-2} = \frac{3!}{2\pi i}\oint\limits_c \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\,dz$ odakle je $\oint\limits_c \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\,dz = \frac{8\pi i e^{-2}}{3}$.

3279. $2\pi i \sin t$. 3280. $-\pi i$. 3281. $\frac{1}{2\pi i}\frac{f'''(a)}{3!}$. 3282. $21\pi i/16$.

3283. $4\pi i t \cos t$. 3284. Pođimo od $f_{(a)}^{(n)}=\frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_c \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$ $(n=0,1,2,\ldots)$. Sledi $|f_{(a)}^{(n)}|=$

$$=\frac{n!}{2\pi}\left|\oint\limits_c \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\right|=\frac{n!}{2\pi}\left|\oint\limits_c \frac{f(re^{it})}{r^{n+1}e^{(n+1)it}}rie^{it}dt\right|<\frac{n!}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\frac{f(re^{it})}{r^{n+1}e^{nit}}ri\right|dt<$$

$$<\frac{n!\,M}{2\pi r^n}\int\limits_0^{2\pi}dt=\frac{n!\,M}{r^n}.$$

3285. Iz prethodnog zadatka, za $n=1$, dobijamo $|f'(z)|<\frac{M}{r}$. Za $r\to\infty$ sledi $f'=0$ tj. $f(z)=c$.

3286. Ako jednačina $P(z)=0$ nema korena tada je $f(z)=\frac{1}{P(z)}$ regularna funkcija u celoj kompleksnoj ravni. Na osnovu Liouvilleove teoreme sledilo bi da je $f(z)$ konstantna u celoj ravni tj. $P(z)$ mora biti konstantna u celoj ravni, što je nemoguće.

3287. Na osnovu prethodnog zadatka jednačina $P(z)=0$ ima bar jedan koren. Neka je α taj koren. Tada je $P(\alpha)=0$ pa je $P(z)\equiv P(z)-P(\alpha)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n-(a_0+a_1\alpha+\cdots+a_n\alpha^n)=a_1(z-\alpha)+a_2(z^2-\alpha^2)+\cdots+a_n(z^n-\alpha^n)=(z-\alpha)Q(z)$ gde je $Q(z)$ polinom stepena $n-1$. $Q(z)$ takođe ima bar jednu nulu β pa je kao i u prethodnom slučaju $Q(z)\equiv(z-\beta)R(z)$ tj. $P(z)=(z-\alpha)(z-\beta)$ itd.

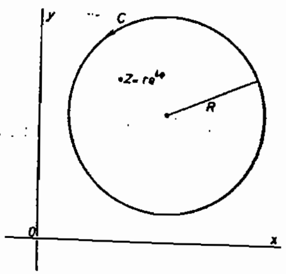
3288. Po Cauchyevoj integralnoj formuli imamo

$$f(z)=f(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_c\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \quad \text{i} \quad f\left(\frac{R^2}{\bar z}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_c\frac{f(\zeta)}{\zeta-R^2/\bar z}d\zeta=0.$$

Sada je $f(z)=f(z)-f(R^2/\bar z)=$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_c\frac{z-R^2/\bar z}{(\zeta-z)(\zeta-R^2/\bar z)}f(\zeta)\,d\zeta.$$



Sl. 80

Ako se u ovom integralu z zameni sa $re^{i\theta}$ a ζ sa $Re^{i\varphi}$ (sl. 80), posle sređivanja dobija se:

$$f(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)f(Re^{i\varphi})}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\varphi.$$

3290. U zadatku 3288 staviti $f(z)\equiv 1$. 3292. 5. 3293. -2.

3294. 1° $14\pi i$; 2° $12\pi i$; 3° $2\pi i$. 3295. $4\pi i$. 3296. 1° $-a_1/a_0$; 2° $(a_1^2-2a_0a_2)/a_0^2$.

3297. Neka je $f(z)=-4z^5$ i $\varphi(z)=z^8+z^2-1$. Tada je $f(z)+\varphi(z)\equiv z^8-4z^5+z^2-1$. Za $|z|=1$ imamo $|f(z)|=|-4z^5|=4$ i $|\varphi(z)|=|z^8+z^2-1|<|z^8|+|z^2|+1=$ $=|z|8+|z|^2+1=3$ pa je $|f(z)|>|\varphi(z)|$. Prema Rouchéovoj teoremi unutar kruga $|z|=1$ funkcija $f(z)+\varphi(z)$ ima onoliko nula koliko ih ima funkcija $f(z)$ tj. 5 $(z=0$ je nula funkcije $f(z)$ petog reda).

3298. 1. 3299. 4. 3300. 1° 0; 2° 4. 3302. 1. 3309. Po jedan u svakom kvadrantu.

3310. $P_n(z)=z^n\left(1+\frac{a_1}{z}+\cdots+\frac{a_n}{z^n}\right)$. Primeniti sada princip argumenta na polukrug $|z|<r$, $R_e(z)>0$ za dovoljno veliko r. 3311. 0.

3315. Neka je $f(z)=a_nz^n$ i $g(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_{n-1}z^{n-1}$. Ako je K krug sa centrom u koordinatnom početku i poluprečnikom $r(>1)$ tada je na tom krugu

$$\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right|=\frac{|a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_{n-1}z^{n-1}|}{|a_nz^n|}<\frac{|a_0|+|a_1|\,|z|+\cdots+|a_{n-1}|\,|z^{n-1}|}{|a_n|\,|z^n|}=$$

$$<\frac{|a_0|\,r^{n-1}+|a_1|\,r^{n-1}+\cdots+|a_{n-1}|\,r^{n-1}}{|a_n|\,r^n}=\frac{|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_{n-1}|}{|a_n|\,r}.$$

Ako je r dovoljno veliko, ovaj količnik je veći od 1 tj. $\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right|>1$ ili $|f(z)|>|g(z)|$ itd.

3317. Neposredno sledi iz principa maksimuma modula. 3318. Sledi iz principa maksimuma modula.

3319. Primeniti princip maksimuma modula na funkciju $\frac{f(z)}{z}$.

3320. Parcijalna suma S_n je $S_n=\sum\limits_{\nu=1}^{n}a_\nu=\frac{1-a^n}{1-a}$. Za $|a|<1$ je $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{1-a}$. Za $|a|>1$, $a\neq 1$ red divergira jer niz a^n divergira. Za $a=1$, $S_n=n$ tj. red divergira.

3321. $$S_n=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(-1)^\nu(2\nu+1)+i}{\nu(\nu+1)}=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(-1)^\nu(2\nu+1)}{\nu(\nu+1)}+i\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu(\nu+1)}=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{2\nu(-1)^\nu}{\nu(\nu+1)}+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(-1)^\nu}{\nu(\nu+1)}+i\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu(\nu+1)}=2\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n+1}\right]+\left\{\left(-\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left[\frac{(-1)^n}{n}-\frac{(-1)^n}{n+1}\right]\right\}+i\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=2\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n+1}\right]+2\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\frac{(-1)^n}{n}\right]-1-\frac{(-1)^n}{n+1}+i\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=-1-\frac{(-1)^n}{n+1}+i\left(1-\frac{1}{n+1}\right).$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left[-1-\frac{(-1)^n}{n+1}\right]+\lim_{n\to\infty}i\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=-1+i.$$

$\left(\text{Koristili smo razlaganje } \frac{1}{\nu(\nu+1)}=\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}\right).$

3322. $S_n = \dfrac{1-\left(e^{\frac{\pi i}{2}}\right)^{n+1}}{1-e^{\frac{\pi i}{2}}}\Big/2$. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{2}{2-}$.

3324. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|z_n|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\dfrac{2+i^n}{2^n}\right|} = \dfrac{1}{2}\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|2+i^n|} = \dfrac{1}{2}$.

3325. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\dfrac{n|a^n|}{2^n}} = \dfrac{|a|}{2}$. Za $|a|<2$ konvergira. Za $|a|>2$ divergira.

3326. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a+i}{n+1}\right| = 0$. Red konvergira.

3327. Primenom Cauchyevog testa nalazimo:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a^{2n-1}+b^{2n}|} < \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a|^{2n-1}+|b|^{2n}} < \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2|b|^{2n}} =$$

$$= |b|^2 \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2} = |b|^2 < 1.$$

3328. Cauchyev. Videti prethodni zadatak.

3329. D'Alembertov test ne daje odgovor jer je $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{3+2i-n}{n+1}\right| = 1$.

Raabetovim testom nalazimo: $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|-1\right] = \lim\limits_{n\to\infty} n\left[\dfrac{1}{n+1}\sqrt{(3-n)^2+4}-1\right] =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}\,\dfrac{-8n+14}{\sqrt{n^2-6n+13}+n+1} = -4$. Prema tome red apsolutno konvergira.

3331. Iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sledi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|\cos\arg a_n >$

$> \sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|\cos\alpha$. 3333. Primeniti Raabetov test.

3335. Red apsolutno ne konvergira jer je $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{e^{ni}}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{n}\dfrac{1}{n}$. Primenom Dirichletovog testa

nalazimo: $\left|\sum\limits_{\nu=}^{n} e^{\nu i}\right| = \dfrac{\sqrt{(1-\cos n)^2+\sin^2 n}}{\sqrt{(1-\cos 1)^2+\sin^2 1}} < \dfrac{\sqrt{5}}{\sin 1}$. Kako $\dfrac{1}{n}\searrow 0$ $n\to\infty$ to znači da red konvergira.

3336. $\left|\sum\limits_{\nu=2}^{n} e^{\nu\theta i}\right| < \dfrac{1}{\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|} \wedge \dfrac{1}{\ln n}\searrow 0$.

3337. $\left|\dfrac{(-1)^\nu e^{\nu\theta i}}{\nu^\alpha}\right| = \dfrac{1}{\nu^\alpha}$. Za $\alpha>1$ red $\sum\dfrac{1}{n^\alpha}$ konvergira na osnovu Cauchyevog integralnog testa. Za $0<\alpha<1$ iskaz je tačan na osnovu Dirichletovog testa jer je

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^\nu e^{\nu\theta i}\right| < \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}} \text{ i } \frac{1}{n^\alpha}\searrow 0.$$

Za $\theta = \pm\pi$ red se svodi na $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}$ koji divergira. Najzad, za $\alpha\leqslant 0$ i za bilo koje θ red divergira jer mu opšti član ne teži nuli.

3339. Konvergira. 3340. Konvergira. 3341. Za $\alpha>1$ apsolutno konvergira. Za $0<\alpha<1$ konvergira obično. 3342. Apsolutno konvergira.

3343. Konvergira neapsolutno. 3344. Konvergira neapsolutno. 3345. Divergira.

3346. Red $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^\nu}{\sqrt{\nu+1}}$ konvergira po Dirichletovom testu jer je $\left|\sum\limits_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\right|<1$, a $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ monotono teži nuli kad $n\to\infty$.

3348. $R=1$. 3349. $R=\infty$. 3350. 2. 3351. e. 3352. 1. 3353. 1.

3354. $1/e$. 3355. 1 za $|z_0|<1$; $1/|z_0|$ za $|z_0|>1$.

3356. $R=\left|2\sin\dfrac{\alpha}{2}\right|$. 3357. 1° R; 2° R. 3358. 1° 0 ako je $R<\infty$; 2° ∞.

3359. $z/(1-z)^2$. 3360. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+z}{1-z}$. 3361. Divergira u svakoj tački ruba.

3362. Konvergira neapsolutno za $z\neq 1$. 3363. Konvergira apsolutno u svim tačkama ruba $|z|=1$.

3364. Konvergira neapsolutno u svim tačkama ruba osim u $z=-1$.

3365. Konvergira neapsolutno u svim tačkama ruba osim u tačkama -1 i $\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

3367. 1° Za svako $z\in G$ važi: $\left|\dfrac{1}{z^2+n^2}\right| < \dfrac{1}{|n^2-|z|^2|} = \dfrac{1}{n^2-|z|^2} < \dfrac{1}{n^2-1}$. Kako red $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^2-1}$ konvergira, to dati red uniformno konvergira. 2° Pošto red uniformno konvergira u datoj oblasti funkcija $F(z)$ je neprekidna. 3° $\lim\limits_{z\to 0} F(z) = F(0) = \sum\limits_{2}^{\infty}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}-1$.

4° Red $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{z^2+n^2}$ uniformno konvergira. Pošto su $\frac{1}{z^2+n^2}$ funkcije regularne u G sledi da je $F(z)$ regularna u G. Red $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{z^2+n^2}\right)' = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{-2z}{(z^2+n^2)^2}$ takođe konvergira uniformno jer je $\frac{-2z}{(z^2+n^2)^2} \leqslant \frac{2}{(n^2-|z|^2)^2} \leqslant \frac{2}{(n^2-1)^2}$. Prema tome je $F'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2z}{(z^2+n^2)^2}$. $F'(0)=0$. 5° Iz uniformne konvergencije datog reda u oblasti G sledi $\int\limits_{|z|=1/2} F(z)\,dz = \sum_{n=2}^{\infty} \int\limits_{|z|=1/2} \frac{1}{z^2+n^2}\,dz = \sum_{n=2}^{\infty} 0 = 0$. $\left(\text{Funkcije } \frac{1}{z^2+n^2} \text{ su regular-}\right.$ $\left.\text{ne u oblasti } |z| \leqslant \frac{1}{2}\right)$.

3371. $|z| < R$ gde je $R<3$. **3372.** $|z-i| \leqslant 1$. **3373.** $|z| > R$ gde je $R>1$.

3374. Svako z. **3375.** 1° $\frac{1}{1-z}$ ($|z|<1$); 2° $\frac{z}{(1-z)^2}$ ($|z|<1$); 3° $\frac{1+z}{(1-z)^3}$ ($|z|<1$).

3376. 1° 1/2; 2° 0.

3377. 1° Obično konvergira za $|z| \leqslant 1$; $z \neq -1$, $e^{\frac{\pi i}{3}}$, $e^{-\frac{\pi i}{3}}$. Apsolutno konvergira za $|z|>1$. Uniformno konvergira u svakoj zatvorenoj oblasti koja je sadržana u oblasti $|z| \leqslant 1$ koja ne sadrži tačke: $1, e^{\frac{\pi i}{3}}, e^{-\frac{\pi i}{3}}$.

2° $f(z) = \frac{1}{18z}\left[6\ln(1+z) - 3\ln(z^2-z+1) + 6\sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\frac{2z-1}{3} + \pi\sqrt{3}\right]$.

3378. Apsolutno konvergira za $\left|\frac{z+1}{1-z}\right| < 1$. Uniformno konvergira u svakoj zatvorenoj oblasti koja je sadržana u gornjoj oblasti.

3379. Apsolutno konvergira za $|z-1|>1$. **3380.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $R=\infty$.

3381. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$, $R=\infty$. **3382.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $R=\infty$.

3383. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R=\infty$. **3384.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $R=\infty$.

3385. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} z^{2n}}{(2n)!}$, $R=\infty$. **3386.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$, $R=1$.

3387. $a^m \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n}\left(\frac{z}{a}\right)^n$ gde je $\binom{m}{0}=1$, $\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$, $R=|a|$ $(a^m = e^{m\ln a}$

3388. $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$, $R=2$. **3389.** $\sum (-1)^n \frac{a^n z^n}{b^{n+1}}$, $R = \left|\frac{b}{a}\right|$.

3390. $-\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$, $R=1$ $\left(\frac{1}{z^2-3z+2} = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}\right)$.

3391. $(-a)^{-m}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m+1)\cdots(m+n-1)}{n!\,a^n} z^n\right]$, $R=|a|$.

3392. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \sin\frac{n\pi}{4}}{n!} z^n$, $R=\infty$. **3393.** $\frac{1+i}{\sqrt{2}}\left[1 + \frac{z}{2i} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\left(\frac{z}{i}\right)^n\right]$, $R=1$.

3394. $-2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $R=1$. **3395.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $R=1$.

3396. U Laurentov red oko svake tačke, u Taylorov red oko svake tačke različite od 0, 4, ∞.

3397. $-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$, $|z|<2$; $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}$, $|z|>2$.

$\left(\text{Za } |z|>2: \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-2/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}\right)$.

3398. $\frac{1}{(z-3)(z-4i)} = \frac{1}{3-4i}\left(\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-4i}\right)$. Za $|z|<3$ imamo: $\frac{1}{(z-3)(z-4i)} =$

$= \frac{1}{3-4i}\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{(4i)^{n+1}}\right]z^n$. Za $3<|z|<4$: $\frac{1}{(z-3)(z-4i)} =$

$= \frac{1}{3-4i}\left[\sum_{n=-\infty}^{0} 3^{-n} z^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4i)^{n+1}} z^n\right]$.

Za $|z|>4$ imamo: $\frac{1}{(z-3)(z-4i)} = \frac{1}{3-4i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}} - \frac{1}{(4i)^{n+1}}\right)z^{-n}$.

3399. $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-2}$, $0<|z|<1$; $\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-3}$, $|z|>1$.

3400. $(-a)^{-m}\left[1 + \sum \binom{m}{n}\left(\frac{z}{a}\right)^n\right]$, $|z|<|a|$; $\frac{1}{z^m}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{m}{n}\left(\frac{a}{z}\right)^n\right]$, $|z|>|a|$.

3401. $\frac{1}{b-a}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{a^{n+1}b^{n+1}} z^n$, $|z|<|a|$; $\frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+1}}\right]$,

$0<|z-a|<|b-a|$; $\frac{1}{b-a}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b^{n-1}-a^{n-1}}{z^n}$, $|z|>|b|$.

3402. $\frac{1}{2}\,\frac{1}{z-ai} + \frac{1}{4ai}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2ai)^n}(z-ai)^n$, $0<|z-ai|<2a$;

$\frac{1}{z-ai} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2ai)^n}{(z-ai)^{n+1}}$, $|z-ai|>2a$. **3403.** $\frac{1}{2} + z + z^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!\,z^n}$, $0<|z|<\infty$.

3404. $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i}{n}\frac{1}{(z-i)^{n+1}}+\frac{1-i}{z-i}+z-i.$ 3405. $\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n-1}}{(2n+1)!};\ |z|>0.$

3406. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n-a^n}{nz^n},\ |z|>\max(|a|,|b|).$ 3407. $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left(1+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!(z-1)^n},\ 0<|z-1|<\infty.$

3408. $\frac{2}{z-1}+1+\frac{5}{2}(z-1)+\sum_{n=2}^{\infty}\binom{1/2}{n}(z-1)^{2n-1},\ 0<|z-1|<1;$

$\frac{1}{z-1}+2+2(z-1)+(z-1)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{1/2}{n}|z-1|^{2n};\ |z-1|>1.$

3409. $\frac{2}{(i-1)^3}\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(n+2)(n+3)}{(i-1)^{n+4}}+\frac{(n+1)(n+2)}{(i-1)^{n+3}}\right](z-1)^n,\ 0<|z-1|<\sqrt{2}.$

3410. $-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n-1}}{2^{2n}}-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^{2n-1}}.$

3411. $1^\circ\ \frac{1}{9}\left[\sum_{n=-\infty}^{-1}z^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3n+7}{4^{n+2}}z^{2n}\right];\ 2^\circ\ \frac{1}{9}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+(3n-7)4^{n-2}}{z^{2n}}.$

3412. $\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}z^{-n},\ c_n=c_{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(n+k)!}\ (n=0,1,2,\ldots).$

3413. $1^\circ\ \frac{1}{z}-2\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^{2n-1},\ a_n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\pi k)^{2n}}\ (|z|<\pi).$

$2^\circ\ \frac{3}{z}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^{2n}}{z^{2n+1}}-2\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^{2n-1},\ a_n=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(\pi k)^{2n}},\quad (\pi<|z|<2\pi).$

3414. $\pm\left[z-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(k+1)!}\frac{1}{(2z)^k}\right].$

3416. $\pm 2i$ polovi prvog reda; $z=\infty$ otklonjiv singularitet.

3417. 0 i ± 1 polovi prvog reda; $z=\infty$ otklonjiv singularitet.

3418. $z=1$ pol drugog reda; $z=\infty$ pol trećeg reda. 3419. $1^\circ\ k=4;\ 2^\circ\ k=4.$

3420. $\pm\sqrt{3}\,i$ polovi prvog reda; $z=\infty$ esencijalni singularitet.

3421. $z=\infty$ esencijalni singularitet.

3422. $z=z_0$ esencijalni singularitet; $z=\infty$ otklonjiv singularitet?

3423. $z=0$ esencijalni singularitet: $z=\infty$ pol prvog reda.

3424. $z=0,\ \infty$ esencijalni singulariteti. 3425. $z=0$ i $z=\infty$ esencijalni singulariteti.

3426. $z=k\pi\,(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2)$ polovi prvog reda; $z=\infty$ tačka nagomilavanja polova.

3427. $z=0$ pol drugog reda; $z=\infty$ esencijalni singularitet.

3428. $z=0$ pol drugog reda; $z=\infty$ esencijalni singularitet.

3429. $z=\frac{2k+1}{2}\pi\ (k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$ polovi drugog reda; $z=\infty$ granična tačka polova.

3430. $z=k\pi\,(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$ polovi prvog reda; $z=\infty$ tačka nagomilavanja polova.

2431. $z=0$ i $z=\infty$ esencijalni singulariteti.

3432. $z=2k\pi i\ (k=\pm 1,\ \pm 2,\ldots)$ polovi prvog reda; $z=\infty$ esencijalni singularitet.

3433. 1° $z=\infty$ pol k-og reda gde je $k=\max(m,n)$ za $m\neq n$; ako je $m=n$ tačka $z=\infty$ je pol reda $k<n$ ili otklonjiv singularitet. 2° $z=\infty$ pol reda $n-m$ ako je $n>m$ i otklonjiv singularitet za $n<m$; $z=z_k$ (z_k su nule polinoma $Q_m(z)$) su polovi. 3° $z=\infty$ pol $n+m$-og reda.

3435. $1^\circ\ f(re^{it})=\sum_{n=0}^{\infty}a_n r^n e^{nit}.\quad |f(re^{it})|^2=\sum_{n=0}^{\infty}a_n r^n e^{nit}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\bar{a}_n r^n e^{-nit}=$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu r^\nu e^{\nu it}\cdot\bar{a}_{n-\nu}r^{n-\nu}e^{-(n-\nu)it}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu\bar{a}_{n-\nu}r^n e^{(-n+2\nu)it}.$$

$$\Rightarrow\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|^2\,dt=\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu\bar{a}_{n-\nu}r^n e^{(2\nu-n)it}\right)dt=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu\bar{a}_{n-\nu}r^n\int_0^{2\pi}e^{(2\nu-n)it}\,dt.$$

Zadnji integral je jednak nuli za n neparno i bilo koje ν. Ako je $n=2k$ onda je $\int_0^{2\pi}e^{(2\nu-n)it}\,dt=2\pi$ a $k=\nu$. U svim ostalim slučajevima je $\int_0^{2\pi}e^{(2\nu-n)it}\,dt=0$. Prema tome je

$$\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|^2\,dt=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\bar{a}_k r^{2k}\cdot 2\pi\ \text{ odakle je }\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|^2\,dt=\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^2r^{2k}.$$

$$2^\circ\ |a_n|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta\right|<\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\max f(\zeta)}{r^{n+1}}r\,dt=\frac{M(r)}{r^n}.$$

3° Iz 1° sledi $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}<[M(r)]^2$. Sa druge strane je $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}\geq|a_k|^2r^{2k}=$ $=\frac{[M(r)]^2}{r^{2k}}r^{2k}=[M(r)]^2$. Iz svega sledi da je $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}=[M(r)]^2=$ $=|a_k|^2r^{2k}$ pa je $|a_n|=0$ za $n\neq k$. Time je pokazano da je $f(z)=a_k z^k$. 4° Iz $|a_n|<\frac{M(r)}{r^n}$ sledi da je $|a_n|<\lim_{r\to\infty}\frac{M(r)}{r^n}$ pa je $a_n=0$ za $n\neq 0$. Znači da je $f(z)=a_0$.

3439. $2\pi^2M$. 3440. ± 1 algebarske tačke grananja prvog reda; $z=\infty$ algebarska tačka grananja prvog reda.

3441. $-1,\ e^{\frac{\pi i}{3}},\ e^{-\frac{\pi i}{3}}$ algebarske tačke grananja drugoga reda; $z=\infty$ pol za sve tri granc

3442. $z=0$ i $z=\infty$ algebarske tačke grananja drugog reda.

3443. $z=0$ i $z=\infty$ algebarske tačke grananja m_1-1 -og reda gde je $\frac{n_1}{m_1}$ nesvodljiv razlomak jednak razlomku $\frac{n}{m}$.

3444. $z=0$ algebarska tačka grananja prvog reda; $z=\infty$ transcendentna tačka grananja.

3445. $z=0$ i $z=\infty$ algebarske tačke grananja; $z=1$ esencijalni singularitet za jednu od dve jednoznačne grane.

3446. $z=0$ i $z=\infty$ algebarske tačke grananja drugog reda; $z=1$ pol prvog reda jedne grane; $z=e^{\pm\frac{2\pi i}{3}}$ polovi prvog reda druge grane.

3447. 0, $\sqrt[3]{1/2}\,e^{\frac{\pi i}{6}}$, $\sqrt[3]{1/2}\,e^{\frac{5\pi i}{6}}$, $\sqrt[3]{1/2}\,e^{-\frac{\pi i}{2}}$ algebarske tačke grananja drugoga reda. $z=\infty$ otklonjiv singularitet.

3448. $z=0$ algebarska tačka grananja prvog reda; $z=\infty$ transcendentna tačka grananja.

3449. $z=0$ otklonjiv singularitet; $z=\infty$ transcendentna tačka grananja.

3450. $z=\frac{\pi}{2}+k\pi$ algebarske tačke grananja prvog reda; $z=\infty$ transcendentna tačka grananja prvog reda.

3451. $z=\sqrt{\pi(2k+1)}$ algebarske tačke grananja drugog reda. $z=\infty$ esencijalni singularitet.

3452. Za $n=0$: $z=0$ i $z=\infty$ otklonjivi singulariteti. Za $n<0$: $z=0$ i $z=\infty$ logaritamska tačka grananja; $z=1$ esencijalni singularitet za jednu od jednoznačnih grana. Za $n>1$: $z=0$ i $z=\infty$ logaritamska tačka grananja.

3453. $z=1$ i $z=\infty$ logaritamska tačka grananja a $z=0$ pol prvog reda za sve grane.

3454. Transcendentne tačke grananja su ∞, $\pm i$. Za determinaciju $L_n(z^2+1)$ koja se anulira za $z=0$, tačka $z=0$ je pol trećeg reda. $\left(\text{Tada je za } |z|<1\ f(z)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n-1}}{n(n-1)}\right)$. Za sve ostale grane $z=0$ je pol prvog reda.

3455. $z=0$ i $z=\infty$ logaritamske tačke grananja.

3456. $z=2$ i $z=\infty$ transcendentne tačke grananja. $z=0$ esencijalni singularitet, za $a\neq 0$. Za $a=0$ $z=0$ je pol.

3457. $z=0$ i $z=1$ transcendentne tačke grananja. $z=k\pi i\pm\sqrt{-k^2\pi^2-2k\pi i}$ $k=\pm1, \pm2, \ldots$ algebarske tačke grananja drugog reda. $z=\infty$ esencijalni singularitet.

3458. $z=i$ i $z=1+i$ transcendentne tačke grananja. $z=\infty$ obična tačka.

3459. Tačke $z=0$ i $z=\infty$ su algebarske tačke grananja drugog reda. Za granu funkcije $\sqrt{z}$ za koju je $\sqrt{1}=1$, tačka $z=1$ je transcendentna tačka grananja, $z=4$ pol prvog reda. Za granu funkcije $\sqrt{z}$ za koju je $\sqrt{1}=-1$ tačka $z=4$ je transcendentna tačka grananja a $z=1$ esencijalni singularitet.

3460. Tačke $z=1+\sqrt{1+2k\pi i}$ i $z=1-\sqrt{1+2k\pi i}$ $(k=0, \pm1, \pm2, \ldots)$ su algebarske tačke grananja drugog reda. Tačka $z=0$ je otklonjiv singularitet, $z=\infty$ esencijalni singularitet.

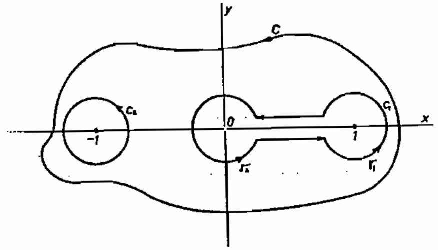
3461. Za $a=0$ nema singulariteta. Za $a\neq 0$: $z=0$ i $z=1$ algebarske tačke grananja trećeg reda; $z=2$ pol prvog reda; $z=\infty$ nije ispitana.

3462. Za $n=1$ otklonjiv singularitet, za $n>1$ pol $(n-1)$ -og reda, za $n=0$ nula prvog reda, za $n<0$ nula $(-n+1)$-og reda.

3463. $2\pi i(e^{2i}-e^{3i})$. Integral ne zavisi od izbora grane $L_n\frac{z-2i}{z-3i}$.

3464. Za $n=1$ tačka $z=1$ je otklonjiv singularitet. Za $n\neq 1$ i granu funkcije $\sqrt[n]{z}$ za koju je $\sqrt[n]{1}=1$ tačka $z=1$ je otklonjiv singularitet. Za granu $\sqrt[n]{z}$ za koju je $\sqrt[n]{1}\neq 1$ tačka $z=1$ je transcendentna tačka grananja. $z=0$ i $z=\infty$ su algebarske tačke grananja.

3465. Integralićemo proizvoljnu granu funkcije $f(z)=\frac{\sqrt[4]{z(1-z)^3}}{(z+1)}$ po zatvorenoj konturi c unutar koje se nalaze $z=-1$, $z=0$, $z=1$. Kako je $z=\infty$ nula drugoga reda funkcije $f(z)$ to je $\oint_c f(z)\,dz=0$.



Sl. 81

Posmatrajmo još konture c_1 i c_2 prikazane na sl. 81.

Tada je $\oint_{c_1} f(z)\,dz+\oint_{c_2} f(z)\,dz=0$

odakle je $\oint_{c_1} f(z)\,dz=-\oint_{c_2} f(z)\,dz=-2\pi i \operatorname*{rez}_{z=-1} f(z)=-2\pi i\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\sqrt[4]{z(1-z)^3}$ za $z=-1$.

Tako je $\oint_{c_1} f(z)\,dz=\frac{3\pi i\sqrt[4]{8}}{64}e^{\frac{\pi}{4}i}$. Kako je još $\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_1} f(z)\,dz=0$ i $\lim_{r\to 0}\int_{-\gamma_2} f(z)\,dz=0$

to je $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{3\sqrt[4]{2}\pi}{64}$.

3466. 1° Konvergira apsolutno i uniformno za $|z|<1$. Za $|z|>1$ red divergira.

2° Za $z\in(-1, 1)$ prema poznatim stavovima o diferenciranju i integraciji potencijalnih redova dobijamo: $f'(z)=\frac{2z}{1+z^2}$. Dalje je, odavde,

$$f(z)=(z^2+1)\ln(z^2+1)-z^2, \quad (z\in(-1, 1)).$$

Prema stavu o jedinstvenosti analitičkih funkcija

$$f(z)=(z^2+1)\ln(z^2+1)-z^2$$

za $|z|<1$, pod uslovom da se uzme determinacija od $\ln(1+z^2)$ koja se anulira u nuli i koja odgovara na pr. zaseku $(-\infty i, -i]$, $[i, \infty i)$. Prema tome dobijeni izraz analitički produžuje sumu reda iz unutrašnjosti jediničnog kruga na celu ravan bez navedenog zaseka.

3467. 1° $f(z)=1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^2}\sqrt{1+z^2}$

$$f_1(z)=1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}z^{2n};\quad f_2(z)=1-\frac{1}{z^2}\sum_{n=1}^{\infty}\binom{1/2}{n}z^{2n}.$$

2° Za $f_1(z)$ tačka $z=0$ je pol drugog reda a za $f_2(z)$ regularna tačka.

3° Za $f_1(z)$ red je Laurentov, a za $f_2(z)$ red je Taylorov.

4° Za $f_1(z)$ $\quad 0<|z|<1$. Za $f_2(z)$ $|z|<1$.

3468. Nađimo $f(z)$ u konačnom obliku. Dobija se $f(z)=\frac{1-z}{(1+z)^2}$ za $|z|<1$. Funkcija $w=\frac{1-z}{(1+z)^2}$ je analitička za $z\neq-1$ pa je analitičko produženje funkcije $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)z^k$ funkcija $F(z)=\frac{1-z}{(1+z)^2}$ $(z\neq 1)$. $F(z^2)=\frac{1-z^2}{(1+z^2)^2}$. Neka je c gornji polukrug $|z|=R$ $(R>1)$. Tada je $\oint_c \frac{1-z^2}{(1+z^2)^2}e^{zi}\,dz=2\pi i \operatorname*{rez}_{z=i}\left[\frac{1-z^2}{(1+z^2)^2}e^{zi}\right]$. Kako je $\left[e^{zi}\frac{1-z^2}{(z+i)^2}\right]'_{z=i}=-\frac{i}{2e}$ to je $\oint_c\frac{1-z^2}{(1+z^2)^2}e^{zi}\,dz=2\int_0^R F(x^2)\cos x\,dx+$

$$+iR\int_0^{\pi}\frac{e^{iRe\theta i}(1-R^2e^{2\theta i})}{(1+R^2e^{2\theta i})^2}e^{\theta i}\,d\theta.$$ Pored toga je $\left|iR\int_0^{\pi}\frac{e^{iRe\theta i}(1-R^2e^{2\theta i})}{(1+R^2e^{2\theta i})}e^{\theta i}\,d\theta\right|<$

$<\frac{R(R^2+1)}{(R^2-1)^2}\pi$. Kad $R\to\infty$ iz zadnje jednakosti dobijamo $\int_0^{\infty}F(x^2)\cos x\,dx=\frac{\pi}{2e}$.

3469. 1° Riemannova površ funkcije $f(z)$ sastoji se iz beskonačno mnogo grana zasečenih duž odsečka $[-1, 1]$. Vezivanje ovih listova se vrši tako što se gornje ivice nižeg lista spoje sa donjim ivicama višeg lista.

2° Iz $\ln\frac{2-1}{2+1}+i\arg\frac{1}{3}=-\ln 3$ sledi $\arg\frac{z-1}{z+1}=0$ kad je $z=2$. Stoga, za $z=2$ može se uzeti da je $\arg(z-1)=\arg(z+1)=0$. Prilikom kretanja tačke z po krivoj c od 2 do $-i0$ $\arg(z-1)$ se menja od $+0$ do $-\pi$, $\arg(z+1)$ se menja od $+0$ do 0. Dakle se $\arg\frac{z-1}{z+1}$ menja od 0 do $-\pi$ pa je u tački $z=-i0$ $\arg\frac{z-1}{z+1}=-\pi$. Znači da je $f(-i0)=-\pi i$.

3470. 1° Algebarske tačke grananja su: $z=\infty$, $z_1=-2$, $z_2=e^{\frac{\pi}{3}i}$, $z_3=e^{-\frac{\pi}{3}i}$. Prema tome za svako α pogodno izabrana grana može se razviti u Taylorov red u tački $z=\alpha i$ koji konvergira u krugu

$$|z-\alpha i|=\min|\alpha i-z_k|\quad (k=1, 2, 3).$$

2° $f^*(-5+0i)=i\sqrt{93}$; $f^*(-5-0i)=-i\sqrt{93}$; $f^*\left[5+i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pm 0\right)\right]=$

$$=\pm i\sqrt{\left|5+i\frac{\sqrt{3}}{2}+2\right|\left|5+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right|\left|5+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|}\,e^{\frac{\gamma+\delta}{2}i}$$

$$\left(\beta=\arg\left(-z_3-5+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad \gamma=\arg(-5-z_3)\right).$$

3471. Red $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$ konvergira za $|z|<2$ i ima zbir $\frac{1}{2-z}$. Red $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$ konvergira za $\left|\frac{z-i}{2-i}\right|<1$ tj. za $|z-i|<\sqrt{5}$ i ima zbir $\frac{1}{2-z}$.

3473. Neka je $F(z)=1+z+z^2+z^4+z^8+\cdots$ Tada je $F(z)=z+F(z^2)$, $F(z)=z+z^2+F(z^4)$, $F(z)=z+z^2+z^4+F(z^8)$, ... Odavde se vidi da su tačke: $z=1$, $z^2=1$, $z^4=1$, $z^8=1$; ... singulariteti funkcije. Svi ovi singulariteti se nalaze na krugu $|z|=1$ i gusto su raspoređeni na njemu. Prema tome preko $|z|=1$ funkcija $F(z)$ se ne može analitički produžiti.

3475. Za $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ i $k=1$ iz formule $\operatorname*{rez}_{z=a}f(z)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}[f(z)(z-a)^k]^{(k-1)}$

sledi $\operatorname*{rez}_{z=a}f(z)=\lim_{z\to a}\left[\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}(z-a)\right]=\varphi(a)\lim_{z\to a}\frac{z-a}{\psi(z)}=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$.

3476. $\operatorname*{rez}_{z=\pm 1}f(z)=1$; $\operatorname*{rez}_{z=0}f(z)=-2$; $\operatorname*{rez}_{z=\infty}f(z)=0$.

3477. $\operatorname*{rez}_{z=i}f(z)=-\frac{i}{4}$; $\operatorname*{rez}_{z=-i}f(z)=\frac{i}{4}$; $\operatorname*{rez}_{z=\infty}f(z)=0$.

3478. $\operatorname{rez}[f(z)]_{z=0}=\binom{n+k}{n}$; $\operatorname{rez}[f(z)]_{z=\infty}=-\binom{n+k}{n}$.

3479. $\operatorname{rez}[f(z)]_{z=-1}=(-1)^{n+1}\frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)!}$; $\operatorname{rez}[f(z)]_{z=\infty}=(-1)^n\frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)!}$.

3480. $\operatorname{rez}[f(z)]_{z=0}=0$; $\operatorname{rez}[f(z)]_{z=1}=1$; $\operatorname{rez}[f(z)]_{z=\infty}=-1$.

3481. $\operatorname{rez}[f(z)]_{z=0}=\frac{1}{9}$; $\operatorname{rez}[f(z)]_{z=3i}=-\frac{1}{54}(\sin 3-i\cos 3)$; $\operatorname{rez}[f(z)]_{z=-3i}=-\frac{1}{54}(\sin 3+i\cos 3)$; $\operatorname{rez}[f(z)]_{z=\infty}=\frac{1}{27}(\sin 3-3)$.

3482. $\operatorname{rez}[f(z)]_{z=1}=\cos 1$; $\operatorname{rez}[f(z)]_{z=\infty}=-\cos 1$.

3483. $\operatorname{rez}[f(z)]_{z=k\pi}=1$ $\quad(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

3484. $\operatorname{rez}[f(z)]_{z=k\pi}=(-1)^k$ $\quad(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. **3485.** $\operatorname{rez}[f(z)]_{z=2}=\operatorname{rez}[f(z)]_{z=\infty}=0$.

3486. $\operatorname{rez}[f(z)]_{z=0}=-\frac{1}{2}$; $\operatorname{rez}[f(z)]_{z=\infty}=\frac{1}{2}$.

3487. $\operatorname{rez}[f(z)]_{z=0}=-\operatorname{rez}[f(z)]_{z=\infty}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,(n+1)!}$. **3488.** $\operatorname{rez}[f(z)]_{z=0}=-\frac{7}{45}$.

3489. $\text{rez}\,[f(z)]_{z=k^2\pi^2}=(-1)^k\,2\,k^2\pi^2 \quad (k=1,2,\ldots).$

3490. $\text{rez}\,[f(z)]_{z=0}=\dfrac{1}{(n-1)!}$; $\text{rez}\,[f(z)]_{z=\infty}=-\dfrac{1}{(n-1)!}$. **3492.** $2a_0+2a_1+\dfrac{7}{3}a_2+\dfrac{37}{12}a_3$.

3495. $1^\circ\ n$; $2^\circ\ -n$. **3497.** $\text{rez}\left[\dfrac{\sqrt{z}}{z^2-16}\right]_{z=4}=\dfrac{1}{4}$; $\text{rez}\left[\dfrac{-\sqrt{z}}{z^2-16}\right]_{z=4}=-\dfrac{1}{4}$.

3498. $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{i^{2n+1}}{(2n-1)!\,(2n+1)}$.

3499. $-2\,e^{2k\pi a i}$ za $\sqrt{1}=1$ i $\text{Ln}\,1=2k\pi i$; 0 za granu određenu sa $\sqrt{1}=-1$.

3500. $\pm\dfrac{(a-b)^2}{8}$. **3501.** $\text{rez}\,[f(z)]_{z=1}=\pm\dfrac{35}{12\sqrt{6}}$; $\text{rez}\,[f(z)]_{z=2}=\pm\dfrac{1235}{392\sqrt{7}}$.

3502. $\sqrt{2}\,e^{\frac{3\pi i}{5}}$. **3503.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}-\dfrac{4+\sqrt{2}}{4}\,i$. **3504.** $e^{\alpha}-e^{\beta}$.

3505. $2k\pi i+\dfrac{1}{2\cdot 3!}-\dfrac{1}{4\cdot 5!}+\cdots$ **3506.** $\dfrac{1}{a}\left(1-e^{\frac{a}{2}}\right)(a\neq 0)$; $-\dfrac{1}{2}$ ako je $a=0$.

3507. 1° 0. $\left(\dfrac{1}{z^4+1}\right.$ je regularna na i unutar krive $\left.|z|=\dfrac{1}{2}\right)$; 2° $I=\int\limits_c\dfrac{1}{z^4+1}\,dz=$

$=2\pi i\,[\text{rez}\,[f(z)]_{z=e^{\pi i/4}}+\text{rez}\,[f(z)]_{z=e^{7\pi i/4}}]=-\dfrac{\pi i}{\sqrt{2}}$;

3° $I=2\pi i\left[\text{rez}\,[f(z)]_{z=e^{\frac{\pi i}{4}}}+\text{rez}\,[f(z)]_{z=e^{\frac{5\pi i}{4}}}\right]=\dfrac{\pi i}{\sqrt{2}}$;

4° $I=2\pi i\left\{\text{rez}\,[f(z)]_{z=e^{\frac{\pi i}{4}}}+\text{rez}\,[f(z)]_{z=e^{\frac{3\pi i}{4}}}\right\}=\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$;

5° $I=2\pi i\left\{\text{rez}\,[f(z)]_{z=e^{\frac{5\pi i}{4}}}+\text{rez}\,[f(z)]_{z=e^{\frac{7\pi i}{4}}}\right\}=-\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$;

6° $I=2\pi i\sum\limits_{k=1}^{4}\text{rez}\,[f(z)]_{z=z_k}=0$, $z_k=e^{\frac{2k-1}{4}\pi i}$; 7° $I=\dfrac{-1+i}{2\sqrt{2}}$.

3508. $-\dfrac{\pi i}{2}$. **3509.** $-2\pi i$. **3510.** πi. **3511.** $\dfrac{3\pi i}{64}$. **3512.** $2\pi i$.

3513. $\pi i\left[t-1+\dfrac{e^{-t}}{2}(\sin t+\cos t)\right]$. **3514.** $2\pi i$. **3515.** $-9\pi\sqrt{2}/2$.

3516. $2\pi i$. **3517.** 0. **3518.** $\dfrac{(-1)^{n-1}\,2\pi i}{(n-1)!}$.

3519. $2^{n+1}/(n+1)!$ za $n>-1$; 0 za $n<-1$. **3520.** 1° $2\pi i/n!$, 2° $(-1)^n\,2\pi i/n!$

3521. $2\pi i$ za $r>1$; 0 za $r<1$. **3522.** 4π. **3523.** πi.

3524. $\dfrac{1}{4}\sqrt{1+\sqrt{2}}$. **3525.** $2\pi i\,(\text{ctg}\,1-1)$. **3526.** $-4\pi i$. **3528.** $7i$.

3529. Ako su tačke $z=0$ i $z=1$ izvan konture c tada je $I=0$. Ako je $z=0$ unutar konture c a $z=1$ izvan konture c, tada je $I=2\pi e i$. Ako je $z=1$ unutar konture c a $z=0$ izvan konture c tada je $I=2\pi i(1-e)$. I ne postoji ako je $z=0$ ili $z=1$ na konturi c

3530. Staviti $e^{i\varphi}=z$. Kako je još $\cos\varphi=\dfrac{e^{\varphi_i}+e^{-\varphi_i}}{2}$ sledi $\cos\varphi=\dfrac{z^2+1}{2z}$. Tako se traženi integral svodi na $\int\limits_{|z|=1}\dfrac{-2i}{z^2+2az+1}\,dz$. U krugu $|z|=1$, jedini singularitet funkcije

$f(z)=\dfrac{-2i}{z^2+2az+1}$ je tačka $z_1=-a+\sqrt{a^2-1}$ pa je

$$\int\limits_{|z|=1}\frac{-2i}{z^2+2az+1}\,dz=2\pi i\ \text{rez}\,[f(z)]_{z=z_1}=2\pi i\left(\frac{-2i}{2z^2+2a}\right)_{z=z_1}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

3531. $2\pi/(a^2-1)^{3/2}$. **3532.** $\pi\sqrt{2}$.

3533. $\dfrac{\pi(a^6+1)}{1-a^2}$ ako je $|a|<1$; $\dfrac{\pi(a^6+1)}{a^6(a^2-1)}$ ako je $|a|>1$; $\dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{1-a^{12}}{a^6(a^2-1)}$ ako je $|a|=1$.

3534. $\dfrac{\pi}{2(1-ab)}$, $|a|<1$, $|b|<1$; $\dfrac{\pi}{2a(a-b)}$, $|a|>1$, $|b|>1$; $\dfrac{\pi}{2b(b-a)}$, $|a|<1$, $|b|>1$;

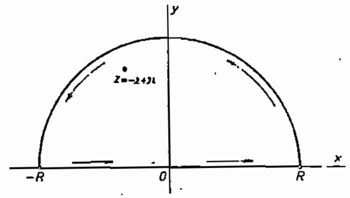
$\dfrac{\pi}{2ab(ab-1)}$, $|a|>1$, $|b|<1$. Uputstvo: smenom $e^{ix}=z$ integral

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 x\,dx}{(1-2a\cos x+a^2)(1-2b\cos x+b^2)}\ \text{se svodi na}\ -\frac{1}{4i}\int\limits_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2\,dz}{z(az-1)(z-a)(bz-1)(z-b)}$$

Primenom reziduuma zadnji se integral lako izračunava.

3535. Podimo od integrala $I=\int\limits_c\dfrac{z\,dz}{(z^2+4z+13)^2}$ gde je c polukrug na sl. 82 $(R>\sqrt{13})$.

Pošto je unutar konture c jedini singularitet tačka $z_1=-2+3i$ (pol drugog reda) podintegralne funkcije, to je $I=2\pi i$ rez $[f(z)]\,z=z_1$,



Sl. 82

$f(z)=\dfrac{z}{(z+2+3i)^2}\cdot\dfrac{1}{(z+2-3i)^2}$,

$f'(z)=\dfrac{-z+2+3i}{(z+2+3i)^3}$. $\text{rez}\,[f(z)]_{z=-2+3i}=\dfrac{4}{(6i)^3}=\dfrac{i}{54}$. $I=2\pi i\cdot\dfrac{i}{54}$. $I=-\dfrac{\pi}{27}$.

S druge strane je $I=\int\limits_{-R}^{R}\dfrac{x\,dx}{(x^2+4x+13)^2}+\int\limits_0^{\pi}\dfrac{R^2 ie^{2it}\,dt}{(R^2e^{2it}+4Re^{it}+13)^2}=I_1+I_2$. Kako je

$|I_2|=\left|\int\limits_0^{\pi}\dfrac{R^2ie^{2it}\,dt}{(R^2e^{2it}+4Re^{it}+13)^2}\right|<\int\limits_0^{\pi}\dfrac{R^2}{(R^2-4R-13)^2}\,dt=\dfrac{R^2\pi}{(R^2-4R-13)^2}$, kad $R\to\infty\Rightarrow$

$\Rightarrow I_2\to 0$ i $I_1\to\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{x\,dx}{(x^2+4x+13)^2}$. Prema tome je $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{x\,dx}{(x^2+4x+13)^2}=-\dfrac{\pi}{27}$.

$|a+b|\geq||a|-|b||$

3536. $\pi\sqrt{2}$. 3537. $\pi/3$. 3538. $\pi/3$. 3539. $4\pi/3$. 3540. $\pi/4a$.

3541. $\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\pi$ za $n>1$; π za $n=1$. 3542. $\pi/ab(a+b)$.

3543. $\frac{\pi}{n}\operatorname{cosec}\frac{2m+1}{2n}\pi$.

3544. Podimo od integrala $\int\limits_c \frac{ze^{iz}}{z^2-2z+10}dz$ gde je c gornji polukrug unutar koga se nalazi tačka $z_1=1+3i$ — jedini singularitet funkcije $f(z)=\frac{ze^{iz}}{z^2-2z+10}$. U tom polukrugu je tačka $z=z_1$ pol prvog reda. Neka je poluprečnik toga polukruga R $(R>\sqrt{10})$. Tada je $\int\limits_c \frac{ze^{iz}}{z^2-2z+10}dz=\int\limits_{-R}^{R}\frac{xe^{ix}}{x^2-2x+10}dx+$

$$+\int\limits_0^{\pi}\frac{R^2ie^{2it}e^{iR(\cos t+i\sin t)}}{R^2e^{2it}-2Re^{it}+10}dt=I_1+I_2=2\pi i\ \text{rez}\,[f(z)]_{z=z_1}.$$ Lako se nalazi da je

$$\text{rez}\,[f(z)]_{z=1+3i}=\frac{\cos 1-3\sin 1}{3e^2}\pi+\frac{3\cos 1+\sin 1}{3e^2}\pi i.$$

Kako je $|I_2|<\int\limits_0^{\pi}\frac{R^2e^{-R\sin t}dt}{|R^2-2R-10|}=\frac{R^2}{|R^2-2R-10|}e^{-R\sin\xi}$ $(0<\xi<\pi)$. Sledi da I_2 teži nuli kad $R\to\infty$. Osim toga, kad $R\to\infty$ imamo:

$$I_1=\int\limits_{-R}^{R}\frac{xe^{ix}}{x^2-2x+10}dx\to\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx+i\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx$$

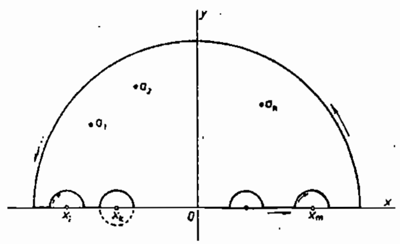
pa je $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx=\frac{\pi}{3e^3}(\cos 1-3\sin 1)$ i $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx=\frac{\pi}{3e^2}(3\cos 1+\sin 1)$.

3545. $i\pi e^{-ar}$. 3546. $\frac{\pi}{2r}e^{-ar}$. 3547. $\frac{\pi}{\sqrt{3}}\cdot e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\sin\frac{1}{2}$.

3548. Neka je c kontura sastavljena od gornjeg polukruga S, čiji je poluprečnik R $(R>\max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\ |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_m|))$, delova x ose i gornjih polukrugova $S_1, S_2, \ldots, S_m$ čiji su poluprečnici ϱ tako da se u c nalaze singulariteti a_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ (sl. 83). Tada je dovoljno pokazati da $\int\limits_S f(z)\,dz\to 0$ kad $R\to\infty$ i da je

$$\int\limits_{S_k} f(z)\,dz=-\pi i\ \text{rez}\,[f(z)]_{z=x_k}$$

$(k=1, 2, \ldots, m)$.



Sl. 83

Kako je $\left|\int\limits_S f(z)\,dz\right|=\left|\int\limits_0^{\pi}e^{iaRe^{it}}F(Re^{it})\cdot Rie^{it}dt\right|<R\max\limits_{z\in S}|F(z)|\cdot\int\limits_0^{\pi}e^{-aR\sin t}dt<$ $RM\pi e^{-aR\sin\xi}$ gde je $M=\max\limits_{z\in S}|F(z)|$, $0<\xi<\pi$. Dobijena majoranta integrala teži nuli kad $R\to\infty$ pa $\int\limits_S f(z)\,dz\to 0$ za $R\to\infty$. Pošto jo x_k pol prvog reda za $f(z)$ to je u okolini tačke x_k pa i na S_k: $f(z)=a_{-1}(z-x_k)^{-1}+\sum\limits_{j=0}^{\infty}a_j(z-x_k)^j$.

Sledi $\int\limits_{S_k}f(z)\,dz=a_{-1}\int\limits_{S_k}\frac{1}{z-x_k}dz+\sum\limits_{j=0}^{\infty}a_j\frac{(z-x_k)^{j+1}}{j+1}\Big|_{x_k-\varrho}^{x_k+\varrho}=-\pi i a_{-1}+$

$$+\sum_{j=0}^{\infty}a_j\frac{\varrho^{j+1}-(-1)^{j+1}\varrho^{j+1}}{j+1}=-\pi i a_{-1}+2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varrho^{2j-1}}{2j-1}a_{2j-1}.$$

Prema tome je $\int\limits_{S_k}f(z)\,dz=-\pi i a_{-1}+2\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{\varrho^{2j-1}}{2j-1}a_{2j-1}$. Kad $\varrho\to 0$ dobijamo

$$\int\limits_{S_k}f(z)\,dz=-\pi i a_{-1}+2\lim_{\varrho\to 0}\sum_{j=1}^{\infty}a_{2j-1}\frac{\varrho^{2j-1}}{2j-1}=-\pi i a_{-1}=-\pi i\ \text{rez}\,[f(z)]_{z=x_k}$$

$(k=1, 2, \ldots, m)$.

3549. Neka je c polukrug na sl. 84. Nađimo integral $\int\limits_c\frac{e^{iz}}{(1+z^2)^{n+1}}dz=2\pi i\ \text{rez}\,[f(z)]_{z=i}=$

$=\frac{2\pi i}{n!}\lim\limits_{z\to i}\left[\frac{e^{iz}(z-i)^{n+1}}{(i+z)^{n+1}(z-i)^{n+1}}\right]^{(n)}=\frac{2\pi i}{n!}\lim\limits_{z\to i}[e^{iz}(z+i)^{-(n+1)}]^{(n)}$. Označimo $u=e^{iz}$ u $v=(z+i)^{-(n+1)}$. Nađimo $(u\cdot v)^{(n)}$ primenom Leibnitzove formule $(u\cdot v)^{(n)}=$

$=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}v^{(k)}$, gde je $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$, $u^{(0)}=u$, $v^{(0)}=v$. Kako je $u^{(n-k)}=i^{n-k}e^{iz}$ i $v^{(k)}=(-1)^k(n+1)(n+2)\cdots(n+k)(z+i)^{-(n+k+1)}$, to je za $z=i$ $\binom{n}{k}u^{(n-k)}v^{(k)}=$

$=\binom{n}{k}e^{-1}i^{n-k}(-1)^k(2i)^{-(n+k+1)}(n+1)(n+2)\cdots(n+k)=$

$=\binom{n}{k}e^{-1}2^{-(n+k+1)}(-1)^k i^{-(2k+1)}\cdot(n+1)(n+2)\cdots(n+k)=\frac{(n+k)}{2^{n+k+1}ei(n-k)!\,k!}$.

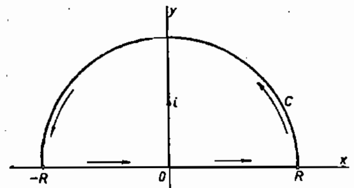
$$\int\limits_c\frac{e^{iz}}{(1+z^2)^{n+1}}dz=\int\limits_{-R}^{R}\frac{e^{ix}}{(1+x^2)^{n+1}}dx+$$

$$+\int\limits_0^{\pi}\frac{e^{iRe^{it}}\cdot Rie^{Rit}}{(1+R^2e^{2it})^{n+1}}dt=2\pi i\ \text{rez}\,[f(z)]_{z=i}=$$

$$=\frac{2\pi}{2^{2n+1}en!}\left[\frac{2^n n!}{0!\,n!}+\frac{2^{n-1}(n+1)!}{1!\,(n-1)!}+\cdots+\right.$$

$$\left.+\frac{(2n)!}{n!\,0!}\right]=\frac{2\pi}{2^{2n+1}en!}\left[\frac{(2n)!}{n!\,0!}+\frac{2(2n-1)!}{(n-1)!\,1!}+\right.$$

$$\left.+\cdots+\frac{2^n n!}{0!\,n!}\right]\Rightarrow\int\limits_0^{\infty}\frac{\cos x}{(1+x^2)^{n+1}}dx=\frac{\pi}{e2^{2n+1}n!}\left[\frac{(2n)!}{n!\,0!}+\frac{2\cdot(2n-1)!}{(n-1)!\,1!}+\cdots+\frac{2^n n!}{0!\,n!}\right].$$



Sl. 84

3550. Polazeći od integrala $\int\limits_c \frac{e^{aiz}}{(z^2-z)(z^2+1)^2}\,dz$ i koristeći zadatak 3548 lako se dobija da je

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos a x}{(x^2-x)(x^2+1)^2}\,dx + i \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a x}{(x^2-x)(x^2+1)^2} =$$

$$= -\frac{\pi}{8}[\sin a + 2(a+2)e^{-a}] + \frac{\pi i}{8}[\cos a - 8 + 2(a+3)]$$

odakle je: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos a x}{(x^2-x)(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{\pi}{8}[\sin a + 2(a+2)e^{-a}]$,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a x}{(x^2-x)(x^2+1)^2}\,dx = \frac{\pi}{8}[\cos a - 8 + 2(a+3)e^{-a}].$$

3551. 1° $\frac{\pi}{2a^2}\left(1+\frac{a^2-1}{e^{a^2}}\right)$; 2° 0. **3552.** $\frac{\pi}{a}\ln(a-1)$. **3553.** $\pi/2$.

3554. $3\pi/8$. **3556.** 1° $\frac{\Gamma(p)\cos\frac{\pi p}{2}}{a^p}$; 2° $\frac{\Gamma(p)\sin\frac{\pi p}{2}}{a^p}$. **3560.** $\pi/\sin\pi a$.

3573. Funkcija $f(z)=\frac{1}{z^2+a^2}$ ima proste polove u $z=\pm ai$.

$$\operatorname*{rez}_{z=ai} \frac{\pi \operatorname{ctg}\pi z}{z^2+a^2} = -\frac{\pi}{2a}\operatorname{ctg} h\pi a;\quad \operatorname*{rez}_{z=-ai} \frac{\pi \operatorname{ctg}\pi z}{z^2+a^2} = -\frac{\pi}{2a}\operatorname{ctg} h\pi a.$$

Prema tome je $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = -(\text{zbir reziduuma}) = \frac{\pi}{a}\operatorname{ctg} h\pi a$.

3574. $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{a^{2k}+m^{2k}} = -\frac{1}{2a^{2k}} + \frac{\pi}{4ka^{2k-1}} \sum\limits_{r=-k}^{k-1} e^{\frac{2r+1}{2k}\pi i} \operatorname{ctg}\left(\pi a e^{\frac{2r+1}{2k}\pi i}\right)$.

3575. Iz zadatka 3573 sledi $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{n^2+a^2} + \frac{1}{a^2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\operatorname{ctg} h\pi a$,

odakle je $2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\operatorname{ctg} h\pi a - \frac{1}{a^2}$.

3579. $\pi^3/32$. **3587.** $\pi^2/90$. **3588.** $\pi^6/945$.

Glava X

3603. 1° $\Gamma(1/2)$; 2° $\Gamma(5/8)\cdot\sqrt[4]{2}$ **3617.** 1° 16/315; 2° $2\pi/\sqrt{3}$.

3618. 1° $4B(3/2, 3/2)$; 2° $\frac{1}{2}B(3/4, 1/4)$. **3624.** $\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}$.

3641. Neka je $x=R_e\{z\}>1+\delta$. Tada je $\left|\frac{1}{k^z}\right| = \frac{1}{\left|e^{z\ln k}\right|} = \frac{1}{e^{x\ln k}} = \frac{1}{k^x} < \frac{1}{k^{1+\delta}}$. Kako red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\delta}}$ konvergira, po Weierstrassovom testu red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ uniformno konvergira.

3668. $R_e\{sn\, z\} = \frac{sn(x,k)\, dn(y,k')}{cn^2(y,k')+k^2 sn(x,k)\, sn^2(y,k')}$. $I_m\{sn\, z\} = \frac{sn(y,k')\, cn(y,k')\, cn(x,k)\, dn(x,k)}{cn^2(y,k')+k^2 sn^2(x,k)\, sn^2(y,k')}$.

3670. $B_0(x)=1,\ B_1(x)=x-1/2,\ B_2(x)=1/2\,x^2-\frac{1}{2}x+1/12,\ B_3(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x,\ B_4(x)=$ $=\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{24}x^2-\frac{1}{720}$.

3673. $B_0=1,\ B_1=-1/2,\ B_2=1/6,\ B_3=0,\ B_4=-1/30,\ B_5=0,\ B_6=1/42,\ B_7=0$.

3696. Iskoristiti zadatak 3673 i jednakost $\frac{1}{k^{2p}} = \frac{1}{(2p-1)!}\int\limits_0^{\infty} e^{-kt}t^{2p-1}\,dt$.

3700. $P_3(z)=\frac{1}{2}(5z^3-3z)$; 2° $P_4(z)=\frac{1}{8}(35z^4-30z^2+3)$; 3° $P_5(z)=\frac{1}{8}(63z^5-70z^3+15z)$.

3714. $a_k=0$ za $n-k$ neparan ili negativan broj; $a_k=\frac{(2k+1)\,2^k\,n!\left(\frac{n+k}{2}\right)!}{\left(\frac{n-k}{2}\right)!\,(n+k+1)!}$ za $n-k$ paran i pozitivan broj.

3716. $2n(n+1)/[(2n+1)\ (2n+3)]$.

3725. 1° $L_0(x)=1$; 2° $L_1(x)=-x+1$; 3° $L_2(x)=x^2-4x+2$; 4° $L_3(x)=-x^3+9x^2-18x+6$.

3741. 1° $H_0(x)=1$; 2° $H_1(x)=2x$; 3° $H_2(x)=4x^2-2$; 4° $H_3(x)=8x^3-12x$.

3742. 1° $(-1)^n\dfrac{(2n)!}{n!}$; 2° $(-1)\dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!}$.

3756. 1° $T_0(x)=1$; 2° $T_1(x)=x$; 3° $T_2(x)=2x^2-1$; 4° $T_3(x)=4x^3-3x$.

3771. $x_k=\cos(2k+1)\dfrac{\pi}{2n}$ $(k=0,1,2,\ldots,n-1)$. 3773. ax^2+1 $(-2<a<0)$.

3774. ax^2+x-a $(|x|<1/2)$.

3775. Kod Legendreovih polinoma je $p(x)=1$ pa je $c_k=\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\frac{1}{k!\,2^k}\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k\,dx=$

$$=\frac{1}{k!\,2^k}\int_0^1\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k\,dx=\frac{1}{k!\,2^k}\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}(x^2-1)^k\Big|_0^1.$$

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(4n-1)\,(2n-2)!}{2^{2n}\,n!\,(n-1)!}P_{2n-1}(x).$$

3776. $f(x)=\dfrac{1}{2}-\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(4n+1)\,(2n-2)!}{2^{2n}(n-1)!\,(n+1)!}P_{2n}(x)$ $(-1<x<1)$.

3778. $\dfrac{1}{1+a}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{a}{1+a}\right)^n L_n(x)$. 3779. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(n!)^2}{(n-k)!\,(k!)^2}L_k(x)$.

3780. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}L_n(x)$ gde je $B_n=\dfrac{1}{2i}\left[\dfrac{(ai)^n}{(1+ai)^{n+1}}-\dfrac{(-ai)^n}{(1-ai)^{n+1}}\right]$.

3781. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n}{n!}L_n(x)$ gde je $A_n=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{(ai)^n}{(1+ai)^{n+1}}+\dfrac{(-ai)^n}{(1-ai)^{n+1}}\right]$.

3782. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{\sqrt{2\pi}\,2^{n-1}\,n!}H^*_{2n+1}(x)$. 3783. $\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}H_0^*(x)+\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{\sqrt{2\pi}\,2^{n-1}\,n!}H_{2n+2}(x)$.

3784. $e^{\frac{a^2}{2}}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a^n H_n^*(x)$. 3785. $e^{-\frac{a^2}{2}}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a^{2n}H^*_{2n}(x)$.

3786. $\dfrac{3}{4}T_1^*(x)+T_3^*(x)$. 3787. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}}{2n+1}T^*_{2n+1}(x)$.

3788. $\dfrac{2}{\pi}+\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n}}{4n^2-1}T_{2n}^*(x)$.

3789. $T^*_{2n}(x)+\dbinom{2n}{1}\Big/2^2T^*_{2n-2}(x)+\dbinom{2n}{2}\Big/2^4T^*_{2n-4}(x)+\cdots+\dbinom{2n}{n}\Big/2^{2n}T_0^*(x)$.

3790. Da. 3823. $A_k=2(a_k^2-4)/(a_k^3 I_1(a_k))$.

3836. Mogu. Na primer, posmatrajmo funkcije $f(x)$ i $f(x)+e^{-x}$ $(x\in R)$.

$$e^{-x}\sim 0+\frac{0}{x}+\frac{0}{x^2}+\cdots=0.$$

Glava XI

3839. Primenom postupka parcijalne integracije za $R_e\,p=s>0$, dobija se $F(p)=\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-pt}t\,dt=\frac{1}{p^2}$.

3840. Integraleći parcijalno n puta za $R_e p=s>0$ dobija se $F(p)=\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-pt}t^n\,dt=\frac{n!}{p^{n+1}}$.

3841. $F(p)=\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-pt}e^{at}\,dt=\int_0^{\infty}e^{-(p-a)t}\,dt=-\frac{e^{-(p-a)t}}{p-a}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{p-a}$, ako je samo $R_e(p-a)>0$, tj. $R_e\,p>R_e\,a$.

3842. Pošto je $\sin\alpha t=\dfrac{e^{i\alpha t}-e^{-i\alpha t}}{2i}$, to je na osnovu svojstva aditivnosti Laplaceove transformacije i rezultata iz prethodnog zadatka $\sin\alpha t\doteqdot\dfrac{1}{p^2+\alpha^2}$.

3843. $\dfrac{p}{p^2+\alpha^2}$ $(R_e\,p>0)$. 3844. $\dfrac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$. 3845. $\dfrac{p}{p^2-\alpha^2}$. 3848. $e^{-ap}\dfrac{p}{p^2+1}$.

3846. $e^{at}-1\doteqdot\dfrac{1}{p-a}-\dfrac{1}{p}=\dfrac{a}{p(p-a)}$, $(R_e\,p>R_e\,a)$. 3847. $e^{-ap}\dfrac{p}{p^2+1}$.

3849. Koristeći teoremu pomeranja, dobija se $e^{\lambda t}\sin\alpha t\doteqdot\dfrac{\alpha}{(p-\lambda)^2+\alpha^2}$ $(R_e\,p>\alpha-R_e\,\lambda)$.

3850. Uzimajući u obzir da je $\cos t\doteqdot\dfrac{p}{p^2+1}$ za $R_e\,p>0$ i $\operatorname{ch}t=\dfrac{1}{2}(e^t+e^{-t})$ dobija se

$$\operatorname{ch}t\cdot\cos t=\frac{1}{2}(e^t\cos t+e^{-t}\cos t)\doteqdot\frac{1}{2}\left[\frac{p-1}{(p-1)^2+1}+\frac{p+1}{(p+1)^2+1}\right]=\frac{p^3}{p^4+4}.$$

3851. $\dfrac{2p}{p^4+4}$. 3852. $\dfrac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$. 3853. $\dfrac{1}{(p^2+1)p}$. 3854. $\dfrac{1}{p^2+\alpha^2}$.

3855. $\dfrac{2}{(p-1)^3}e^{-p}$. 3856. $\dfrac{3p}{4(p^2+1)}+\dfrac{p}{4(p^2+9)}$. 3857. $\dfrac{1}{p}\operatorname{arc\,tg}p$.

3858. $\dfrac{p^2+4}{(p^2-4)^2}$. 3859. $\dfrac{2p}{(p^2+1)^2}$. 3860. $\dfrac{p^2-1}{(p^2+1)^2}$. 3861. $\dfrac{2}{p(p^2+4)}$.

3862. $\ln \frac{p}{p-1}$. 3863. $e^{-2p}\frac{3}{p^2+9}$. 3864. $\frac{p(p^2+m^2+n^2)}{(p+m^2+n^2)^2-4m^2n^2}$.

3865. $\frac{m(p^2+m^2-n^2)}{(p^2+m^2+n^2)^2-4m^2n^2}$. 3866. $\frac{3}{8p}-\frac{p}{2(p^2+4)}+\frac{p}{8(p^2+16)}$ 3867. $\ln\frac{\sqrt{p^2+1}}{p}$.

3868. $\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$; specijalno za $\alpha=-\frac{1}{2}$ dobija se $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

3869. Poznato je da je $I_0(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{t}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}$, otuda je $I_0(t)\doteqdot\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\frac{(2k)!}{p^{2k+1}2^{2k}}$.

S druge strane je $\frac{1}{\sqrt{1+1/p^2}}=\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2p^{2k}}$.

I tako je $I_0(t)\doteqdot\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$.

3870. Poznato je da je $I_n(t)\doteqdot\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$. Koristeći rezultate prethodnog zadatka i teoreme o diferenciranju originala, nalazimo:

$$I_1(t)\doteqdot -p\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}+I_0(0)=-\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}+1=\frac{\sqrt{p^2+1}-p}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Otuda je za $n=0$ i $n=1$ formula $I_n(t)\doteqdot\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$ ispravna. Primenimo metod matematičke indukcije. Kako je

$$2I'_n(t)=I_{n-1}(t)-I_{n+1}(t)\ \text{ i }\ I_{n-1}(0)=0\quad(n\geq 2),$$

to je

$$I_n(t)=I_{n-2}(t)-2I'_{n-1}(t)\doteqdot\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^{n-2}}{\sqrt{p^2+1}}-$$

$$-\frac{2p(\sqrt{p^2+1}-p)^{n-1}}{\sqrt{p^2+1}}=\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}.$$

3871. Razmotrimo funkciju $F(p)=\frac{1}{p^{n+1}}e^{-\frac{1}{p}}$, $(n=0,1,2,\ldots)$.

Imamo da je

$$F(p)=\frac{1}{p^{n+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,p^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,p^{n+k+1}}.$$

Tako je $f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{n+k}}{k!(n+k)!}$. Imajući u vidu da je $I_n(2\sqrt{t})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)t^{\frac{n}{2}+k}}{k!(n+k)!}$, dobijamo $f(t)=t^{\frac{n}{2}}I_n(2\sqrt{t})$. Specijalno, za $n=0$ biće $I_0(2\sqrt{t})=\frac{1}{p}e^{-\frac{1}{p}}$.

3872. Razmotrimo funkciju $f(t)=e^t\operatorname{erf}(\sqrt{t})$, i neka je $F(p)$ slika $f(t)$.

Imamo $(\operatorname{erf} t)'=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}$,

(1) $$f'(t)=e^t\operatorname{erf}(\sqrt{t})+\frac{1}{\sqrt{\pi t}}=f(t)+\frac{1}{\sqrt{\pi t}}.$$

Prelazeći na transformaciju i uzimajući u obzir da je $f(0)=0$, iz (1) nalazimo $pF(p)=$ $=F(p)+\frac{1}{\sqrt{p}}$, odakle je $F(p)=\frac{1}{(p-1)\sqrt{p}}$. Ovde mi koristimo rezultat zadatka (3868) i činjenicu da je $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$. I tako je

$$e^t\operatorname{erf}(\sqrt{t})\doteqdot\frac{1}{(p-1)\sqrt{p}}.$$

Primenjujući teoremu pomeranja, konačno dobijamo

$$\operatorname{erf}(\sqrt{t})\doteqdot\frac{1}{p\sqrt{p^2+1}}.$$

3873. $\operatorname{Erf}(\sqrt{t})=1-\operatorname{erf}(\sqrt{t})$. Otuda je

$$\operatorname{Erf}(\sqrt{t})\doteqdot\frac{1}{p}-\frac{1}{p\sqrt{p+1}}=\frac{1}{\sqrt{p+1}+p+1}.$$

3874. $\frac{e^{-ap}}{p+b}$. 3875. Saglasno grafiku funkcije, koji obeležavamo sa $f(t)$ biće

$$f(t)=\begin{cases}0 & (0<t<2a),\\ 1 & (2a<t<a+b),\\ -1 & (a+b<t<2b),\\ 0 & (2b<t),\end{cases}$$

Otuda je $F(p)=\int_0^{\infty}e^{-pt}t\,dt=\int_{2a}^{a+b}e^{-pt}dt-\int_{a+b}^{2b}e^{-pt}dt=\frac{1}{p}(e^{-ap}-e^{-bp})^2$.

3876. $\frac{1-e^{-ap}}{p(1+e^{-ap})}$. 3877. $\frac{(1-e^{-ap})^2}{ap^2(1-e^{-4ap})}$.

3878. $\frac{1}{p^2}\operatorname{th}\frac{\pi p}{2}$. Data funkcija je definisana formulama

$$\arccos(\cos t)=\begin{cases}t-2n\pi, & 2n\pi<t<(2n+1)\pi,\\ -t+(2n+2)\pi, & (2n+1)\pi<t<(2n+2)\pi,\\ (n=0,1,2,\ldots).\end{cases}$$

3879. $\frac{1}{p^2}-\frac{\pi}{2p\operatorname{sh}\frac{\pi p}{2}}$.

3880. $(f * \varphi)(t) = \int\limits_0^t \sin u \cdot e^{t-u}\,du$. Ako se primeni postupak parcijalne integracije biće:

$$(f*\varphi) = \int\limits_0^t \sin u \cdot e^{t-u}\,du = -\sin u \cdot e^{t-u}\Big|_0^t + \int\limits_0^t \cos u \cdot e^{t-u}\,du = -\sin u \cdot e^{t-u}\Big|_0^t -$$

$$-\cos u \cdot e^{t-u}\Big|_0^t - \int\limits_0^t \sin u \cdot e^{t-u}\,du, \text{ ili } \int\limits_0^t \sin u \cdot e^{t-u}\,du = \frac{1}{2}\Big(-\sin u \cdot e^{t-u}\Big|_0^t -$$

$$-\cos u \cdot e^{t-u}\Big|_0^t\Big) = \frac{1}{2}(-\sin t - \cos t + e^t).$$

To znači konačno je $\sin t * e^t = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t + e^t)$.

3881. $e^{-at} * e^{-bt} = \frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{bt})$. 3882. Kako je $\sin t \doteqdot \frac{1}{p^2+1}$ i $e^t \doteqdot \frac{1}{p-1}$, to je na osnovu teoreme konvolucije $\sin t * e^t \doteqdot \frac{1}{(p^2+1)(p-1)}$. S druge strane je (zad. 3880) $\sin t * e^t = \frac{1}{2}(-\sin t - \cos t + e^t)$. Na taj način je $\frac{1}{2}(-\sin t - \cos t + e^t) \doteqdot \frac{1}{(p^2+1)(p-1)}$.

3883. Kako je $e^{-at} \doteqdot \frac{1}{p+a}$ i $e^{-bt} \doteqdot \frac{1}{p+b}$, to je na osnovu teoreme o konvoluciji $e^{-at} * e^{-bt} \doteqdot \frac{1}{(p+a)(p+b)}$. No kako je $e^{-at} * e^{-bt} = \frac{1}{b-a}(e^{-at} - b^{-bt})$ (zad. 3881), to je konačno $\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt}) \doteqdot \frac{1}{(p+a)(p+b)}$.

3884. $e^{-2t}\sin t$. 3885. $\frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t})$. 3886. $\frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$.

3887. $t - 3 + 3e^{-t} + 2te^{-t} + \frac{1}{2}t^2 e^{-t}$. 3888. $1 - \cos t$. 3889. $\frac{1}{3}\cos t - \cos 2t)$.

3890. $2 - 8e^t + 7e^{2t}$. 3891. $\sin 2t - \frac{1}{3}\sin 3t$.

3892. $\frac{1}{2}\left[e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\frac{t\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\sin\frac{t\sqrt{3}}{2} - e^{\frac{t}{2}}\left(\cos\frac{t\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\sin\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\right]\right.$.

3893. $e^{-t} - e^{-2t} - xe^{-2t}$. 3894. $\frac{1}{5}(3\sin 3t - 2\sin 2t)$.

3895. $\frac{1}{3}te^t - \frac{1}{3}te^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$. 3896. $\frac{\operatorname{ch} 2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi t}}$.

3897. $(t-3)e^{-(t-3)}\eta(t-3)$, gde je $\eta(t) = \begin{cases} 1, & t>0 \\ 0, & t>0. \end{cases}$ Funkcija $\eta(t)$ poznata je pod imenom jednačina funkcija.

3898. $e^{t-1}\eta(t-1) - \eta(t-1)$. 3899. $\operatorname{sh}(t-1)\eta(t-1) + \operatorname{ch} 2(t-2)\eta(t-2)$.

3900. $(t-1)\eta(t-1) + (t-2)^2\eta(t-2) + (t-3)^3\eta(t-3)$.

3901. $\frac{1}{\sqrt{p}}\cos\frac{1}{p} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!\,p^{2k+\frac{1}{2}}} \doteqdot \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k-\frac{1}{2}}}{(2k)!\,\Gamma(2k+\frac{1}{2})}$.

Kako je $\Gamma\left(2k+\frac{1}{2}\right) = \frac{(4k)!\sqrt{\pi}}{(2k)!\,2^{4k}}$, dobija se $\frac{1}{\sqrt{p}}\cos\frac{1}{p} \doteqdot$

$$\doteqdot \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2k}(2t)^{2k}}{(4k)!} = \frac{\operatorname{ch}\sqrt{2t}\cdot\sin\sqrt{2t}}{\sqrt{\pi t}}.$$

3902. $\frac{\operatorname{sh}\sqrt{2t}\cdot\sin\sqrt{2t}}{\sqrt{\pi t}}$.

3903. $\frac{1}{\pi\sqrt{t}}e^{-\frac{a}{t}}$. Poći od jednakosti $\operatorname{ch} t = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k}}{(2k)!}$ i $(2k)! = \frac{k!\,\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)2^{2k}}{\sqrt{\pi}}$.

3904. $1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$.

3905. $\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{p}}\frac{e^{-ap}}{(\sqrt{p})^2}$. Stavljamo $\Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$, $F(\sqrt{p}) = \frac{e^{-a\sqrt{p}}}{(\sqrt{p})^2}$.

Otuda je $F(p) = \frac{e^{-ap}}{p^2}$, a prema teoremi kašnjenja je

$$F(p) \doteqdot (t-a)\eta(t-a) = f(t).$$

Po Efrosovoj teoremi je

$$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}} \doteqdot \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^{\infty}(\tau - a)e^{-\frac{\tau}{4t}}\,d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^{\infty}(\tau-a)e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int\limits_a^{\infty}\tau e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau -$$

$$-\frac{a}{\sqrt{\pi t}}\int\limits_a^{\infty}e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau = I_1(t) + I_2(t).$$

Ovde je

$$I_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int\limits_a^{\infty}\tau e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}(-2t)e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\Big|_{\tau=a}^{\infty} = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}e^{-\frac{a^2}{4t}},$$

$$I_2(t) = -\frac{a}{\sqrt{\pi t}}\int\limits_a^{\infty}e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau = \frac{a}{\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^{a}e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau - \frac{a}{\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^{\infty}e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau =$$

$$= a\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{a}{2\sqrt{t}}}e^{-s^2}\,ds - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty}e^{-s^2}\,ds\right),$$

gde je $s=\frac{\tau}{2\sqrt{t}}$. Otuda je $I_1(t)=a\left[\operatorname{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)-1\right]=-a\operatorname{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$ i konačno

$$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}}\doteqdot 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}e^{-\frac{a^2}{4t}}-a\operatorname{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right).$$

3906. $\left(t+\frac{a^2}{2}\right)\operatorname{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)-a\sqrt{\frac{t}{\pi}}e^{-\frac{a^2}{4t}}$. **3907.** $ae^{hx+a^2h^2t}\operatorname{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}+ah\sqrt{t}\right)$.

3908. $\frac{e^{-ap}}{p(a+\sqrt{p})}=\frac{1}{\sqrt{p}}\,\frac{e^{-ap}}{\sqrt{p}\,(a+\sqrt{p})}$. Stavljamo $\Phi(p)=\frac{1}{\sqrt{p}}$, $F(p)=\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}\,(a+\sqrt{p})}$. Otuda je

$$F(p)=\frac{e^{-ap}}{p(a+p)}=\frac{1}{a}\left(\frac{e^{-ap}}{p}-\frac{e^{-ap}}{p+a}\right)\doteqdot\frac{1}{a}[\eta(t-a)-e^{-a(t-a)}\eta(t-a)=f(t).$$

Prema Efrosovoj teoremi imamo

$$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p(a+\sqrt{p})}\doteqdot\frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\int_a^\infty[1-e^{-a(\tau-a)}]e^{-\frac{\tau^2}{4t}}d\tau=\frac{1}{a}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{a}{2\sqrt{t}}}^\infty e^{-s^2}ds-$$

$$-\frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\int_a^\infty e^{-\left[a\tau-aa+\frac{\tau}{4t}\right]}d\tau=\frac{1}{a}\operatorname{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)-\frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\int_a^\infty e^{aa+a^2t}e^{-\left(\frac{\tau}{2\sqrt{t}}+a\sqrt{t}\right)^2}d\tau=$$

$$=\frac{1}{a}\operatorname{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)-\frac{e^{a(at+a)}}{a}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{a}{2\sqrt{t}}+at}^\infty e^{-z^2}dz,$$

gde je $z=\frac{\tau}{2\sqrt{t}}+a\sqrt{t}$. Tako je $\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p(a+\sqrt{p})}\doteqdot\frac{1}{a}\operatorname{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)-$

$$-\frac{e^{a(at+a)}}{a}\operatorname{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}+a\sqrt{t}\right).$$

3909. $I(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty \operatorname{ch}\tau\, e^{-\frac{\tau}{4t}}d\tau$. Upoređujući sa formulom (19) iz uvoda dotičnog paragrafa vidimo da je $f(t)=\operatorname{ch}t$, znači, $F(p)=\frac{p}{p^2-1}$. Prema tome je $F(\sqrt{p})=\frac{\sqrt{p}}{p-1}$.

Uzimajući $\Phi(p)=\frac{1}{\sqrt{p}}$ dobijamo $\Phi(p)F(\sqrt{p})=\frac{1}{p-1}\doteqdot I(t)$, odakle je $I(t)=e^t$.

3910. $I(t)=e^{-t}$. **3911.** $I(t)=2te^t$. **3912.** $I(t)=2te^{-t}$.

3913. $y(t)\doteqdot X(p)$, $y'(t)\doteqdot pX(p)-y(0)=pX(p)$, $y''(t)\doteqdot p^2X(p)-py(0)-y'(0)=p^2X(p)+1$,

$\cos x\doteqdot\frac{p}{p^2+1}$, $p^2Y(p)+1+Y(p)=\frac{2p}{p^2+1}$. Tako je $Y(p)=\frac{2p}{(p^2+1)^2}-\frac{1}{p^2+1}$.

Sada nalazimo original za $Y(p)$. Original funkcije $\frac{1}{p^2+1}$ biće $\frac{1}{p^2+1}\doteqdot\sin x$.

Radi nalaženja originala funkcije $\frac{2p}{(p^2+1)^2}$ koristimo, na primer, teoremu o diferenciranju slike

$$\frac{2p}{(p^2+1)^2}=-\left(\frac{1}{p^2+1}\right)'\doteqdot x\sin x,\ \text{znači,}\ Y(p)\doteqdot x\sin x-\sin x=(x-1)\sin x.$$

Tako je konačno $y(x)=(x-1)\sin x$.

3914. $y=2\sin 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x$. **3915.** $y(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x f(x-t)\cos t\,dt$.

3916. Operaciona jednačina je $(p^2+1)Y(p)=\frac{6}{p^4}+\frac{6}{p^2}\Rightarrow Y(p)=\frac{6}{p^4}$. Konačno je $y(x)=x^3$.

3917. $y(x)=\frac{1}{6}(3x\sin x+4\sin x-2\sin 2x)$. **3918.** $y(x)=2x+\frac{1}{2}(e^{-x}+\cos x-\sin x)$.

3919. $y(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x-4+e^{-x}$. **3920.** $y(x)=e^{2x}+4\cos x-2\sin x-5$.

3921. $y(x)=\frac{1}{4}e^x\left(x^2-3x+\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{3}e^{\frac{x}{2}}\left(\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{24}e^{-x}\right)$.

3922. $y(x)=\operatorname{ch}x-\frac{1}{2}x^2-1$. **3923.** $y(x)=-\frac{x}{24}[3x\cos x+(x^2-3)\sin x]$.

3924. $y(x)=\frac{a}{2}x^2+(1-a)x+(a-1)+\left(\frac{1}{2}-a\right)e^{-x}+\frac{1}{2}(\cos x-\sin x)$.

3925. $2y(x)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\eta(x)-\left[(x-1)-\frac{1}{2}\sin 2(x-1)\right]\eta(x-1)+$

$$+\frac{1}{2}\left[(x-2)-\frac{1}{2}\sin 2(x-2)\right]\eta(x-2).$$

3926. $y(x)=\sum_{k=0}^{3}(-1)^k[1+e^{x-ka}(x-ka-1)]\eta(x-ka)$.

3927. Operaciona jednačina je

$$p^2Y(p)-Ap-B+4Y(p)=\frac{5e^{-ap}}{p+1}.$$

Rešavanjem ove jednačine po $Y(p)$ i razlaganjem desne strane na prostije sabirke, biće

$$Y(p)=\frac{Ap+B}{p^2+4}\left(\frac{1}{p+1}-\frac{p-1}{p^2+4}\right)e^{-ap}.$$

Prema tome je

$$y(x)=A\cos 2x+\frac{\beta}{2}\sin 2x+\left[e^{-(x-a)}-\cos 2(x-a)+\frac{1}{2}\sin 2(x-a)\right]\eta(x-a).$$

3928. Razmotrimo jednačinu

$$x_1''+x_1=1;\ x_1(0)=x_1'(0)=0.$$

Njeno operaciono rešenje je $X_1(p)=\dfrac{1}{p(p^2+1)}$, odakle je $x_1(t)=1-\cos t$. Na osnovu Duhamelove formule dobijamo da je rešenje $x(t)$ polazne jednačine

$$x(t)=\int_0^t e^{a\tau}\sin(t-\tau)\,d\tau=\frac{1}{a^2+1}(e^{at}-\cos t-a\sin t).$$

3929. $x(t)=1+e^{2t}-2e^t-t^2e^t$. **3930.** $x(t)=\dfrac{1}{5}\sin t(1-e^{-t})-\dfrac{2}{5}(1-e^{-t})\cos t$.

3931. $x(t)=\dfrac{1}{2}(t^2-1)\operatorname{arc\,tg} t-\dfrac{t}{2}\ln(1+t^2)+\dfrac{t}{2}$.

3932. $x(t)=t\sin t-\dfrac{4}{\sqrt{3}}\sin t\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{\sqrt{3}}+\cos t\ln(2+\cos t)-\ln 3\cos t$.

3933. $x(t)=e^t-1-t(e^t+1)+(e^t+1)\ln(e^t+1)-(e^t+1)\ln 2$.

3934. $x(t)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{9-\pi\sqrt{3}}{27}\cos t+\dfrac{\sqrt{3}}{3\varsigma}\sin t\ln\left|\dfrac{\sqrt{3}\sin t-2}{\sqrt{3}\sin t+2}\right|-\dfrac{\sqrt{3}}{9}\cos t\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{3}\cos t)$.

3935. $x(t)=\cos t\operatorname{arc\,tg}(\cos t)-\dfrac{\pi}{2}\cos t-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\sin t\ln\left|\dfrac{\sin t-\sqrt{2}}{\sin t+\sqrt{2}}\right|$.

3936. $x(t)=\dfrac{1}{2}(t\operatorname{ch} t-\operatorname{sh} t)$. **3937.** $x(t)=\dfrac{1}{4}e^t t^2+\dfrac{1}{2}t\operatorname{sh} t+\dfrac{1}{4}te^{-t}-\dfrac{1}{4}\operatorname{sh} t$.

3938. Operaciona jednačina je

$$p^3Y(p)-p^2y(0)-py'(0)-y''(0)-3pY(p)+3y(0)+2Y(p)=\frac{8}{(p+1)^3}+\frac{4}{(p+1)^2}-\frac{10}{p+1}.$$

Njeno rešenje je

$$Y(p)=\frac{p^2y(0)+py'(0)+y''(0)-3y(0)}{(p-1)^2(p+2)}+\frac{2-16p-10p^2}{(p-1)^2(p+2)(p+1)^3}.$$

Razlaganjem drugog sabirka desne strane na prostije razlomke dobija se:

$$\frac{2-16p-10p^2}{(p-1)^2(p+2)(p+1)^3}=\frac{1}{3}\frac{1}{p-1}-\frac{1}{(p-1)^2}+\frac{2}{3}\frac{1}{p+2}+\frac{1}{(p+1)^3}+\frac{1}{(p+1)^2}-\frac{1}{p+1}.$$

Otuda, uključivanjem konstanti u odgovarajuće sabirke biće:

$$Y(p)=\frac{c_1}{p-1}+\frac{c_2}{(p-1)^2}+\frac{c_3}{p+2}+\frac{2}{(p+1)^3}+\frac{1}{(p+1)^2}-\frac{1}{p+1}$$

Prema tome konačno je

$$y(x)=c_1e^x+c_2xe^x+c_3e^{-2x}+(x^2+x-1)e^{-x}.$$

3939. $y(x)=c_1e^x+c_2e^{2x}+c_3e^{3x}+xe^{2x}+(2x^3-9x^2+21x)e^{3x}$.

3940. $y(x)=e^{-\frac{x}{2}}\left[(c_1+c_2x)\cos\dfrac{x\sqrt{3}}{2}+(c_3+c_4x)\sin\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\right]+x^2-3x+1$.

3941. $y(x)=c_1x^2+c_2x+c_3+c_4e^{-x}+\dfrac{1}{2}(\cos x-\sin x)$.

3942. 1° Pri formiranju operacionih jednačina, koje odgovaraju diferencijalnim jednačinama sa linearnim koeficijentima, koriste se formule:

$$xy''\doteqdot p^2Y'(p)-2pY(p)+y(0);$$
$$xy'\doteqdot pY'(p)-Y(p);$$
$$xy\doteqdot Y(p).$$

Operaciona jednačina je

$$Y'(p)+\frac{3}{p}Y(p)=\frac{2}{p^2}y(0).$$

Rešavajući ovu linearnu jednačinu dobija se

$$Y(p)=\frac{c}{p^3}+\frac{1}{p}y(0).$$

Otuda je, $y(x)=c_1x^2+c_2$, gde je $c_2=y(0)$.

2° $y(x)=c_1e^x+c_2(x+1)$.

3943. $y(x)=c_1e^{2x}+c_2(1+3x)e^{-x}$. **3944.** $y(x)=e^{ax}(c_1+c_2x^{2b+1})$, $(b>0)$.

3945. Operaciona jednačina je

$$Y'(p)+\frac{3}{p}Y(p)=\frac{2}{p^2}y(0)-\frac{1}{p^5}e^{-\frac{1}{p}}.$$

Rešavanjem ove linearne jednačine dobija se

$$Y(p)=\frac{c_1}{p^3}+\frac{1}{p}y(0)-\frac{1}{p^3}e^{-\frac{1}{p}}.$$

Prema tome je $y(x)=c_1x^2+c_2-xI_2(2\sqrt{x})$.

3946. $y(x)=c_1(x^3+9x^2+36x+60)+c_2e^x(x^2-8x+20)$.

3947. $y(x)=c_1e^{-2x}+c_2(4x^2+1)$. Koristiti smenu $2x+1=t$.

3948. Operaciona jednačina je

$$p^2 Y'(p)+(4p-a)Y(p)=0.$$

Rešavajući ovu diferencijalnu jednačinu dobija se $Y(p)=\frac{1}{p^4}e^{-\frac{a}{p}}$. Koristeći formulu

$$\frac{1}{p^{n+1}}e^{-\frac{a}{x}} \doteqdot \left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{n}{2}} I_n(2\sqrt{ax}).$$

biće konačno $y(x)=\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}} I_3(2\sqrt{ax})$.

3949. $y(x)=c\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}} I_3(2\sqrt{2a})+\frac{x^3}{a}$. 3950. $y(x)=c\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}} I_3(2\sqrt{ax})-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} I_1(2\sqrt{ax})$.

3951. $y(x)=cx\,I_2(2\sqrt{ax})$. 3952. Operaciona jednačina je

$$Y'(p)=-\frac{y(0)}{p^2-1}.$$

Znajući da je $Y'(p)\doteqdot -xy$, $\frac{1}{p^2-1}\doteqdot \operatorname{sh} x$, dobija se $-xy=-\operatorname{sh} x\cdot y(0)$. Otuda je sa tačnošću do konstantnog činioca $y(x)=\frac{\operatorname{sh} x}{x}$.

3953. $y=e^{-x}$. 3954. Operaciona jednačina je

$$Y'(p)+\frac{1}{p}Y(p)=-\frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+3}}.$$

Njeno rešenje je $Y(p)=\frac{1}{p}\left[c+\Gamma(n+1)\frac{1}{(n+1)p^{n+1}}\right]=\frac{c}{p}+\frac{\Gamma(n+1)}{n+1}\cdot\frac{1}{p^{n+2}}$. Prelazeći na original dobija se $y(x)=c+\frac{\Gamma(n+1)}{n+1}\cdot\frac{x^{n+1}}{\Gamma(n+2)}$. No kako je $\Gamma(n+2)=(n+1)\Gamma(n+1)$, to je $y(x)=c+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

3955. $y(x)=I_0(2\sqrt{x})+\sqrt{x}\,I_1(2\sqrt{x})$. Koristiti formulu

$$\frac{1}{p^{n+1}}e^{-\frac{a}{p}} \doteqdot \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n}{2}} I_n(2\sqrt{ax}).$$

3956. U ovom slučaju je $Y(p)=c\frac{(p+3)^2}{p+1}+\frac{A}{p+1}$. Pošto razlomak $\frac{(p+3)^2}{p+1}$ nije slika, to će $Y(p)$ biti slika samo za $c=0$. Znači $Y(p)=\frac{A}{p+1}\doteqdot Ae^{-x}=y(x)$, gde je $A=y(0)$.

3957. $y=Ae^{-x}$, gde je $A=y(0)$. Uzeti u obzir da $\frac{p^2}{p+1}$ nije slika.

3958. $y=Ae^{-\frac{b}{a}x}$, gde je $A=y(0)$. Uzeti u obzir da razlomak $\frac{p^2}{ap+b}$ nije slika.

3959. Operaciona jednačina je

$$p^2 Y(p)-Ap+a^2 Y(p)=\frac{\psi(p)}{1-e^{-2\omega p}},$$

gde je $Y(p)\doteqdot y(x)$, $A=y(0)$, $B=y'(0)$ i

$$\psi(p)\doteqdot g(x)=\begin{cases} f(x) & (0<x<2\omega),\\ 0 & (2\omega<x).\end{cases}$$

Na taj način je

$$Y(p)=\frac{1}{1-e^{-2\omega p}}\left[\frac{\psi(p)}{p^2+a^2}+\frac{Ax+B}{p^2+a^2}(1-e^{-2\omega p})\right],$$

ili (1) $Y(p)=\frac{\Phi(p)}{1-e^{-2\omega p}}$, gde je

$$\Phi(p)=\frac{\Psi(p)}{p^2+a^2}+\frac{Ap+B}{p^2+a^2}(1-e^{-2\omega p})\doteqdot F(x).$$

Poznato je da će original $y(x)$, koji odgovara slici (1), biti periodična funkcija sa periodom 2ω samo onda, kada je (2) $F(x)\equiv 0$ za $x>2\omega$, pri čemu je u intervalu $0<x<2\omega$

$$y(x)=F(x).$$

Da bi se odredilo periodično rešenje $y(x)$ u intervalu $0<x<2\omega$ potrebno je iz (2) naći $F(x)$ dva puta: za $x<2\omega$ i za $x>2\omega$ a iz identiteta (2) odrediti metodom neodređenih koeficijenata A i B (one početne uslove za koje data jednačina ima periodično rešenje). Za $x<2\omega$ biće

(3) $$F(x)=\frac{1}{a}\int_0^x f(t)\sin a(x-t)\,dt+A\cos ax+B\sin ax.$$

Za $x>2\omega$

(4) $$0\equiv\frac{1}{a}\int_0^{2\omega} f(t)\sin a(x-t)\,dt+A\,[\cos ax)-\cos a(x-2\omega)]+\frac{B}{a}[\sin ax-\sin a(x-2\omega)].$$

Iz identiteta (5) sledi

$$Aa(1-\cos 2a\omega)+B\sin 2a\omega=\int_0^{2\pi} f(t)\sin at\,dt,$$

$$Aa\sin 2a\omega-B(1-\cos 2a\omega)+\int_0^{2\omega} f(t)\cos at\,dt.$$

Otuda, ako je $2\omega\neq\frac{2n\pi}{a}$, dobija se

$$A=\frac{1}{2a\sin a\omega}\int_0^{2\omega} f(t)\cos a(t-\omega)\,dt,\quad \frac{B}{a}=\frac{1}{2a\sin a\omega}\int_0^{2\omega} f(t)\sin(t-\omega)\,dt.$$

Zamenjujući nađene vrednosti za A i B u (3), dobija se traženo periodično rešenje u intervalu $0<x<2\omega$:

$$y(x)=\frac{1}{a}\left[\int_0^x f(t)\sin a(x-t)\,dt+\frac{1}{2\sin a\omega}\int_0^{2\omega} f(t)\cos a(x-t+\omega)\,dt\right].$$

Ako je pak $2\omega=\frac{2n\pi}{a}$, onda identitet (4) dobija oblik

$$(5)\qquad \int_0^{\frac{2n\pi}{a}} f(t)\sin a(x-t)\,dt\equiv 0.$$

Prema tome, ako $f(x)$ zadovoljava identitet (5), onda će data jednačina za proizvoljne početne uslove, imati periodično rešenje

$$y(x)=\frac{1}{a}\int_0^x f(t)\sin a(x-t)\,dt+A\cos ax+\frac{B}{a}\sin ax,$$

pri čemu je $0<x<\frac{2n\pi}{a}$.

3960. Ako je $\int_0^{2\omega} f(t)\,dt\,dt=0$, to je za slučaj $y(0)$ proizvoljno (početni uslov),

$$y'(0)=\frac{1}{2\sin\omega}\int_0^{2\omega} f(t)\cos(t-\omega)\,dt,$$

$$y''(0)=\frac{1}{2\sin\omega}\int_0^{2\omega} f(t)\sin(t-\omega)\,dt.$$

Data jednačina ima periodično rešenje

$$y(x)=y(0)+2\int_0^x f(x-t)\sin^2\frac{t}{2}\,dt+\frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin\omega}\int_0^{2\omega} f(t)\cos\left(\frac{x}{2}+\omega-t\right)dt$$

periode 2ω.

3961. Pri početnom uslovu $y(0)=\frac{\left(1-e^{-\frac{\pi}{2}}\right)^2}{1+e^{-\pi}}$, ima periodično rešenje periode $2\omega=2\pi$, koje menja znak prolazeći kroz poluperiod:

$$y(x)=\frac{2e^{-\frac{\pi}{2}}}{1+e^{-\pi}}e^x-1-x-2\left[e^{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}-1-x+\frac{\pi}{2}\right]\eta\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\quad(0<x<\pi),$$

gde je $\eta(x)$ jedinična funkcija.

3962. Za početne uslove $y(0)=\frac{\sin^2 1}{8\sin 2}$, $y'(0)=-\frac{\sin^2 1}{4\cos 2}$, jednačina ima periodično rešenje sa periodom $2\omega=4$:

$$y(x)=\begin{cases}\frac{\sin^2 1}{4\sin 4}\cos 2(x+1)+\frac{x}{4}-\frac{1}{8}\sin 2x, & (0<x<1;\\[4pt] \frac{\sin^2 1}{4\sin 4}\cos 2(x+1)-\frac{x}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 2(x-1), & (1<x<2);\\[4pt] \frac{\sin^2 1}{4\sin 4}\cos 2(x-3), & (2<x<4).\end{cases}$$

3963. Operatorski sistem jednačina je

$$p^2X=3(Y-X+Z),$$
$$p^2Y+1=X-Y,$$
$$p^2Z-p=Z.$$

gde je $X(p)\doteqdot x(t)$, $Y(p)\doteqdot y(t)$, $Z(p)\doteqdot z(t)$.

Rešavanjem zadnjeg sistema po $X(p)$, $Y(p)$ i $Z(p)$ dobija se

$$X(p)=\frac{3(p-1)}{p^2(p^2+4)},\quad Y(p)=\frac{3(p-1)}{p^2(p^2+1)(p^2+4)}-\frac{1}{p^2+1},\quad Z(p)=\frac{p}{p^2+1}.$$

Nalaženjem originala za $X(p)$, $Y(p)$ i $Z(p)$ konačno će biti

$x(t)=\frac{3}{4}(1-t)-\frac{3}{4}\cos 2t+\frac{3}{8}\sin 2t$, $y(t)=\frac{3}{4}(1-t)+\frac{1}{4}\cos 2t-\frac{1}{8}\sin 2t-\cos t$, $z(t)=\cos t$.

3964. $y(x)=\frac{3}{4}e^{2x}+\frac{1}{4}e^{-2x}-e^x$; $z(x)=\frac{3}{4}e^{2x}-\frac{1}{12}e^{-2x}-\frac{2}{3}e^x$.

3965. $y=4x+2-2\cos x-3\sin x$; $z=2\sin x-2x$.

3966. $y=e^{-6x}\cos x$; $z=e^{-6x}(\cos x-\sin x)$.

3967. $y=-\frac{1}{2}-\frac{11}{34}e^{4x}+e^x-\frac{3}{17}\cos x+\frac{5}{17}\sin x$; $z=\frac{22}{51}e^{4x}-\frac{2}{3}e^x+\frac{4}{17}\cos x-\frac{1}{17}\sin x$.

3968. $y=-\frac{1}{2}x^2$; $z=x^2+x$.

3969. $y(x)=\frac{1}{3}e^{-x}+\frac{1}{2}e^{-2x}+\frac{1}{6}e^{2x}$; $z(x)=\frac{1}{3}e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+\frac{1}{6}e^{2x}$; $t(x)=\frac{1}{3}e^{2x}-\frac{1}{3}e^{-x}$.

3970. $y=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\cos x\sqrt{5}$; $z=\frac{2}{5}-\frac{2}{5}\cos x\sqrt{5}-\frac{2}{\sqrt{5}}\sin x\sqrt{5}$;

$t=\frac{2}{5}-\frac{2}{5}\cos x\sqrt{5}+\frac{2}{\sqrt{5}}\sin x\sqrt{5}$.

3971. $y=\frac{1}{2}(\cos x \operatorname{sh} x+\sin x \operatorname{ch} x)$; $z=\frac{1}{2}(\sin x \operatorname{ch} x-\cos x \operatorname{ch} x)$.

3972. Operacioni sistem jednačina ima oblik

$$(p^2+1)X+Y+Z=p,$$
$$X+(p^2+1)Y+Z=0,$$
$$X+Y+(p^2-1)Z=0.$$

Rešavanjem ovog sistema dobija se

$$X(p)=\frac{p^3}{(p^2+1)(p^2-2)}, \quad Y(p)=Z(p)=\frac{p}{(p^2+1)(p^2-2)}.$$

Iz zadnjih jednakosti konačno se dobija

$$y(t)=z(t)=-\frac{1}{3}(\operatorname{ch} t\sqrt{2}-\cos t); \; x(t)=\frac{2}{3}\operatorname{ch} t\sqrt{2}+\frac{1}{3}\cos t.$$

3973.

$$x(t)=\begin{cases}1-e^{-t}, & (0<t<1),\\ 1-e^{-t}-\operatorname{sh}(t-1), & (1<t<2),\\ e^{-t}-\operatorname{sh}(t-1)+\operatorname{ch}(t-2), & (t>2).\end{cases}$$

$$y(t)=\begin{cases}1-e^{-t}, & (0<t<1),\\ -e^{-t}+\operatorname{ch}(t-1), & (1<t<2),\\ -e^{-t}+\operatorname{ch}(t-1)-\operatorname{sh}(t-2), & (t>2).\end{cases}$$

3974. $y(x)=\int_0^x f(t)\operatorname{ch}(x-t)\sqrt{ab}\,dt+\frac{1}{2\operatorname{sh}\omega\sqrt{ab}}\int_0^{2\omega} f(t)\operatorname{sh}(x+\omega-t)\sqrt{ab}\,dt;$

$$z(x)=\sqrt{\frac{a}{b}}\left[\int_0^x f(t)\operatorname{sh}(x-t\sqrt{ab}\,dt+\frac{1}{2\operatorname{sh}\omega\sqrt{ab}}\int_0^{2\omega} f(t)\operatorname{ch}(x+\omega-t)\sqrt{ab}\,dt.\right.$$

3975. Za početne uslove

$$y(0)=\frac{1}{2\sin 4\omega}\int_0^{2\omega}[f(t)\sin 4(t-\omega)+2F(t)\cos 4(t-\omega)\,dt,$$

$$z(0)=\frac{-1}{4\sin 4\omega}\int_0^{2\omega}[f(t)\cos 4(t-\omega)-2F(t)\sin 4(t-\omega)\,dt,$$

sistem ima periodično rešenje

$$y=\int_0^x[f(t)\cos 4(x-t)+2F(t)\sin 4(x-t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{2\sin 4\omega}\int_0^{2\omega}[f(t)\sin 4(t-\omega-x)+2F(t)\cos(t-\omega-x)\,dt,$$

$$z=\frac{1}{2}\left\{\int_0^x[2F(t)\cos 4(x-t)-f(t)\sin 4(x-t)]\,dt-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\sin 4\omega}\int_0^{2\pi}[f(t)\cos 4(t-\omega-x)-2F(t)\sin 4(t-\omega-x)]\,dx\right\}.$$

3976. Za početne uslove $y(0)=\frac{-1}{3\sin 3\omega}\int_0^{2\omega} f(t)\cos 3(\omega-t)\,dt,$

$$z(0)=\frac{-1}{2\sin 3\omega}\int_0^{2\omega} f(t)\left[\frac{1}{3}\cos 3(\omega-t)+\sin 3(\omega-t)\right]dt,$$

sistem ima periodično rešenje

$$y=\frac{2}{3}\int_0^x f(t)\sin 3(x-t)\,dt-\frac{1}{3\sin 3\omega}\int_0^{2\omega} f(t)\cos(x+\omega-t)\,dt,$$

$$z=\int_0^x f(t)\left[\cos 3(x-t)-\frac{1}{3}\sin 3(x-t)\right]dt-$$

$$-\frac{1}{2\sin 3\omega}\int_0^{2\omega} f(t)\left[\sin 3(x+\omega-t)+\frac{1}{3}\cos(x+\omega-t)\right]dt.$$

3977. Pretpostavimo da su $u(x,t)$, $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ i $f(x,t)$ tretirane kao funkcije od t, originali. Obeležimo sa

$$U(p,x)=\int_0^\infty u(x,t)e^{-pt}\,dt$$

sliku funkcije $u(x,t)$. Tada je

$$\frac{\partial u}{\partial x}\doteqdot\int_0^\infty\frac{\partial u}{\partial x}e^{-pt}\,dt=\frac{dU}{dx}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\doteqdot\frac{d^2 U}{dx^2}.$$

Na osnovu pravila diferenciranja originala, vodeći računa o početnim uslovima dobija se

$$\frac{\partial u}{\partial t}\doteqdot pU-\varphi(x).$$

Pretpostavimo da su $\psi_1(t)$ i $\psi_2(t)$ originali i da je

$$\psi_1(t) \doteqdot \Psi_1(p), \quad \psi_2(t) \doteqdot \Psi_2(p).$$

Tada konturni uslovi daju

(1) $$U|_{x=0} = \Psi_1(p), \quad U|_{x=l} = \Psi(p).$$

Na taj način, operatorski metod svodi rešavanje datog problema na rešavanje obične diferencijalne jednačine

(2) $$a^2 \frac{d^2U}{dx^2} - pU + \varphi(x) + F(x, p) = 0,$$

pri konturnim uslovima (1). Ovde je $F(x, p) \doteqdot f(x, t)$.

Rešavajući problem (2) ÷ (1) i transformirajući rešenje, nalazimo funkciju $u(x, t)$ koja predstavlja rešenje postavljenog problema. Analogno se rešavaju i drugi konturni problemi jednačine treperenja žice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t),$$

telegrafske jednačine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha + \beta) \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha\beta u = 0$$

i neke druge jednačine opštijeg oblika.

3978. Prelazeći na sliku dobija se jednačina

(1) $$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{p^2}{a^2} U = -\frac{pA}{a^2} \sin \frac{\pi x}{l},$$

(2) $$U|_{x=0} = U|_{x=l} = 0$$

Rešavajući jednačinu (1) biće

$$U(x, p) = c_1 e^{\frac{p}{a} x} + c_2 e^{-\frac{p}{a} x} + \frac{Ap}{p^2 + \frac{a^2 \pi^2}{l^2}} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Uzimajući u obzir konturne uslove, konačno se dobija

$$U(x, p) = \frac{Ap}{p^2 + \frac{a^2 \pi^2}{l^2}} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Original funkcije $U(x, p)$ biće

$$u(x, t) = A \cos \frac{\pi a t}{l} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

3979. $u(x, t) = u_0 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} e^{-z^2} dz\right).$ **3980.** $u(x, t) = u_1 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} e^{-z^2} dz.$

3981. $$u(x, t) = a e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2k}}} \cos\left(\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right) - \frac{a}{\pi} \int\limits_0^{\infty} e^{-\varrho t} \sin x \sqrt{\frac{\varrho}{k}} \frac{\varrho \, d\varrho}{\varrho^2 + \omega^2}.$$

3982. $$u(x, t) = a\left[e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2k}}} \sin\left(\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right) + \frac{\omega}{\pi} \int\limits_0^{\infty} e^{-\varrho t} \sin x \sqrt{\frac{\varrho}{k}} \frac{d\varrho}{\varrho^2 + \omega^2}\right].$$

3983. $$u(x, t) = -\frac{bx}{12}(x^3 - 2lx^2 + l^3) + \frac{8bl^4}{\pi^5} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\frac{(2k+1)\pi t}{l} \sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}}{(2k+1)^5}.$$

3984. $$u(x, y) = \frac{1}{a} \int\limits_0^x f(x-t) \sin at \, dt.$$

3985. $$u(x, y) = \int\limits_0^x \varphi(x-t) I_0(2\sqrt{ayt}) \, dt + \int\limits_0^y \psi(y-t) I_0(2\sqrt{axt}) \, dt +$$
$$+ \int\limits_0^y dt \int\limits_0^x f(x-\tau, y-t) I_0(2\sqrt{at\tau}) \, d\tau.$$

3986. Operaciona jednačina je

$$pY(p) = Ye^{-p} + \frac{1}{p},$$

odakle je

$$Y(p) = \frac{1}{p} \frac{1}{p - e^{-p}} = \frac{1}{p^2} \frac{1}{1 - \frac{e^{-p}}{p}} = \frac{1}{p^2}\left(1 + \frac{e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p^2} + \cdots + \frac{e^{-np}}{p^n} + \cdots\right).$$

Za $y(x)$ dobijamo

$$y(x) = x\eta(x) + \frac{1}{2}(x-1)^2 \eta(x-1) + \cdots +$$
$$+ \frac{1}{(n+1)!}(x-n)^{n+1} \eta(x-n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-k)^{k+1}}{(k+1)!} \eta(x-k).$$

3987. $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(x-k)^{2k+3}}{(2k+3)!} \eta(x-k).$ **3988.** $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{(x-k)^{k+3}}{(k+3)!} \eta(x-k).$

3989. $$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(x-k)^{k+2}}{(k+2)!} \eta(x-k).$$

3990. $$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x-2k)^{k+3}(k+1)}{(k+3)!} \eta(x-2k).$$

3991. $y(x) \doteqdot Y(p),\ y'(x) \doteqdot pY(p)-y(0)=pY(0)-1,\ pY(p)-1=\int\limits_0^\infty e^{-px}\,y(x-1)\,dx.$

Dalje uvodeći smenu $x-1=z$ dobijamo da je

$$\int\limits_0^\infty e^{-pt}\,y(x-1)\,dx=\int\limits_{-1}^\infty e^{-p(z+1)}\,y(z)\,dz=e^{-p}\int\limits_{-1}^0 e^{-pz}\,y(z)\,dz+e^{-p}\int\limits_0^\infty e^{-pz}\,y(z)\,dz=$$

$$=e^{-p}\,\frac{e^{-pz}}{-p}\Bigg|_{z=-1}^{z=0}+e^{-p}\,Y(p),$$ pošto je $y(z)\equiv 1$ za $-1<z<0$. Konačno je

$$pY(p)-1=\frac{1-e^{-p}}{p}+e^{-p}\,Y(p).$$

Otuda je

$$y(p)=\frac{1}{p-e^{-p}}+\frac{1-e^{-p}}{p(p-e^{-p})}=\frac{1}{p\left(1-\dfrac{e^{-p}}{p}\right)}+\frac{1-e^{-p}}{p^2\left(1-\dfrac{e^{-p}}{p}\right)}=\frac{1}{p}\left(1+\frac{e^{-p}}{p^2}+\cdots+\right.$$

$$\left.+\frac{e^{-kp}}{p^k}+\cdots\right)+\frac{1-e^{-p}}{p^2}\left(1+\frac{e^{-p}}{p}+\cdots+\frac{e^{-kp}}{p^k}+\cdots\right)=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{e^{-p}}{p^3}+\cdots+\frac{e^{-kp}}{p^{k+2}}+\cdots$$

Nalazeći original za $Y(p)$, dobijamo rešenje polazne jednačine

$$y(x)=\left(1+\frac{x}{1!}\right)\eta(x)+\sum_{k=2}^\infty\frac{(x-k+1)^k}{k!}\,\eta(x-k+1).$$

3992. $y(x)=\left(x+\dfrac{1}{2}x^2\right)\eta(x)+\displaystyle\sum_{k=3}^\infty\frac{(x-k+2)^k}{k!}\,\eta(x-k+2).$

3993. $y(x)=\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}\right)\eta(x)+\displaystyle\sum_{k=1}^\infty\frac{(x-k)^{k+1}}{(k+1)!}\,\eta(x-k)+\sum_{k=1}^\infty\frac{(x-k)^{k+2}}{(k+2)!}+\eta(x-k).$

3994. $y(x)=\cos x.$ 3995. $y(x)=x^2-1.$

3996. $y(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^\infty\frac{\eta(t-k)}{k!}\int\limits_0^x f(x-t)\cdot(t-k)^k\,e^{-2(t-k)}\,dt.$

3997. $y(x)=\sqrt{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k(x-k\pi)^{k+\frac{1}{2}}}{k!\,2^{k+\frac{1}{2}}}\,I_{k+\frac{1}{2}}(x-k\pi).$ 3998. $y(x)=2x+4.$

3999. $y(x)=e^{-x}-xe^{-x}-\displaystyle\sum_{k=1}^n(-1)^k e^{-(x-k)}(x-k)^{k+2}\cdot L_{k-1}^{k+2}[-(x-k)]$, za $n<x<n+1$.

4000. $y(x)=e^{-x}.$

4001. Prelazeći na slike primenom formule (12) dotičnog paragrafa dobija se

$$e^{2q}[F^*(q)-f_0-f_1e^{-q}]-5e^q[F^*(q)-f_0]+6F^*(q)=0,\Rightarrow F^*(q)=\frac{f_0e^{2q}+(f_1-5f_0)e^q}{e^{2q}-5e^q+6},$$

ili posle razlaganja $F^*=f_0+\dfrac{f_1e^q-6f_0}{e^{2q}-5e^q+6}=+f_0+\dfrac{C(z)}{B(z)}$, gde je $z=e^q$, $C(z)=f_1z-$ $-6f_0$, $B(z)=z^2-5z+6$. Kako $B(z)$ ima korene $z_1=2$ i $z_2=3$ biće $\dfrac{C(z)}{B(z)}=\dfrac{d_1}{z-2}+\dfrac{d_2}{z-3}$ pri čemu je $d_1=\dfrac{C(z)}{B'(z)}=-2(f_1-3f_0)$, $d_2=\dfrac{C(3)}{B'(3)}=3(f_1-2f_0)$. Otuda je u saglasnosti sa formulom (15)

$$F^*(q)=f_0-\frac{2(f_1-3f_0)}{e^q-2}+\frac{3(f_1-2f_0)}{e^q-3},$$

pa na osnovu formule (17) zaključujemo da rešenje $f(x)$ date diferencne jednačine za $x>1$ ima oblik $f(x)=-2(f_1-3f_0)\,2^{x-1}+3(f_1-2f_0)\,3^{x-1}$.

Ako su f_0 i f_1 proizvoljni onda se dobijeno opšte rešenje može napisati još u obliku $f(x)=c_1\,2^x+c_2\,3^x$. Treba napomenuti da je original za konstantno f_0 jednak nuli za svako $x>1$.

4002. Primenjujući D-transformaciju na obe strane date jednačine i koristeći formulu (13), dobija se

$$[(e^q-1)^2-2(e^q-1)+1]\,F^*(q)-e^q=\frac{2e^q}{e^q-1},\ (n>0).$$

Dalje se lako dobija

$$F^*(q)=\frac{e^{2q}+e^q}{(e^q-1)(e^q-2)^2}=\frac{z^2+z}{(z-1)(z-2)^2},$$

gde je $z=e^q$. Razlaganjem desne strane na prostije razlomke

$$\frac{z^2+z}{(z-1)(z-2)^2}=\frac{2}{z-1}-\frac{1}{z-2}+\frac{6}{(z-2)^2}$$

i prelazeći na original dobija se

$$f(x)=2-2^{x-1}+6(n-1)\,2^{x-2}=2+\left(\frac{3}{2}x-2\right)2^x.$$

Treba napomenuti da je koeficijent uz $F^*(q)$ kod D-transformacije na levoj strani jednačine oblika (1) $\Delta^k f(x)+b_1\Delta^{k-1}f(x)+\cdots+b_kf(x)=\varphi(x)$ uvek jednak

$$(e^q-1)^k+b_1(e^q-1)^{k-1}+\cdots+b_k.$$

Jednačina $(z-1)^k+b_1(z-1)^{k-1}+\cdots+b_k=0$ je karakteristična jednačina jednačine (1).

4003. $f(x)=2^x\left[1+(-1)^x\,2-\cos\dfrac{x\pi}{2}\right]-2x-1.$ 4004. $f(x)=(1-x)\,4^x.$

4005. $f(x)=\dfrac{a^x-3^x}{a-3}+3^x.$ 4006. $f(x)=\dfrac{a^{x-1}\left[c-\cos\dfrac{q(2x-1)}{2}\right]}{2\sin\dfrac{q}{2}}.$

4007. $f(x)=4+x.$ 4008. $f(x)=(-1)^x(2-2^x).$

4009. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x\right].$

4010. $f(x)=-\dfrac{4}{3}\sin\dfrac{\pi x}{3}\cdot\sin\dfrac{\pi(x-2)}{3}.$ 4011. $f(x)=\dfrac{2(x-1)}{\sqrt{3}}\cdot\sin\dfrac{2\pi x}{3}.$

4012. $f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{2}\cdot\sin\dfrac{\pi(1-x)}{4}.$ 4013. $f(x)=c_1\,4^x+(-)^x\left(c_2+\dfrac{x}{5}\right).$

4014. $f(x)=1+2^{x-1}(x-2).$ 4015. $f(x)=\dfrac{x^{(4)}}{4!}.$

4016. Operacioni sistem jednačina je

$(e^p-3)Y(p)-Z(p)=e^p,\ 5\,Y(p)+(e^p+1)Z(p)=e^p.$

Rešavajući ovaj sistem biće:

$$Y(p)=\frac{e^p(e^p+2)}{e^{2p}-2e^p+2},\quad Z(p)=\frac{e^p(e^p-8)}{e^{2p}-2e^p+2}.$$

Prelazeći na original dobija se

$$y(x)=(\sqrt{2})^x\left(\cos\frac{\pi x}{4}+3\sin\frac{\pi x}{4}\right),\ z(x)=(\sqrt{2})^x\left(\cos\frac{\pi x}{4}-7\sin\frac{\pi x}{2}.\right)$$

4017. $y(x)=\dfrac{1}{3}(1-3\cdot2^x+2^{2x+1}),\ z(x)=\dfrac{1}{6}(2^{2x+2}-3^{x+1}-1).$

4018. Za $x<1\Rightarrow$

$$y(x)=(\sqrt{5})^x\cos\frac{\pi x}{2},\ z(x)=-u(x)=-2(\sqrt{5})^{x-1}\sin\frac{\pi x}{2}.$$

Za $x>1\Rightarrow$

$$y(x)=\frac{4}{5}(\sqrt{5})^x\cos\frac{\pi x}{2},\ z(x)=-\frac{2}{5}(\sqrt{5})^x\left(\sqrt{5}\sin\frac{x\pi}{2}+\cos\frac{x\pi}{2}\right),\ u(x)=$$

$$=\frac{2}{5}(\sqrt{5})^x\left(\sqrt{5}\sin\frac{\pi x}{2}-\cos\frac{\pi x}{2}\right).$$

4019. Ako se stavi $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\varphi(x)$ tada je

(1) $$\frac{dy}{dx}=\int_0^x\varphi(t)\,dt+y'(0)=\int_0^x\varphi(t)\,dt,$$

(2) $$y=\int_0^x(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Zamenjujući (1) i (2) u datu diferencijalnu jednačinu dobija se

$$\varphi(x)+\int_0^x x\,\varphi(t)\,dt+\int_0^x(x-t)\,\varphi(t)\,dt+1=0\ \text{ili}\ \varphi(x)=-1-\int_0^x(2x-t)\,\varphi(t)\,dt.$$

4020. $\varphi(x)=-x+\int_0^x(t-x)\,\varphi(t)\,dt.$ 4021. $\varphi(x)=1+\int_0^x\varphi(t)\,dt.$

4022. $\varphi(x)=\cos x-\int_0^x(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$ 4023. $\varphi(x)=\cos x-x-\int_0^x(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

4024. $\varphi(x)=5-6x+\int_0^x[5-6(x-t)]\,\varphi(t)\,dt.$

4025. $\varphi(x)=x-\sin x+e^{x}(x-1)+\int_0^x[\sin x-e^x(x-t)]\,\varphi(t)\,dt.$

4026. $\varphi(x)=\cos x-2x(1+x^2)-\int_0^x(1+x^2)\,(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

4027. $\varphi(x)=x\,e^x+1-x(x^2-1)-\int_0^x\left[x+\dfrac{1}{2}(x^2-x)\,(x-t)^2\right]\varphi(t)\,dt.$

3028. $\varphi(x)=x(x+1)^2+\int_0^x x(x-t)^2\,\varphi(t)\,dt.$

4029. Poznato je da je $\sin x\doteq\dfrac{1}{1+p^2},\ \cos x=\dfrac{p}{1+p^2}$. Ako se primeni Laplaceova transformacija i koristi teorema množenja (slika konvolucije) dobija se

$$\Phi(p)=\frac{1}{p^2+1}+\frac{2p}{p^2+1}\,\Phi(p),\ \Rightarrow\Phi(p)\left[1-\frac{2p}{p^2+1}\right]=\frac{1}{p^2+1}\ \text{ili}\ \Phi(p)=\frac{1}{(p-1)^2}\doteq x\,e^x.$$

Prema tome je rešenje date integralne jednačine $\varphi(x)=x\,e^x$.

4030. $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}(\cos x+\operatorname{ch}x).$ 4031. $\varphi(x)=1.$ 4032. $\varphi(x)=\cos 3x+\dfrac{1}{3}\sin 3x.$

4033. $\varphi(x)=x^3+\frac{x^5}{20}$. **4034.** $\varphi(x)=1+2x$

4035. $\varphi(x)=\frac{1}{3}\left(e^x-e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{x}{2}\sqrt{3}+\sqrt{3}\,e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{x}{2}\sqrt{3}\right)$.

4036. $\varphi(x)=-\frac{1}{16}-\frac{1}{8}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{1}{16}e^{2x}-\frac{1}{12}x^3$.

4037. $\varphi(x)=\frac{1}{2}e^{-x}+\frac{1}{6}e^x+\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{x}{2}\sqrt{3}-\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}\sqrt{3}\right)$.

4038. $\varphi(x)=e^x$; $\varphi(x)=x$. **4039.** $\varphi(x)=e^x+\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)$.

4040. 1° Za $\lambda<0\Rightarrow\varphi(x)=F(x)-\sqrt[n]{-\lambda\Gamma(n)}\int_0^x F(x-t)\,f\left(\sqrt[n]{-\lambda\Gamma(n)}\,t;\ 1,n\right)dt$, gde je $f(x,1,n)$, sinus reda n.

2° Za $\lambda>0\Rightarrow\varphi(x)=F(x)+\sqrt[n]{\lambda\Gamma(n)}\int_0^x F(x-t)\,h\left(\sqrt[n]{\lambda\Gamma(n)}\,t;\ 1,n\right)dt$, gde je $h\left(\sqrt[n]{\lambda\Gamma(n)}\,t;\ 1,n\right)$ prvi hiperbolički sinus reda n.

4041. Primenjujući Laplaceovu transformaciju na obe strane date jednačine dobija se

$$\frac{1}{p-1}\Phi(p)=\frac{1}{p^2},\ \Rightarrow\Phi(p)=\frac{p-1}{p^2}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}\doteqdot 1-x.$$ Otuda je $\varphi(x)=1-x$.

4042. $\varphi(x)=1+\frac{x^2}{2}$. **4043.** $\varphi(x)=\cos x-\sin x$. **4044.** $\varphi(x)=1-x\ln 3$.

4045. $\varphi(x)=n\,x^{n-1}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\ (n>0)$. **4046.** $\varphi(x)=1+2x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3$.

4047. $\varphi(x)=2\,x\,e^x+x^2\,e^x$. **4048.** $\varphi(x)=e^{\frac{x^2}{2}}(x^2+2)-1$. **4049.** $\varphi(x)=I_0(x)$.

4050. Prelazeći na transformaciju i koristeći teoremu konvolucije, dobijamo ($\Phi_1(p)\doteqdot u(x)$, $\Phi_2(p)=v(x)$):

$$\Phi_1'(p)=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p+1}\Phi_1(p)+\frac{1}{p^2}\Phi_2(p),\quad \Phi_2(p)=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2-1}\Phi_1(p)-\frac{1}{p-1}\Phi_2(p),$$

odakle je

$$\Phi_1(p)=\frac{p^2+p-1}{p(p-1)(p^2+1)},\quad \Phi_2(p)=\frac{p^3-p^2+1}{(p-1)(p+1)(p^2+1)}.$$

Sada nalazimo originale za $\Phi_1(p)$ i $\Phi_2(p)$:

$$u(x)=1+\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}\sin x-\frac{3}{2}\cos x;\quad v(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\operatorname{ch}x)-\sin x.$$

Funkcije $u(x)$ i $v(x)$ su tražena rešenja datog sistema jednačina.

4051. $u(x)=e^{2x}$; $v(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{2x}$.

4052. $u(x)=(x+2)\sin x+(2x+1)\cos x$; $v(x)=-\frac{1}{2}x\cos x-x\sin x+\frac{1}{2}\sin x$.

4053. $u(x)=2\,e^{-x}(1-x)$, $v(x)=e^{-x}(1-x)$.

4054. $u(x)=f(x)+\int_0^x (x-t)\,g(t)\,dt-\frac{1}{3!}\int_0^x (x-t)^3[f(t)+g(t)]\,dt$;

$$v(x)=g(x)-\int_0^x (x-t)\,f(t)\,dt-\frac{1}{3!}\int_0^x (x-t)^3[f(t)+g(t)]\,dt.$$

Glava XII

4055. 1° $A\subset BC$, tj. BC se dešava svaki put kada se dešava A;

2° $B\subset A$ i $C\subset A$, tj. A se realizuje uvek kada se realizuje ili B ili C.

4056. Događaj AB znači nastupanje događaja A i B, tj. od dva ispisana broja jedan je prost a drugi paran. Događaj $A+B$ znači nastupanje koga bilo događaja A ili B, tj. između dva napisana broja jedan je prost ili je drugi paran ili mogu biti istovremeno jedan prost a drugi paran.

4057. Ako se stavi $C=\bar A$ i $D=\bar B$ onda se druga jednakost može napisati u obliku $\overline{A+B}=\bar A\bar B$, tj. $A+B=\overline{\bar A\bar B}$. Prema tome dovoljno je dokazati ispravnost samo prve jednakosti. Neka događaj A znači pripadanje oblasti S_A, događaj B pripadanje oblasti S_B. Na osnovu usvojene konvencije pisanja događaja jasan je onda smisao događaja $\bar A$ i $\bar B$, kao i događaja $\bar A\bar B$ i $\overline{\bar A\bar B}$. Otuda je očigledno $\overline{\bar A\bar B}=A+B$.
Zadatak može da se reši i na drugi način. Događaj $\bar A\bar B$ znači nepojavljivanje događaja A i B. Suprotan događaj $\overline{\bar A\bar B}$ znači realizaciju događaja A ili događaja B, a to je ustvari događaj $A+B$. Otuda je $\overline{\bar A\bar B}=A+B$.

4058. $X=AB+\bar A D$, gde je D proizvoljan događaj.

4059. Po definiciji je $A+A=A$ i $AA=A$. **4060.** $B=A_6$, $C=A_5$.

4061. Ne ako je $S_1\neq S_2$. **4062.** $A+B=U$; $AB=V$.

4063. Izabrani broj se završava cifrom 5. **4064.** Događaj $\bar A$ znači da su svi proizvodi ispravni a događaj $\bar B$ da su svi proizvodi ispravni ili da je jedan od njih neispravan.

4065. 1° $(A+B)(B+C)=AB+AC+BB+BC=(A+B+C)B+AC=B+AC$;

2° $(A+B)(A+\bar B)=AA+AB+A\bar B+B\bar B=A$, pošto je $B\bar B=V$ — nemoguć događaj, $AA=A$, $AB+A\bar B=A(B+\bar B)=A$, $A+V=A$;

3° $(A+B)(A+\bar B)(\bar A+B)=A(\bar A+B)=AB$.

4066. 1° Neka A znači pripadanje oblasti S_A. Tada je $A+B=U$, tj. mora biti $A=V$, $B=U$;

2° neka AB znači pripadanje oblasti S_{AB} koja je zajednička i za S_A i za S_B. Tada je $AB=V$, tj. mora biti $A=U$, $B=V$; 3° mora biti $A=B$.

4067. $X=\bar B$. **4068.** Koristiti jednakost $\bar A=\bar A B+\bar A\bar B$.

4070. Ne, jer je $\overline{A+B+C}=\bar A\bar B\bar C$. **4072.** C — nerešen rezultat.

4073. 1° $X=\bar A B+AD$; 2° koristiti jednakost $(A+C)(B+C)=AB+C$. Rešenje je $X=\bar A\bar B C+ABD$, gde je D proizvoljan događaj.

4074. 1° Izabran je student koji ne stanuje u domu i ne puši. 2° Kada svi studenti stanuju u domu i ne puše. 3° Kada svi koji puše stanuju u domu. 4° Kada ni jedna devojka ne puši a svi mladići puše. Pretpostavlja se da mogu pušiti i devojke.

4078. 1° $AB=B$; 2° $A+B=AB=BA=B$; 3° $ABC=BC$; 4° $A+B+C=B+C$.

4081. $P(A_0B)=2r-p-q$; $P(A\bar B)=r-q$; $P(\bar A\bar B)=1-r$.

4085. 1° $B=A_1A_2A_3\ldots A_n$. Ostali slučajevi prepuštaju se čitaocu.

4086. 1° $B_{4,2}=A_1A_2\bar A_3\bar A_4+A_1\bar A_2A_3\bar A_4+A_1\bar A_2\bar A_3A_4+\bar A_1A_2A_3\bar A_4+\bar A_1A_2\bar A_3A_4+\bar A_1\bar A_2A_3A_4$.

2° U slučaju beskonačnog ponavljanja datog opita događaj A realizuje se najviše m puta.

3° Ispravne su.

4088. 1° $p=\dfrac{3}{10}$; 2° $p=\dfrac{7}{10}$. **4089.** Ukupan broj dobijenih kockica je $n=1\,000$. Pošto kocka ima dvanaest ivica dobija se za svaku od njih po osam kockica sa po dve obojene strane. Otuda je ukupan broj takvih kockica $m=12\cdot 8=96$, pa je verovatnoća $p=\dfrac{m}{n}=0{,}096$.

4090. Predstavimo broj N u obliku $N=a+10b+\cdots$, gde su $a, b, \ldots$, proizvoljni brojevi od 0 do 9 zaključno. Tada je $N^3=a^3+30a^2b+\cdots$. Otuda je jasno da na dve poslednje cifre mogu uticati samo a i b. Tako je broj mogućih vrednosti $n=100$. Kako je zadnja cifra broja N^3 jednaka jedan, to imamo jednu povoljnu vrednost $a=1$. Sem toga mora biti jedinica i zadnja cifra broja $\dfrac{N^3-1}{10}$, tj. mora se završavati jedinicom proizvod $3b$. To će biti samo onda kada je $b=7$. Na taj način povoljna je jedna jedina vrednost ($a=1$, $b=7$), pa je otuda $p=0{,}01$.

4091. Broj mogućih načina da se uzme m primeraka od mogućih n iznosi C_n^m. Povoljni slučajevi su kada je od ukupnog broja k neispravnih proizvoda uzeto l (to se može učiniti na C_k^l načina), a ostalih $m-l$ proizvoda su ispravni, tj. oni su uzeti od ukupnog broja $n-k$ (broj mogućnosti je C_{n-k}^{m-l}). Prema tome broj povoljnih slučajeva je $C_k^l\,C_{n-k}^{m-l}$. Tražena verovatnoća je $p=\dfrac{C_k^l\,C_{n-k}^{m-l}}{C_n^m}$.

4092. U ovom primeru zgodno je naći suprotnu verovatnoću q. Verovatnoća da svih šest komada ne sadrže šesticu iznosi $q=\dfrac{C_7^0\,C_{21}^5}{C_{28}^5}$. Pa pošto je $p+q=1$, biće

$$p=1-\frac{C_{21}^5}{C_{28}^5}=0{,}793.$$

4093. $p=\dfrac{rm}{n}$. **4094.** $p=\dfrac{n-k}{n+m-k}$.

4095. 1° 0,2; 2° 0,4; 3° 0,04. Mogu se posmatrati samo jednocifreni brojevi.

4096. $\dfrac{8\cdot 31}{10\cdot 9\cdot 8}=\dfrac{1}{15}$. **4097.** 0,3. **4098.** $p=\dfrac{C_n^s\,C_m^{k-s}}{C_{n+m}^k}$.

4099. 1° Verovatnoća suprotnog događaja iznosi $q=\dfrac{C_5^1\,C_3^1\,C_2^1}{C_{10}^3}$, pa je $p=1-q=1-\dfrac{C_5^1\,C_3^1\,C_2^1}{C_{10}^3}$;

2° $p=\dfrac{C_5^1\cdot C_2^1+C_3^2\,C_5^1}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{24}$.

4100. Broj mogućih slučajeva je $C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n-1$. Broj povoljnih slučajeva je

$$m=C_n^2+C_n^4+\cdots=\frac{1}{2}[(1+1)^n+(1-1)^n-2]=2^{n-1}-1;\quad p=\frac{2^{k-1}-1}{2^n-1}.$$

4101. $1-\dfrac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$. 4102. $p=\dfrac{C_4^1C_{32}^2}{C_{36}^3}=\dfrac{\dfrac{4}{1}\cdot\dfrac{32}{1}\cdot\dfrac{31}{1}}{\dfrac{36\cdot35\cdot34}{1\cdot2\cdot3}}=\dfrac{31\cdot16}{35\cdot3\cdot17}=\dfrac{496}{1785}=0{,}2778.$

4103. $q=\dfrac{C_{32}^3}{C_{36}^3}=0{,}6947\Rightarrow p\approx0{,}3053.$ 4104. $p=\dfrac{C_4^1\,C_4^1\,C_4^1}{C_{52}^3}=0{,}0029.$

4105. $p=\dfrac{C_{18}^9\cdot C_{18}^9}{C_{36}^{18}}=\dfrac{(18!)^4}{36!\,(9!)^4}$. Kako je na osnovu Stirlingove formule $n!\sim\sqrt{2n\pi}\;n^ne^{-n}$, imaćemo da je

$$18!\approx18^{18}e^{-18}\sqrt{2\pi18},$$
$$9!\approx9^9e^{-9}\sqrt{2\pi\cdot9},$$
$$36!\approx36^{36}e^{-36}\sqrt{2\pi\cdot36},$$

pa je $p=\dfrac{(\sqrt{2\pi18}\;18^{18}e^{-18})^4}{\sqrt{2\pi\cdot36}\;36^{36}\cdot e^{-36}(\sqrt{2\pi\cdot9}\;9^9e^{-9})^4}$. Nakon jednostavnih transformacija nalazimo $p\approx\dfrac{2}{\sqrt{18\pi}}\approx\dfrac{4}{15}\approx0{,}26.$

4106. 1° $\dfrac{C_{51}^5}{C_{52}^6}$; 2° $\dfrac{C_4^1(C_{13}^1)C_{13}^3+C_4^2(C_{13}^1C_{13}^2)^2}{C_{52}^6}$; 3° da bismo našli broj n treba rešiti nejednačinu $1-\dfrac{(C_4^1)^n\,C_{13}^n}{C_{52}^n}>\dfrac{1}{2}$. 4107. $p_n=\dfrac{C_4^n\sum\limits_{k=0}^{4-n}C_{4-n}^k\,2^k\cdot C_{44}^{13-k-2n}}{C_{52}^{13}}$.

4108. 1° $\dfrac{C_n^{2r}\;2^{2r}}{C_{2n}^{2r}}$; 2° $\dfrac{n\,C_{n-1}^{2r-2}\;2^{2r-2}}{C_{2n}^{2r}}$; 3° $\dfrac{C_n^2\;C_{n-2}^{2r-4}\;2^{2r-4}}{C_{2n}^{2r}}$.

4109. Razmotrimo kretanje tačke $u(l)$ po dvodimenzionalnoj celobrojnoj rešetki, definisano na sledeći način: $u(0)=(0,0)$, $u(l)=(M(l),\,N(l))$ za $0<l\leqslant m+n$. Očigledno da su sve trajektorije tačke u, koje vode iz tačke $(0,0)$ u tačku (m,n) jednako moguće. Ukupan broj takvih trajektorija je C_{m+n}^m. Obeležimo sa z broj trajektorija koje idu iz tačke $(0,0)$ u tačku (m,n) a koje imaju makar jednu zajedničku tačku sa pravom $y=x$ različitu od $(0,0)$. Tada je $p=1-\dfrac{z}{C_{m+n}^m}$. Da bismo našli z, primetimo da između skupa trajektorija koje spajaju tačke $(1,0)$ i (m,n) i skupa a imaju makar jednu zajedničku tačku sa pravom $y=x$, možemo uspostaviti uzajamno jednoznačnu korespondenciju. Radi toga je dovoljno korespondirati svakoj trajektoriji koja polazi iz $(1,0)$, onu trajektoriju, koja polazi iz $(0,1)$, koja se dobija iz prve ogledanjem u odnosu na pravu $x=y$ odsečka prve trajektorije od tačke $(1,0)$ do prve tačke koja je zajednička sa pravom $y=x$. Sada je lako naći z.

$$z=2\,C_{n+m-1}^n;\quad p=\frac{n-m}{n+m}.$$

4111. Razmotriti zadatak u kome se nasumice iz brojeva $1,2,\ldots,n$ izabira jedan broj. Odrediti verovatnoću da taj broj bude uzajamno prost sa n.

4112. Rešenje ovog zadatka bazira na sledećoj lemi. Uvek postoji C_{n+r-1}^r različitih načina da se razmesti r istih objekata u n ćelija.

Dokaz. Predstavimo ćelije kao intervale između $(n+1)$ crte, a kao objekte uzmimo slovo A. Simbol $|AA||A|||AAAA|$ označava da svega ima 6 ćelija i 7 objekata, pri čemu u prvoj ćeliji dva objekta, u trećoj jedan objekat, u šestoj ćeliji —4, dok su ćelije druga, četvrta i peta prazne. Raspored objekata po ćelijama je fiksiran, pošto su naznačena mesta na kojima stoje slova. Primećujemo da slova mogu stajati na $n+r-1$ mestu, pa prema tome broj različitih razmeštaja iznosi C_{n+r-1}^r. Ovaj problem igra važnu ulogu u savremenoj statističkoj fizici, i u zavisnosti od toga, kako se obrazuje potpuna grupa jednako verovatnih događaja, dolazi se do različitih fizičkih statistika: Bolcmana, Boze-Einsteina, Fermi-Diracha. Odgovarajuće verovatnoće su respektivno:

$$p_1=\frac{n!}{N^n},\qquad p_2=\frac{N!}{N^n\,(N-n)!},$$

$$p_1=\frac{n!\,(N-1)!}{(n+N-1)!},\qquad p_2=\frac{N!\,(N-1)!}{(N-n)!\,(N+n-1)!},$$

$$p_1=\frac{(N-n)!\;n!}{N!},\qquad p_2=1.$$

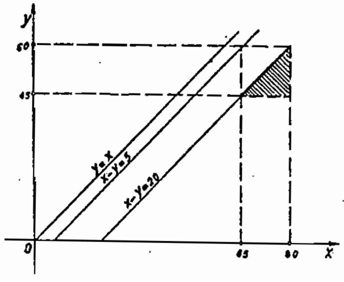
4114. $n^{-k}\,C_n^r\,[C_r^0r^k-C_r^1(r-1)^k+C_r^2(r-2)^k-\cdots(-1)^{r-1}C_r^{r-1}1^k]$.

4116. C_{n+r-1}^r. Rešenje problema bazira na istoj lemi na kojoj i zad. 4112.

4123. 1° $\dfrac{1}{a^2}(a-2r)^2$; 2° $1-4\left(\dfrac{r}{a}\right)^2$.

4124. Neka su x i y koordinate početka zapisa, pri čemu je $x>y$. Kako je $0<x<180$, $0<y<180$ i $x>y$, onda je oblast mogućih vrednost x i y trougao sa katetama dužine 180 m. Površina toga trougla je $S=\dfrac{1}{2}\,180^2\text{ m}^2$. Nađimo sada oblast povoljnih vrednosti x i y. Radi toga, da bi se dobio neprekidan zapis, potrebno je da bude zadovoljena nejednakost $x-y>5$ m. Sem toga, da bi se dobio neprekidan zapis na intervalu od 60 do 85 m mora biti

$$45\text{ m}<y<60\text{ m};\quad 65\text{ m}<x<80\text{ m}.$$



Sl. 85

Povoljna oblast nalazi se u šrafiranom trouglu (sl. 85), čija je površina $S_p=\dfrac{1}{2}\,15^2\text{ m}^2$. Tražena verovatnoća jednaka je odnosu površine oblasti S_p i površine oblasti S svih mogućih vrednosti x i y, tj.

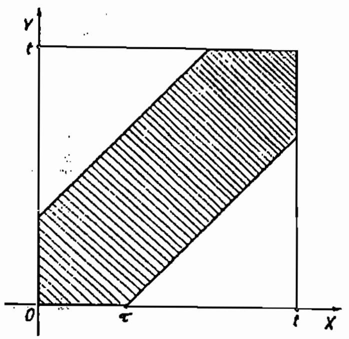
$$p=\left(\frac{15}{180}\right)^2=\frac{1}{144}.$$

4125. Neka su x i y momenti prispevanja signala u prijemnik. Oblast mogućih vrednosti je kvadrat čija je površina t^2, sl. 86. Prijemnik će biti zapušen ako je $|x-y|<\tau$. Data oblast leži između pravih $x-y=\tau$ $x-y=-\tau$. Njena površina je

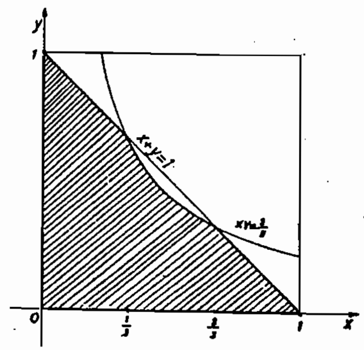
$$S_p=S-(t-\tau)^2.$$

Otuda je $p=1-\left(1-\frac{\tau}{T}\right)^2$. **4126.** 1° $\left(\frac{r}{d}\right)^2$; 2° $\frac{2a}{\pi}$.

4127. Neka su x i y uzeti razlomci. Njihove moguće vrednosti su $0<x<1$, $0<y<1$, što u ravni odgovara kvadratu površine $S=1$. Povoljne vrednosti su $x+y<1$ i $xy<\frac{2}{9}$. Granica $x+y=1$ deli kvadrat napola, pri čemu oblast $x+y<1$ predstavlja trougao ispod prave, sl. 87. Druga granica je hiperbola $xy=\frac{2}{9}$. Apscise presečnih tačaka su



Sl. 86



Sl. 87

$x=\frac{1}{3}$ i $y=\frac{2}{3}$. Na taj način drugi uslov takođe umanjuje povoljnu oblast, čija je površina

$$S_p=\frac{1}{3}+\int_{1/3}^{2/3} y\,dx=\frac{1}{3}+\int_{1/3}^{2/3}\frac{dx}{x}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\ln 2.$$

Tako je tražena verovatnoća $p=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\ln 2$. **4128.** $p=1-\frac{l}{L}$.

4129. 2° 1) $1-(1-z)^2$; 2) $z(1-\ln z)$; 3) $1-(1-z)^2$; 4) z^2; 5) za $z<\frac{1}{2}$, $2z^2$; za $z>\frac{1}{2}$; $1-2(1-z)^2$. **4130.** 0,134. **4131.** $p=\frac{s}{\pi a}$ gde je $2s$ perimetar mnogougaonika.

4132. $1-\left(1-\frac{2r+d}{a}\right)\left(1-\frac{2r+d}{b}\right)$. **4133.** Za $0<x<k$ i $\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{l}<y<\operatorname{arc\,tg}\frac{k}{l}$;

$P(h<x,\ a<y)=\frac{x}{kl}(2l-x\operatorname{ctg} y)$. Za $0<x<k$ i $0<y<\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{l}$; $P(h<x,\ a<y)=\frac{l\operatorname{tg} y}{k}$.

4134. 1° 0,0185; 2° $p=\frac{160+25\pi}{1000\pi}=0{,}076$.

4135. Neka su dva odsečka x i y. Moguće vrednosti su $0<x+y<l$. Povoljne vrednosti su $x<\frac{l}{2}$, $y<\frac{l}{2}$, $x+y>\frac{l}{2}$; $p=\frac{1}{4}$.

4136. $x=AL$, $y=AM$. Moguće vrednosti su $0<x+y<l$, a povoljne $|y-x|<x$; $p=0{,}75$.

4137. $AM=x$, $MN=y$. Moguće vrednosti su $0<x+y<l$, a povoljne $x<a$, $y<a$, $x+y>l-a$.

Za $\frac{l}{3}<a<\frac{l}{2}\Rightarrow p=\left(1-\frac{3a}{l}\right)^2$. za $\frac{l}{2}<a<l\Rightarrow p=1-3\left(1-\frac{a}{l}\right)^2$.

4138. Neka su x i y dva luka. Moguće vrednosti su $0<x+y<2\pi R$, a povoljne $x<\pi R$, $y<\pi R$, $x+y>\pi R$, $p=\frac{1}{4}$.

4139. Neka su x, y, z odsečci. Moguće vrednosti su $0<x$; y; $z<l$, a povoljne $x+y>z$, $x+z>y$, $y+z>x$; $p=\frac{1}{2}$.

4140 Neka su x i y vremena dolaska brodova. Moguće vrednosti su: $0<x<24$; $0<y<24$; a povoljne $y-x<1$; $x-y<2$; $p=0{,}121$. **4141.** $p=1-\left(1-\frac{t}{T}\right)^2$.

4142. $p=\frac{2\pi(1-\cos\alpha)R^2}{4\pi R^2}=\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

4143. $p=\left(R^2\int_0^{2\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/3}\cos\varphi\,d\varphi\,d\psi\right):\left(2R^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\cos\varphi\,d\varphi\,d\psi\right)=0{,}21$

4144. Neka je x rastojanje od sredine igle do bliže linije, a φ ugao između linije i igle. Moguće vrednosti su $0<x<\frac{d}{2}$, $0<\varphi<\pi$, a povoljne $x<\frac{l}{2}\sin\varphi$; $p=\frac{2l}{d\pi}$.

4145. Moguće vrednosti su $|a|<n$, $|b|<m$; 1° povoljne vrednosti su $b<a^2$. Za $m>n^2\Rightarrow$
$p=\frac{1}{2}+\frac{1}{2nm}\int_0^n a^2\,da=\frac{1}{2}+\frac{n^2}{6m}$.

Za $m<n\Rightarrow p=1-\frac{1}{2nm}\int_0^n\sqrt{b}\,db=1-\frac{\sqrt{m}}{3n}$. Koreni će biti pozitivni ako je $a<0$, $b>0$.

Za $m>n^2\Rightarrow p=\frac{n^2}{12m}$; za $m<n^2\Rightarrow p=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{m}}{6n}$. 2° Koreni jednačine biće realni ako je $b^2+a^3<0$, Povoljna oblast vrednosti koeficijenata je $a<0$, $b^2<-a^3$. Za $n^3<m^2\Rightarrow p=$
$=\frac{1}{2mn}\int_0^n a^{3/2}\,da=\frac{n^{3/2}}{5m}$. Za $n^3>m^2\Rightarrow p=\frac{1}{2}-\frac{1}{2nm}\int_0^m b^{2/3}\,db=\frac{1}{2}\left(1-0{,}6\frac{m^{2/3}}{n}\right)$.

4146. Potrebno je razlikovati nekoliko slučajeva. 1° $|\beta| \geqslant \varepsilon + \frac{\pi}{2} \Rightarrow p = 0$. 2° $\frac{\pi}{2} + \varepsilon > |\beta| > \varepsilon$

1) za $u \leqslant v \sin(|\beta| - \varepsilon) \Rightarrow p = 0$;

2) za $v \sin(|\beta| - \varepsilon) \leqslant u < v \sin(|\beta| + \varepsilon) \Rightarrow p = \frac{1}{\pi} \arccos\left[\frac{v}{u} \sin(|\beta| - \varepsilon)\right]$;

3) za $u \geqslant v \sin(|\beta| + \varepsilon) \Rightarrow p = \frac{1}{\pi}\left\{\arccos\left[\frac{v}{u} \sin(|\beta| - \varepsilon)\right] - \arccos\left[\frac{v}{u} \sin(|\beta| + \varepsilon)\right]\right\}$.

3° $|\beta| < \varepsilon$ 1) za $u < v \sin(\varepsilon - |\beta|) \Rightarrow p = 1$; 2) za $v \sin(\varepsilon - |\beta|) < u < v \sin(\varepsilon + |\beta|) \Rightarrow p = 1 - \frac{1}{\pi} \arccos\left[\frac{v}{u} \sin(\varepsilon - |\beta|)\right]$; 3) za $u > v \sin(\varepsilon + |\beta|) \Rightarrow p = 1 - \frac{1}{\pi}\left\{\arccos\left[\frac{v}{u} \sin(\varepsilon - |\beta|)\right] + \arccos\left[\frac{v}{u} \sin(\varepsilon + |\beta|)\right]\right\}$, $\left(\varepsilon = \arcsin \frac{R}{\pi}\right)$.

4147. U zavisnosti od toga kako se pristupa rešavanju problema verovatnoće su: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$.

4148. Tražena verovatnoća jednaka je verovatnoći da ne ispadnu iz stroja sva tri elementa. Neka događaj A_k znači da k-ti elemenat neće ispasti iz stroja ($k = 1, 2, 3$). Tada je $p = P(A_1 A_2 A_3)$. Pošto su događaji nezavisni, biće

$$p = P(A_1) P(A_2) P(A_3) = 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}168.$$

Ako nedostaje prvi elemenat, onda je $p = P(A_2 A_3) = 0{,}24$.

4149. Neka događaj A znači da je izabrani proizvod ispravan, a događaj B da je izabrani proizvod prvoklasan. Otuda je $P(A) = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$, $P(B/A) = 0{,}75$. Tražena verovatnoća je $p = P(AB) = 0{,}96 \cdot 0{,}75 = 0{,}72$.

4150. Nađimo verovatnoću suprotnog događaja A, koji znači da je partija proizvoda upotrebljiva. Dati događaj je proizvod pet događaja $A = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$, gde A_k ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) znači da je k-ti provereni proizvod ispravan. Verovatnoća događaja A_1 je $p(A_1) = \frac{95}{100}$, pošto je 95 proizvoda ispravno a svega ih ima 100. Nakon realizacije događaja A_1 ostaje 99 proizvoda od kojih su 94 ispravna, pa je otuda $P(A_2/A_1) = \frac{94}{99}$. Analogno je

$$P(A_3/A_1 A_2) = \frac{93}{98}, \quad P(A_4/A_1 A_2 A_3) = \frac{92}{97} \quad \text{i} \quad P(A_5/A_1 A_2 A_3 A_4) = \frac{91}{96}.$$

Po opštoj formuli nalazimo

$$q = \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99} \cdot \frac{93}{98} \cdot \frac{92}{97} \cdot \frac{91}{96} = 0{,}77.$$

Konačno, tražena verovatnoća je $p = 1 - q = 0{,}23$.

4151. Razmotrimo događaje:

A_0 — dobija najmanje 20 hiljada;

A_1 — dobija 20 hiljada;

A_2 — dobija 100 hiljada;

A_3 — dobija 500 hiljada.

Očigledno je $A = A_1 + A_2 + A_3$. Na osnovu teoreme o zbiru verovatnoća dobijamo

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0{,}050 + 0{,}010 + 0{,}001 = 0{,}661.$$

4152. $p = 1 - (1 - 0{,}7)(1 - 0{,}8) = 0{,}94$.

4153. $p = 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - p_k)$.

4154. $1 - 0{,}5^n > 0{,}9$; $n > 4$.

4155. $p = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right)\left(1 - \frac{1}{7^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{11^2}\right) \cdots = \frac{6}{\pi^2}$.

4156. Neka A znači događaj da su izvučene dve bele kuglice. Događaj A je proizvod dva događaja $A = A_1 A_2$ gde događaj A_1 znači pojavu bele kuglice pri prvom vučenju, događaj A_2 pojavu bele kuglice u drugom vučenju. Na osnovu teoreme množenja verovatnoća biće $P(A) = P(A_1) P(A_2/A_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0{,}1$.

4157. U datom slučaju događaji A_1 i A_2 su nezavisni pa je $P(A) = P(A_1) P(A_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = 0{,}16$.

4158. Razmotrimo sledeće događaje:

A — pribor neće otkazati;

A_1 — prvi deo će funkcionisati;

A_2 — drugi deo će funkcionisati;

A_3 — treći deo će funkcionisati.

Tada je $A = A_1 A_2 A_3$, odakle je na osnovu teoreme o množenju nezavisnih događaja

$$P(A) = P(A_1) P(A_2) P(A_3) = p_1 p_2 p_3 = 0{,}504.$$

4159. Iz nespojivosti događaja sledi da je $P(A/B) = 0$ i $P(B/A) = 0$, što znači da su događaji zavisni.

4161. $\frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23}$.

4162. $1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3$.

4163. $\frac{C_5^2}{C_6^3}$.

4165. $p = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{360}$.

4166. Poći ćemo od suprotnog događaja A, koji znači da su sve bombe upotrebljene. Da bi se to desilo mora drugi avion upotrebiti i zadnju bombu, tj. prvih pet bačenih bombi nisu pogodile cilj: $P(\bar{A}) = 0{,}7^3 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}123$ odakle je $P(A) = 1 - 0{,}123 = 0{,}877$.

4167. Nije.

4168. $p = 2 \cdot \frac{n}{2n} \cdot \frac{n}{2n-1} \cdot \frac{n-1}{2n-2} \cdot \frac{n-1}{2n-3} \cdots \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{2(n!)^2}{(2n)!}$.

4169. $p = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdots \frac{1}{[n-(k-1)]} = \frac{(n-k)!}{n!}$.

4170. $p = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{99}{100} = \frac{100!}{2^{100}(50!)^2} \approx 0{,}08$.

4171. Prva izvučena ceduljica mora biti data za prvog kandidata. Verovatnoća toga događaja je $\frac{n}{m+n}$. Dalje, izvlačenje ceduljica mora ići takvim redom, da izvučenih ceduljica datih za prvog kandidata ne bude manje od izvučenih ceduljica za drugog kandidata. Verovatnoća toga događaja iznosi $\frac{n-m}{n}$. Konačno je

$$p = \frac{n}{m+n} \cdot \frac{n-m}{n} = \frac{n-m}{n+m}.$$

4172. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$, kupci koji imaju petodinarke, a $b_1, b_2, \ldots, b_m$, kupci koji ~~imaju po deset dinara, pri čemu indeksi znače~~ i njihov redosled u redu za karte. Događaj A_k znači uzimanje karte samo iza kupaca b_k $(k=1, 2, \ldots, m)$;

$$p=\prod_{k=1}^{m} P(\bar{A}_k)=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-m+1}{n-m+2}=\frac{n-m+1}{n+1}.$$

4176. Obeležimo sa A događaj koji znači da u pedeset uzetih primeraka neće biti nijedan neispravan, a sa B događaj koji znači da među njima postoji samo jedan neispravan primerak. Tražena verovatnoća je $p=p(A+B)$. Pošto su događaji A i B nespojivi biće $p=p(A)+p(B)$. Iz njih sto možemo uzeti pedeset na C_{100}^{50} načina. Iz 95 ispravnih proizvoda 50 možemo izabrati na C_{95}^{50} načina. Tako je $p(A)=\dfrac{C_{95}^{50}}{C_{100}^{95}}$. Analogno je $p(B)=\dfrac{C_5^1 C_{95}^{49}}{C_{100}^{50}}$. Konačno je $p=\dfrac{C_{95}^{50}}{C_{100}^{50}}+\dfrac{C_5^1 C_{95}^{49}}{C_{100}^{50}}=\dfrac{47\cdot 37}{99\cdot 97}=0{,}181.$

4177. Razmotrimo događaje:

A — razorena skladišta;

A_1 — pogodak u prvo skladište;

A_2 — pogodak u drugo skladište;

A_3 — pogodak u treće skladište.

Očigledno je, $A=A_1+A_2+A_3$. Pošto su u slučaju bacanja jedne bombe događaji A_1, A_2, A_3 nespojivi, to je $p(A)=p(A_1)+p(A_2)+p(A_3)=0{,}01+0{,}008+0{,}025=0{,}043.$

4178. 1° Označimo sa A_j $(j=1{,}2)$ događaj, koji se sastoji u ispadanju iz stroja elementa K_j $(j=1{,}2)$. Tražena verovatnoća je $p(A)=P(A_1+A_2)$. Pošto su događaji A_1 i A_2 nezavisni biće $P(A)=p(A_1)+p(A_2)-p(A_1)\,p(A_2)=0{,}6+0{,}5-0{,}6\cdot 0{,}5=0{,}8$
2° Neka događaj B znači da je kolo prekinuto usled ispadanja iz stroja sva tri elementa l_j $(j=1, 2, 3)$. Tada je $p=P(A+B)=p(A)+p(B)-p(A)\,p($ $)$. Kako je $P(A)=0{,}8$, $P(B)=0{,}4\cdot 0{,}7\cdot 0{,}9=0{,}252$, to je $p\approx 0{,}85$.

4179. Verovatnoća p pojave događaja za vreme T jednaka je verovatnoći $\dfrac{t}{T}p$ realizacije datog događaja za vreme t plus proizvod verovatnoće $\left(1-\dfrac{t}{T}p\right)$ da se događaj nije desio za vreme t i uslovne verovatnoće P pojave događaja u ostatku vremena, ako se ranije nije desio. Otuda važi jednakost $p=\dfrac{t}{T}p+\left(1-\dfrac{t}{T}p\right)P$. Tako nalazimo $p=\dfrac{p\left(1-\dfrac{t}{T}\right)}{1-\dfrac{t}{T}p}$.

4180. Razmotrimo događaj A koji označava da je meta samo jedanput pogođena. Taj događaj može se realizovati na nekoliko načina, tj. raspada se na nekoliko nezavisnih varijanti: pogodak može biti ostvaren prvim gađanjem, pod uslovom da se pri drugom i trećem gađanju promaši; ili pogodak u drugom a promašaj u prvom i trećem gađanju; ili pogodak u trećem a promašaj u prvom i drugom gađanju. Otuda je

$$A=A_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3,$$

gde su A_1, A_2, A_3 — pogoci pri prvom, drugom i trećem gađanju. Primenjujući teoreme o zbiru i množenju verovatnoća i koristeći svojstvo suprotnih događaja, nalazimo:

$$P(A)=P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=$$
$$=0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3+0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3+0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7=0{,}36.$$

4181. Razmotrimo događaj B koji znači da je meta makar jedanput pogođena. Koristeći isti postupak kao i u prethodnom zadatku, i iste oznake, možemo predstaviti događaj B u obliku zbira nespojivih varijanti:

$$B=A_1A_2A_3+A_1A_2\bar{A}_3+A_1\bar{A}_2A_3+\bar{A}_1A_2A_3+A_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3.$$

Zatim, naći verovatnoću svih tih varijanti, na osnovu teoreme o množenju verovatnoća, pa sve te verovatnoće sabrati. Međutim takav način rešavanja je i suviše složen radi čega je podesnije mesto događaja B tražiti suprotan događaj $\bar{B}$, koji znači da meta ne bude ni jedanput pogođena. Očigledno je $\bar{B}=\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$. Na osnovu teoreme množenja biće $P(\bar{B})=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3=0{,}09$, odakle je $P(B)=1-P(\bar{B})=1-0{,}09=0{,}91.$

4182. Razmotrimo događaje: A — oboren bombarder, B — oboren lovac. Očigledno je $A=A_1+A_2$, gde A_1 znači da je bombarder oboren u prvom naletu lovca, a A_2 — oboren bombarder u drugom naletu lovca. Na osnovu uslova je $P(A_1)=0{,}2$. Događaj A_2 je složen događaj. Da bi bombarder bio oboren tek u drugom naletu lovca, neophodna je realizacija tri događaja: da lovac ne obori bombardera u prvom naletu, da bombarder ne obori lovca i da lovac obori bombardera pri drugom naletu. Na osnovu teoreme o množenju verovatnoća dobija se $P(A_2)=0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}4=0{,}224$; otuda je $P(A)=P(A_1)+P(A_2)=0{,}424$. Da bi se desio događaj B treba da se dese dva događaja: da lovac ne obori bombardera u prvom napadu i da bombarder obori lovca uzvraćajući vatrom. Na osnovu teoreme o množenju verovatnoća biće $P(B)=0{,}8\cdot 0{,}3=0{,}24.$

4183. Neka A znači uništenje aviona; $P(A/2)$ — verovatnoću da je avion uništen pod uslovom da su ga pogodile dve granate. Dve granate koje pogode avion mogu da ga obore na sledeći način: ako ga jedna pogodi u prvi deo, ili da ga obadve pogode u drugi deo. Verovatnoća da će makar jedna od dve granate pasti na prvi deo može biti izračunata pomoću verovatnoće suprotnog događaja (da nijedna granata ne padne na prvi deo), koja iznosi $1-0{,}9^2$. Verovatnoća da će obe granate pasti na prvi deo iznosi $0{,}2^2$. Otuda je $P(A/2)=1-0{,}9^2+0{,}2^2=0{,}23.$

4184. U dotičnom slučaju prostije je preći na suprotan događaj — da avion ne bude uništen sa tri pogotka. Taj događaj se može desiti samo u slučaju kada dve, od tri granate, padnu na treći deo, a jedna na drugi deo. Takvih mogućnosti ima tri (onoliko na koliko načina možemo između tri granate, koje padnu na avion, izabrati dve koje su ga pogodile u treći deo). Prema tome je $P(\bar{A}/3)=3\cdot 0{,}7^2\cdot 0{,}2=0{,}294$, odakle je $P(A/3)=1-0{,}294=0{,}706.$

4185. Označimo sa C izbacivanje aviona iz stroja. Očigledno je $C=M+L$, gde M znači uništenje oba motora a L uništenje pilota. Dalje je $M=M_1M_2$ gde M_1 znači uništenje prvog motora a M_2 — uništenje drugog motora. Pošto su događaji M i L spojivi to je izračunavanje verovatnoće događaja C neposredno, po teoremi o zbiru verovatnoća, nemoguće. Radi toga prelazimo na suprotan događaj $\bar{C}$ — da avion nije uništen. Očigledno je $\bar{C}=\bar{M}\bar{L}$. Ako pretpostavimo da, pri datoj tački eksplozije, motori bivaju uništeni nezavisno jedan od drugoga, onda je $P(\bar{C})=P(\bar{M})P(\bar{L})$. Tako imamo $P(\bar{M})=1-P(M)=1-P(M_1)P(M_2)$, odakle je $P(\bar{C})=[1-P(M_1)P(M_2)]\,P(\bar{L})$. Saglasno uslovima zadatka dobija se $P(M_1)=P(M_2)=0{,}2$; $P(\bar{L})=1-P(L)=0{,}7$, odakle je $P(C)=1-P(\bar{C})=1-0{,}672=0{,}328.$

4186. Ako sa A obeležimo promašaj, onda $\bar{A}$ znači pogodak. Tada je $\bar{A}=\bar{A}_1+\bar{A}_2+\bar{A}_3$, gde su $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$, pogoci respektivno u prvu, drugu i treću zonu. $P(\bar{A})=P(\bar{A}_1)+P(\bar{A}_2)+P(\bar{A}_3)=0{,}15+0{,}23+0{,}17=0{,}55$, odakle je $P(A)=1-P(\bar{A})=0{,}45$. $p=0{,}991$.

4188. Neka je P_1 verovatnoća da će bela kuglica biti izvučena pre crne, a P_2 verovatnoća da će crna kuglica biti izvučena ranije od bele. Verovatnoća P_1 jednaka je zbiru verovatnoća izvlačenja bele kuglice odmah iza jedne crvene, dve crvene itd. Na taj način, možemo pisati, za slučaj kada se kuglice ne vraćaju,

$$P_1=\frac{n}{n+m+l}+\frac{l}{n+m+l}\cdot\frac{n}{n+m+l-1}+\frac{l}{n+m+l}\times\frac{l-1}{n+m+l-1}\cdot\frac{n}{n+m+l-2}+\cdots,$$

a u slučaju vraćanja kuglica

$$P_1=\frac{n}{m+n+l}+\frac{ln}{(n+m+l)^2}+\frac{l^2n}{(n+m+l)^3}+\cdots=\frac{n}{n+m}.$$

Analogna jednakost važi i za verovatnoću P_2, koja se, što nije teško videti, dobija iz P_1 množenjem sa $\frac{m}{n}$. Otuda je $P_2=\frac{m}{n}P_1$. Kako je sem toga $P_1+P_2=1$ to je tražena verovatnoća $P_1=\frac{n}{m+n}$.

4189. Neka A_k znači da je na k-om pismu ispisana tačna adresa $(k=1, 2, \ldots, n)$. Tražena verovatnoća je $p=P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right)$. Pošto su događaji A_k spojivi to za proizvoljne $k, j, l, \ldots,$ važe jednakosti $P(A_k)=\frac{1}{n}$, $P(A_k A_j)=P(A_k)P(A_j/A_k)=\frac{1}{n}\frac{1}{n-1}=\frac{(n-2)!}{n!}$,

$P(A_k A_j A_l)=\frac{(n-3)!}{n!}$ itd. $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)=\frac{1}{n!}$.

Nakon uprošćavanja formule za verovatnoću zbira događaja dobijamo

$$p=C_n^1\,n-C_n^2\,\frac{(n-2)!}{n!}+C_n^3\,\frac{(n-3)!}{n!}-\cdots+(-1)^{n-1}.\frac{1}{n}$$

ili

$$p=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{n-1}.\frac{1}{n}.$$

Za veliko n biće $p\approx 1-e^{-1}$.

4190. 0,03. **4191.** $p_k=\sum_{j=1}^{n} p_{kj}$. **4192.** $\frac{11}{26}$. **4193.** $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$.

4194. $P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)=[P(A)+P(\overline{A})]\,P(B/A)=P(B/A)$. **4196.** 1° $\frac{1}{3}$; 2° $\frac{5}{6}$.

4197. Neka A označava da je izvučena ceduljica sa jednakim zbirom, B — druga.
1° $P(A+B)=2P(A)=0{,}1105$; 2° $P(A+B)=2P(A)-P^2(A)=0{,}1075$.

4198. Iz $P(A+B)<1 \Rightarrow P(B)-P(AB)<P(\overline{A})$ ili $P(A/B)=1-\frac{P(\overline{A})}{P(B)}=\frac{a+b-1}{b}$.

4199. Iz $Z=X+Y \Rightarrow Z<X+|Y|$, $Z>X-|Y|$, $P(Z<1)>P(X<10, |Y|<1)=P(X<10)+P(|Y|<1)-P(X<10$ ili $|Y|<1)>0{,}9+0{,}95-1=0{,}85$, $P(Z>9)>0{,}05$, $P(Z<9)<0{,}95$.

4200. $p=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$. **4201.** $p_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\cdots=\frac{2}{3}$, $p_2=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots=\frac{1}{3}$. Na drugi način biće: $p_1+p_2=1$, $p_2=\frac{1}{2}p_1$, tj. $p_1=\frac{2}{3}$, $p_2=\frac{1}{3}$.

4202. $p_1+p_2=1$, $p_1=\frac{m}{m+n}=p_2$, $p=p_1=\frac{n+m}{n+2m}$. **4206.** $p=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}$.

4207. Ulog se deli proporcionalno odnosu p_1/p_2 verovatnoća pobede prvog i drugog igrača,

$$p_1=\frac{1}{2^m}\left(1+\frac{1}{2}\,C_m^1+\frac{1}{2^2}\,C_{m+1}^2+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\,C_{m+n-2}^{n-1}\right),$$

$$p_2=\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{2}\,C_n^1+\frac{1}{2^2}\,C_{n+1}^2+\cdots+\frac{1}{2^{m-1}}\,C_{m+n-2}^{m-1}\right).$$

4208. Neka događaj A znači da je prvi rekao istinu, a događaj B da je četvrti kazao istinu. Neka je p_k verovatnoća da je k-ti lažov preneo tačnu informaciju

$p_1=\frac{1}{3}$, $p_2=\frac{5}{9}$, $p_3=\frac{13}{27}$, $p_4=\frac{41}{81}$; $p=P(A/B)=\frac{P(A)\,P(B/A)}{P(B)}$, $P(A)=p_1$,

$p_3=P(B/A)$, $p_4=P(B)$; $p=\frac{13}{41}$.

4209. Označimo sa A_k događaj koji se sastoji u tome da se izvuče ceduljica koja dobija, nakon k izvlačenja. Na osnovu ishoda prethodnih opita možemo postaviti $k+1$ hipotezu. Neka hipoteza H_{ks} znači da je među k izvučenih ceduljica bilo s koje dobijaju. Verovatnoća tih hipoteza je

$$P(H_{ks})=\frac{C_m^s\,C_{n-m}^{k-s}}{C_n^k},\quad (s=0, 1, \ldots, k)$$

pri čemu je $P(H_{ks})=0$, ako je $s>m$. Pošto je ostalo $n-k$ ceduljica, od kojih $m-s$ koje dobijaju, to je za $m>s$

$$p(A_k/H_{ks})=\frac{m-s}{n-k}.$$

Na osnovu formule totalne verovatnoće nalazimo

$$P(A_k)=\sum_{s=0}^{k}\frac{C_m^s\,C_{n-m}^{k-s}}{C_n^k}\,\frac{m-s}{n-k},\ \text{smatrajući } C_s^m=0 \text{ za } s>m.$$

Dobijena jednačina može se napisati u obliku

$$P(A_k)=\frac{m}{n}\sum_{s=0}^{k}\frac{C_{m-1}^s\,C_{n-m}^{k-s}}{C_{n-1}^k}.$$

Dalje imamo

$$\sum_{s=0}^{k} C_{m-1}^s\,C_{n-m}^{k-s}\,x^{n-k-1}=\frac{1}{k!}\sum_{s=0}^{k} C_k^s\,\frac{d^s x^{m-1}}{dx^s}\cdot\frac{d^{k-s}x^{n-m}}{dx^{k-s}}=\frac{1}{k!}\frac{d}{dx^k}\,(x^{m-1}\,x^{n-m})=$$

$$=\frac{1}{k!}\,\frac{d^k x^{n-1}}{dx^k}=C_{n-1}^k\,x^{n-k-1}$$

tj. ispravna je jednakost

$$\sum_{s=0}^{k} C_{m-1}^s\,C_{n-m}^{k-s}=C_{n-1}^k$$

Prema tome je tražena verovatnoća $p(A_k)=\frac{m}{n}$, za proizvoljno k. Otuda se izvlači zaključak, da svi igrači imaju iste šanse, te tako poredak izvlačenja ne igra nikakvu ulogu.

4210. Razmotrimo tri hipoteze:

H_1 — izbor prve kutije;

H_2 — izbor druge kutije;

H_3 — izbor treće kutije,

i događaj A koji znači pojavu bele kuglice. Pošto su hipoteze, prema uslovu zadatka, jednako moguće, to je $P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}$. Uslovne verovatnoće događaja A, uz ove pretpostavke, iznose respektivno $P(A/H_1)=\frac{2}{3}$; $P(A/H_2)=\frac{3}{4}$; $P(A/H_3)=\frac{1}{2}$.

Na osnovu formule totalne verovatnoće biće $P(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{23}{36}$.

4211. Neka događaj A znači izvlačenje obeležene kuglice. Hipoteze su: H_1— da se kuglica nalazi u prvoj kutiji. H_2— da se nalazi u drugoj kutiji. Po uslovu je $P(H_1)=p$, $P(H_2)=1-p$. Pretpostavimo da je iz prve kutije izvučeno m a iz druge $n-m$ kuglica. Uslovne verovatnoće izvlačenja obeležene kuglice $P(A/H_1)=1-(1-P)^m$, $P(A/H_2)=1-(1-P)^{n-m}$. Na osnovu formule totalne verovatnoće dobija se $P(A)=p[1-(1-P)^m]+(1-p)[1-(1-P)^{n-m}]$. Sada je potrebno odrediti m tako da verovatnoća $P(A)$ bude najveća. Diferencirajući $P(A)$ po m dobijamo

$$\frac{dP(A)}{dm}=-p(1-P)^m\ln(1-P)+(1-p)(1-P)^{n-m}\ln(1-P).$$

Iz jednačine $\frac{dP(A)}{dm}=0\Rightarrow(1-P)^{2m-n}=\frac{1-p}{p}$. Prema tome mora biti

$$m=\frac{n}{2}+\frac{\ln\frac{1-p}{p}}{2\ln(1-P)}.$$

4212. Razmotrimo četiri hipoteze:

H_0 — avion nije pogodio ni jedan hitac;

H_1 — avion je pogodio jedan hitac;

H_2 — avion su pogodila dva hica;

H_3 — avion su pogodila tri hica.

Koristeći teoreme sabiranja i množenja, nalazimo verovatnoće tih hipoteza:

$$P(H_0)=0{,}6\cdot0{,}5\cdot0{,}3=0{,}09;$$

$$P(H_1)=0{,}4\cdot0{,}5\cdot0{,}3+0{,}6\cdot0{,}5\cdot0{,}3+0{,}6\cdot0{,}5\cdot0{,}7=0{,}36;$$

$$P(H_2)=0{,}6\cdot0{,}5\cdot0{,}7+0{,}4\cdot0{,}5\cdot0{,}7+0{,}4\cdot0{,}5\cdot0{,}3=0{,}41;$$

$$P(H_3)=0{,}4\cdot0{,}5\cdot0{,}7=0{,}14.$$

Uslovna verovatnoća događaja A (uništenje aviona) pri tim hipotezama je $P(A/H_0)=0$; $P(A/H_1)=0{,}2$; $P(A/H_2)=0{,}6$; $P(A/H_3)=1{,}0$.

Primenjujući formulu totalne verovatnoće dobijamo:

$$P(A)=P(H_0)P(A/H_0)+P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P\,A/H_3)=$$

$$=0{,}36\cdot0{,}2+0{,}41\cdot0{,}6+0{,}14\cdot1{,}0=0{,}458.$$

4213. Razmotrimo hipoteze:

H_1 — na cilj je dospeo samo vodeći avion (druga dva su oborena);

H_2 — na cilj je dospeo vodeći i jedan od vođenih;

H_3 — na cilj su dospela sva tri aviona,

i događaj A koji znači da je objekt uništen. Verovatnoće hipoteza su:

$$P(H_1)=0{,}8\cdot0{,}2^2=0{,}032;$$

$$P(H_2)=2\cdot0{,}8^2\cdot0{,}2=0{,}256.$$

$$P(H_3)=0{,}8^3=0{,}512.$$

Uslovne verovatnoće događaja A pri ovim pretpostavkama su

$$P(A/H_1)=0{,}3;$$

$$P(A/H_2)=1-0{,}7^2=0{,}51;$$

$$P(A/H_3)=1-0{,}7^3=0{,}657.$$

Na osnovu formule za totalnu verovatnoću dobija se

$$P(A)=0{,}032\cdot0{,}3+0{,}256\cdot0{,}51+0{,}512\cdot0{,}657=0{,}476.$$

4214. $p=\frac{11}{12}\cdot\frac{1}{11}+\frac{1}{12}\cdot\frac{2}{11}=\frac{13}{132}$. 4215. $p=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{9}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{9}=\frac{7}{18}$.

4216. Neka H_{j_1} znači da je iz j-te kutije izvučena bela kuglica; H_{j_2} da je iz te iste kutije izvučena crna kugl'ca.

$$P(H_{11})=\frac{m}{m+k},\quad P(H_{12})=\frac{k}{m+k},\quad P(H_{21})=\frac{m}{m+k}\cdot\frac{m+1}{m+k+1}+\frac{k}{m+k}\frac{m}{m+k+1}=$$

$$=\frac{m}{m+k},\quad P(H_{22})=\frac{k}{m+k}.$$

Smatramo da je $P(H_{j1})=\frac{m}{m+k}$, $P(H_{j2})=\frac{k}{m+k}$. Tada je $P(H_{j+1,1})=\frac{m}{m+k}$. Otuda je $p=\frac{m}{m+k}$.

4217. 1° 0,533; 2° $p=\frac{1}{3}\cdot0{,}8^2+\frac{2}{3}\cdot0{,}4^2=0{,}32$.

4218. Neka hipoteza H_k $(k=0,1,\ldots,s)$ znači da je u prvom vremenskom intervalu prispelo k poziva. Tako imamo $P(H_k)=P_t(k)$. Neka A znači da je za vreme $2t$ prispelo s poziva. Verovatnoća da u toku drugog vremenskog intervala prispe $s-k$ poziva iznosi

$$P(A/H_k)=P_t(s-k),P_{2t}(s)=\sum_{k=0}^{s}P_t(k)P_t(s-k).$$

4219. $p=\frac{25}{30}\cdot\frac{24}{29}+\left(\frac{25}{30}\cdot\frac{5}{29}+\frac{5}{30}\cdot\frac{25}{29}\right)\frac{24}{28}=\frac{190}{203}$. 4220. Jednakost važi samo u sledećim specijalnim slučajevima: 1° $A=V$; 2° $B=U$; 3° $B=A$; 4° $B=\bar{A}$; 5° $B=V$

4221. Na osnovu formule iz zad. 4211 $\Rightarrow m\approx13$, $p\approx0{,}67$.

4222. Neka događaj A znači prijem signala „tačka" a događaj B prijem signala „crtica". Možemo učiniti dve pretpostavke: H_1 — da je predati signal „tačka", i H_2 — da je predati signal „crtica". Po uslovu zadatka je $P(H_1):P(H_2)=5:3$. Sem toga je $P(H_1)+P(H_2)=1$. Otuda je $P(H_1)=\frac{5}{8}$ a $P(H_2)=\frac{3}{8}$. Poznato je da je $P(A/H_1)=\frac{3}{8}$, $P(A/H_2)=\frac{1}{3}$, $P(B/H_1)=\frac{2}{5}$, $P(B/H_2)=\frac{2}{3}$. Verovatnoće događaja A i B nalazimo po formuli totalne verovatnoće

$$P(A)=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2},\quad P(B)=\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{5}+\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}.$$

Tražena verovatnoća se dobija korišćenjem Bayesove formule:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\,P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{4},$$

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)\,P(B/H_2)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}.$$

4223. Moguće su dve hipoteze:

H_1 — pribor je komponovan od visokokvalitetnih delova;

H_2 — pribor je sastavljen od delova prosečnog kvaliteta.

Verovatnoće tih hipoteza pre opita su: $P(H_1)=0{,}4$; $P(H_2)=0{,}6$. Kao rezultat opita konstantovano je da je pribor ispravno funkcionisao u toku vremena t, i neka je to događaj A. Uslovne verovatnoće tih događaja pri hipotezama H_1 i H_2 su:

$$P(A/H_1)=0{,}95;\quad P(A/H_2)=0{,}7.$$

Na osnovu Bayesove formule nalazimo verovatnoću hipoteze H_1 nakon opita:

$$P(H_1/A)=\frac{0{,}4\cdot 0{,}95}{0{,}4\cdot 0{,}95+0{,}6\cdot 0{,}7}=0{,}475.$$

4224. Pre opita su moguće sledeće hipoteze:

H_1 — ni prvi ni drugi strelac nisu pogodili;

H_2 — oba strelca su pogodila;

H_3 — prvi strelac je pogodio a drugi nije;

H_4 — prvi strelac nije pogodio a drugi je pogodio.

Verovatnoće tih hipoteza su:

$$P(H_1)=0{,}2\cdot 0{,}6=0{,}12;$$
$$P(H_2)=0{,}8\cdot 0{,}4=0{,}32;$$
$$P(H_3)=0{,}8\cdot 0{,}6=0{,}48;$$
$$P(H_4)=0{,}2\cdot 0{,}4=0{,}08.$$

Uslovne verovatnoće konstatovanog događaja A, pri ovim hipotezama, su:

$$P(A/H_1)=0;\ P(A/H_2)=0;\ P(A/H_3)=1;\ P(A/H_4)=1$$

Nakon opita dolazi se do zaključka da su hipoteze H_1 i H_2 nemoguće, a verovatnoće hipoteza H_3 i H_4 iznose:

$$P(H_3/A)=\frac{0{,}48\cdot 1}{0{,}48\cdot 1+0{,}08\cdot 1}=\frac{6}{7};$$

$$P(H_4/A)=\frac{0{,}08\cdot 1}{0{,}48\cdot 1+0{,}081}=\frac{1}{7}.$$

Prema tome verovatnoća da pogodak pripada prvom strelcu iznosi $p=\frac{6}{7}$.

4225. Pre opita moguće su sledeće hipoteze:

H_1 — da je oklop probijen krupnim parčetom;

H_2 — da je probijen srednjim parčetom;

H_3 — da je probijen malim parčetom,

sa verovatnoćama $P(H_1)=0{,}1$; $P(H_2)=0{,}3$; $P(H_3)=0{,}6$. Neka je rezultat opita događaj A koji znači da je oklop probijen. Uslovne verovatnoće toga događaja uz hipoteze H_1, H_2 i H_3 iznose: $P(A/H_1)=0{,}9$; $P(A/H_2)=0{,}2$; $P(A/H_3)=0{,}05$. Na osnovu Bayesove formule imamo:

$$P(H_1/A)=\frac{0{,}1\cdot 0{,}9}{0{,}1\cdot 0{,}9+0{,}3\cdot 0{,}2+0{,}6\cdot 0{,}05}=0{,}500;$$

$$P(H_2/A)=\frac{0{,}3\cdot 0{,}2}{0{,}1\cdot 0{,}9+0{,}3\cdot 0{,}2+0{,}6\cdot 0{,}05}=0{,}333;$$

$$P(H_3/A)=\frac{0{,}6\cdot 0{,}05}{0{,}1\cdot 0{,}9+0{,}3\cdot 0{,}2+0{,}6\cdot 0{,}05}=0{,}167.$$

4226. Pretpostavke: H_1 — uzeta je partija koja sadrži neispravne proizvode, H_2 — uzeta je partija koja sadrži kvalitetne proizvode. Prema uslovu zadatka je $P(H_1)=P(H_2)=\frac{1}{2}$, $P(A/H_1)=\frac{3}{4}$, $P(A/H_2)=1$. Otuda formula za totalnu verovatnoću događaja A biće $P(A)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+1\right)=\frac{7}{8}$. Nakon prvog opita verovatnoća da partija sadrži neispravne proizvode iznosi:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\,P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}}{7/8}=\frac{3}{7}.$$

Sa B je obeležen događaj da je prvi uzeti artikal bio ispravan. Verovatnoća da partija sadrži samo ispravne proizvode iznosi $P(H_2/A)=\frac{4}{7}$. Neka događaj A znači da je prilikom drugog opita proizvod bio neispravan. Verovatnoća toga događaja takođe se nalazi po formuli totalne verovatnoće. Ako su H'_1 i H'_2 nove hipoteze, onda je saglasno prethodnim izračunavanjima $P(H'_1)=\frac{3}{7}$, $P(H'_2)=\frac{4}{7}$. Sem toga je $P(B/H'_1)=\frac{1}{4}$, $P(B/H_2)=0$. Prema tome je tražena verovatnoća $P(B)=\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{28}$.

4227. $p=\dfrac{0{,}1\cdot\dfrac{5}{6}}{0{,}9\cdot\dfrac{1}{2}+0{,}1\cdot\dfrac{5}{6}}=\dfrac{5}{32}$.

4228. $p=\dfrac{1}{1+\dfrac{k_2 m_2 (m_1+n_1)}{k_1 m_1 (m_2+n_2)}}$.

4229. $p\approx 0{,}78$

4230. Drugom tipu.

4231. Neka događaj A znači da je u dva merenja dobijena greška suprotnog znaka; neka hipoteza H_k $(k=1, 2, 3)$ znači da je merenje izvedeno k-im instrumentom. Srednje odstupanje E karakteriše polovinu dužine intervala, pa je verovatnoća pripadanja tome intervalu jednaka $\frac{1}{2}$; sredini toga intervala odgovara greška čija je vrednost nula. $P(H_k)=\frac{1}{3}$, $P(A/H_1)=P(A/H_2)=\frac{3}{8}$, $P(A/H_3)=\frac{1}{2}$, $P(A)=\frac{5}{12}$, $P(H_1/A)=P(H_2/A)=0{,}3$, $P(H_3/A)=0{,}4$.

4232. Neka događaj A znači da je vepar ubijen jednim metkom, $P(A)=\sum\limits_{k=1}^{3} P(H_k)$. Neka, dalje, hipoteza H_k pretpostavlja da je pogodio k-ti lovac $(k=1, 2, 3)$. $P(H_1)=0{,}048$, $P(H_2)=0{,}128$, $P(H_3)=0{,}288$, $P(H_1/A)=0{,}103$, $P(H_2/A)=0{,}277$, $P(H_3/A)=0{,}620$.

4234. $p=\dfrac{n^k}{1+2^k+\cdots+n^k}$.

4235. Neka događaj A znači da su izvučene crna i crvena kuglica; hipoteza H_k $(k=1, 2)$ da je izvučena iz k-te kutije. $P(H_k)=\frac{1}{2}$, $P(A/H_1)=\frac{300}{625}$, $P(A/H_2)=\frac{6}{625}$; $p=P(H_1/A)=\frac{50}{51}$.

4236. Neka događaj M_1 znači da je prvi blizanac dečak; događaj M_2 — da je i drugi takođe dečak. Hipoteze: H_1 — oba dečaka; H_2 — dečak i devojčica. $P(M_1)=a+\frac{1}{2}[1-(a+b)]$,

$$p=P(M_2/M_1)=\frac{2a}{1+a-b}.$$

4237. Neka događaji A_k i B_k znače da su se k-ti po redu rodili dečak i devojčica $(k=1, 2)$. $P(A_1A_2)+P(B_1B_2)+2P(A_1B_2)=1$, $P(A_1A_2+B_1B_2)=4P(A_1B_2)$. Otuda je $P(A_1A_2)+P(B_1B_2)=\frac{2}{3}$, $P(A_1B_2)=\frac{1}{6}$, $P(A_1A_2)=0{,}51-\frac{1}{6}$; $p=P(A_2/A_1)=\frac{103}{153}$.

4238. 0,161; 0,410; 0,229; 0,200.

4239. Uvodimo sledeće hipoteze: H_1 — student je na prvoj godini; H_2 — student je na drugoj godini. Neka događaj A znači da drugi student studira duže od prvoga.

$$P(H_1)=\frac{n_1}{n-1},\quad P(H_2)=\frac{n_2}{n-1},\quad P(A/H_1)=\frac{n_2+n_3}{n-1},\quad P(A/H_2)=\frac{n_3}{n-1},$$

$$P(A)=\frac{1}{(n-1)^2}[n_1(n_2+n_3)+n_2n_3],\quad p=\frac{1}{P(A)}\left[P(H_1)\frac{n_3}{n-1}+P(H_2)\frac{n_3}{n-1}\right]=$$

$$=\frac{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}+\dfrac{1}{n_3}}.$$

4240. Hipoteze H_k $(k=0, 1, \ldots, 8)$ — između osam komada njih k je ispravno. Događaj A znači da su među četiri uzeta proizvoda tri ispravna.

$$P(H_k)=\frac{1}{9},\quad P(H_j(A)=0,\ (j=0, 1, 2, 8),\quad P(H_k/A)=\frac{C_k^3\,C_{8-k}^1}{C_8^4}\ (k=3, 4, 5, 6, 7),\quad P(A)=$$

$$=\frac{1}{5},\quad p=P(H_4/A)\frac{3}{4}+P(H_5/A)\frac{1}{2}=\frac{3}{14}.$$

4242. Uputstvo. Iz kutije, koja sadrži N kuglica među kojima m belih, nasumice se uzimaju kuglice bez vraćanja. Naći verovatnoću da će se ranije ili kasnije naići na belu kuglicu.

4243. Verovatnoća $p_n(N)$ da igrač A bude poražen u N partija određuje se iz jednačine

$$q(p_n-p_{n-1})=p(p_{n+1}-p_n).$$

Rešavanjem ove jednačine dobija se

$$p_n=\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}-1}.$$

Odavde se dobija verovatnoća da će igrač A izgubiti:

$$p_a=\frac{q^{a+b}-q^a p^b}{q^{a+b}-p^{a+b}}=\frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^b}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{a+b}}.$$

Na isti način nalazi se verovatnoća da će izgubiti igrač B za $p\neq q$

$$q_b=\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}.$$

Ove dve formule pokazuju da je verovatnoća nerešenog rezultata jednaka nuli: $r_a=0$.

4244. $\dfrac{a}{a+b}$.

4245. Uputstvo. Uvesti uslovne verovatnoće u i v događaja A pod uslovom da su se kao rezultat prvog opita pojavili respektivno indeksi jedinica i $n\neq 1$. Koristeći formulu totalne verovatnoće formirati jednačine koje vezuju u i v. Rez. $\beta=21$.

4246. Problem se svodi na rešavanje jednačine

$$\frac{dp(t)}{dt}=-ap(t),$$

odakle nakon integracije dobijamo

$$p(t)=ce^{-at},$$

gde je c konstanta. Ta konstanta se određuje iz očiglednog uslova da je $p(0)=1$. Na taj način je $p(t)=e^{-at}$.

4247. Obeležimo sa $\pi(t)$ verovatnoću da će neko lice A doživeti vreme t, i izračunajmo $\pi(t+\Delta t)$. Očigledno je da, iz pretpostavki učinjenih u zadatku, sledi jednakost

$$\pi(t+\Delta t)=\pi(t)\,\pi(t+\Delta t,t)$$

gde $\pi(t+\Delta t,t)$ znači verovatnoću življenja do $t+\Delta t$, ako je lice A već doživelo uzrast t. U saglasnosti sa prvom i drugom pretpostavkom biće

$$\pi(t+\Delta t,t)=1-p(t,t+\Delta t)=1-a(t)\,\Delta t-0(\Delta t),$$

radi toga je

$$\pi(t+\Delta t)=\pi(t)\,[1-a(t)\,\Delta t-0(\Delta t)].$$

Tako nalazimo da $\pi(t)$ zadovoljava sledeću diferencijalnu jednačinu

$$\frac{d\pi(t)}{dt}=-a(t)\,\pi(t).$$

Rešavanjem ove jednačine, izimajući u obzir treći uzlov zadatka, dobija se funkcija

$$\pi(t)=e^{-\int_0^t a(z)\,dz}.$$

Verovatnoća smrti, pre nego se dostigne uzrast t, na taj način iznosi

$$1-\pi(t)=1-e^{-\int_0^t a(z)\,dz}.$$

Pri sastavljanju tablica smrtnosti odraslog stanovništva često se koristi formula Makegama, saglasno kojoj je

$$a(t)=\alpha+\beta\,e^{\gamma t},$$

gde su konstante α, β i γ pozitivne. Pri izvođenju ove formule polazi se od pretpostavki, da odrastao čovek može umreti usled okolnosti koje ne zavise od uzrasta i okolnosti koje od njega zavise, pri čemu porast smrtnosti raste sa povećanjem uzrasta po geometrijskoj progresiji. Uz takve dopunske pretpostavke biće

$$\pi(t)=e^{-\alpha t}-\frac{\beta}{\gamma}(e^{\gamma t}-1).$$

4249. $p_r'(t)=-b\,r\,p_r(t)+a\,(r-1)\,p_{r-1}(t)$.

4250. Označimo sa $A(t)$ događaj koji znači da su sve čestice koje su pale na brojač u toku vremena t bile registrovane; sa $B_k(t)$ označimo verovatnoću da je za vreme t na brojač palo k čestica. Na osnovu prvog uslova za $t>\tau$ biće

$$P\{A(t+\Delta t)\}=P\{A(t)\}\,P\{B_0(\Delta t)\}+P\{A(t-\tau)\}\cdot P\{B_0(\tau)\}\cdot P\{B_1(\Delta t)\}+0(\Delta t)\},$$

a za $0<t<\tau$

$$P\{A(t+\Delta t)\}=P\{A(t)\}\,P\{B_0(\Delta t)\}+P\{B_0(t)\}\,P\{B_1(\Delta t)\}+0(\Delta t).$$

Stavljajući, radi kratkoće pisanja, $P\{A(t)\}=\pi(t)$, dobijamo na osnovu drugog i trećeg uslova zadatka za $0<t<\tau$

$$\pi(t+\Delta t)=\pi(t)\,e^{-a\Delta t}+e^{-a\Delta t}\,a\,\Delta t\,e^{-at}+0(\Delta t)$$

a za $t>\pi$

$$\pi(t+\Delta t)=\pi(t)\,e^{-a\Delta t}+\pi(t-\tau)\,e^{-a\Delta t}\,a\,\Delta t\,e^{-at}+0(\Delta t).$$

Prelaženjem na granicu kada $\Delta t\to 0$ nalazimo da za $0<t\leqslant\tau$ važi jednačina

$$\frac{d\pi(t)}{dt}=-a\,\pi(t)+ae^{-at}, \tag{1}$$

a za $t>\tau$ jednačina

$$\frac{d\pi(t)}{dt}=-a\,[\pi(t)-\pi(t-\tau)\,e^{-a\tau}]. \tag{2}$$

Iz jednačine (1) nalazimo da je za $0<t<\tau$

$$\pi(t)=e^{-at}(c+at).$$

Iz uslova $\pi(0)=1$ određujemo konstantu c. Konačno za $0<t<\tau$ imamo

$$\pi(t)=e^{-at}(1+at). \tag{3}$$

Za $\tau<t<2\tau$ verovatnoća $\pi(t)$ određuje se iz jednačine

$$\frac{d\pi(t)}{dt}=-a\,[\pi(t)-\pi(t-\tau)]\,e^{-a\tau}=-a\,[\pi(t)-e^{a(t-\tau)}(1+a(t-\tau))\,e^{-a\tau}]=-a\,[\pi(t)-$$

$$-e^{-at}(1+a(t-\tau))].$$

Rešenje ove jednačine je

$$\pi(t)=e^{-at}\left(c_1+at+\frac{a^2(t-\tau)^2}{2!}\right).$$

Konstanta c_1 može biti određena iz toga, što je na osnovu uslova (3)

$$\pi(\tau)=e^{-a\tau}(1+a\tau).$$

Na taj način je $c_1=1$ i za $\tau<t<2\tau$

$$\pi(t)=e^{-at}\left[1+at+\frac{a^2(t-\tau)^2}{2!}\right].$$

Metodom totalne indukcije možemo dokazati, da za $(n-1)\tau<t<n\tau$ važi jednakost

$$\pi(t)=e^{-at}\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k[t-(k-1)\tau]^k}{k!}.$$

4251. Formiramo funkciju generatrisu

$$\varphi_4(x)=\prod_{i=1}^{4}(q_i+p_i x)=(0{,}9+0{,}1\,x)\,(0{,}8+0{,}2\,x)\,(0{,}7+0{,}3\,x)\,(0{,}6+0{,}4\,x)=$$

$$=0{,}302+0{,}440\,x+0{,}215\,x^2+0{,}040\,x^3+0{,}002\,x^4,$$

odakle je $P_{0,4}=0{,}302$; $P_{1,4}=0{,}440$; $P_{2,4}=0{,}215$; $P_{3,4}=0{,}040$; $P_{4,4}=0{,}002$.

4252. $p=q=\dfrac{1}{2}$, $P_5(1)=C_5^1\left(\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{5}{32}$.

4253. Polazeći od formule $(q+px)^n=\sum_{m=0}^{n}C_n^m\,p^m q^{n-m}x^m$ imamo: $P_{0,4}=q^4=0{,}316$; $P_{1,4}=C_4^1\,pq^3=0{,}421$; $P_{2,4}=C_4^2\,p^2q^2=0{,}211$; $P_{3,4}=C_4^3\,p^3q=0{,}047$; $P_{4,4}=p^4=0{,}004$.

4254. $P_5(0)=\dfrac{1}{32}$; $P_5(1)=\dfrac{5}{32}$; $P_5(2)=\dfrac{5}{16}$; $P_5(3)=\dfrac{5}{16}$; $P_5(4)=\dfrac{5}{32}$; $P_5(5)=\dfrac{1}{32}$.

4255. Verovatnoća da će cilj biti uništen izračunava se po formuli $R_{m,n}=\sum_{i=m}^{n} P_{i,n}$. Tako će biti $R_{3,5}=P_{3,5}+P_{4,5}+P_{5,5}=C_5^3\,0{,}2^3\cdot 0{,}8^2+C_5^4\,0{,}2^4\cdot 0{,}8+0{,}2^5=0{,}0512+0{,}0064+$ $+0{,}0003\approx 0{,}0579$.

4256. $\frac{80}{243}$. 4257. Bilo bi moguće izračunati verovatnoću makar jednog pogotka po formuli $R_{1,10}=P_{1,10}+P_{2,10}+\cdots+P_{10,10}$, međutim neuporedivo je lakše u tu svrhu koristiti verovatnoću suprotnog događaja: $R_{1,10}=1-P_{0,10}=1-0{,}9^{10}\approx 0{,}651$. 4258. $p\cong 0{,}06$.

4259. Da bi se rezervoar upalio potrebna su dva pogotka. Polazeći od formule

$R_{m,n}=1-\sum_{i=0}^{m-1} P_{i,n}$ dobijamo: $R_{2,8}=1-(P_{0,8}+P_{1,8})=1-\left(0{,}8^8+C_8^1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8^7\right)=$ $=1-0{,}503=0{,}497$.

4260. $\frac{5}{16}$. 4261. Zadatak se rešava po formuli za totalnu verovatnoću. Trebalo bi razmotriti hipoteze

H_1 — avion je pogodila jedna granata,

H_2 — avion su pogodile dve granate,

H_3 — avion su pogodile tri granate,

H_4 — avion su pogodile četiri granate,

i naći verovatnoću uništenja aviona pomoću tih hipoteza. Međutim znatno prostije je razmotriti svega dve hipoteze:

H_0 — avion nije pogodila nijedna granata,

H_1 — avion je pogodila jedna granata,

i izračunati verovatnoću da avion neće biti uništen. Ako A znači uništenje aviona onda je:

$$P(\bar A)=P(H_0)P(\bar A/H_0)+P(H_1)P(\bar A/H_1).$$

Tako je:

$$P(H_0)=P_{0,4}=0{,}7^4=0{,}240;$$

$$P(H_1)=P_{1,4}=C_4^1 0{,}3,\ 0{,}7^3=0{,}412;$$

$$P(\bar A/H_0)=1;$$

$$P(\bar A/H_1)=1-0{,}6=0{,}4.$$

Prema tome je

$$P(\bar A)=0{,}240+0{,}412\cdot 0{,}4\approx 0{,}405,$$

odakle je $P(A)=1-0{,}405=0{,}595$.

4262. P(0 asova)$=\frac{C_{48}^{13}}{C_{52}^{13}}\cong 0{,}3038$; $p=C_5^0(0{,}3038)^5\cong 0{,}028$; pošto je taj događaj malo verovatan onda je po sredi „baksuzluk".

4263. 1° $\cong 0{,}774$; 2° $\cong 0{,}0021$. 4264. $p=1-P_n(0)=1-\left(\frac{9}{10}\right)>\frac{9}{10}$, $n>22$.

4265. Pošto su protivnici iste jačine, onda su verovatnoće dobitka i gubitka partije jednake $p=q=\frac{1}{2}$. 1° Verovatnoća da će biti dobijene tri partije od četiri iznosi

$$P_{4,3}=C_4^3\cdot\frac{1}{2^4}=\frac{1}{4}.$$

Verovatnoća da se dobiju pet partija od osam je

$$P_{8,5}=C_8^5\cdot\frac{1}{2^8}=\frac{7}{32}.$$

Pošto je $\frac{1}{4}>\frac{7}{32}$, sledi da je verovatnije dobiti tri partije od četiri. 2° Verovatnoća da se dobiju najmanje tri partije od četiri je

$$R_{4,3}=P_{4,3}+P_{4,4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{5}{16},$$

a verovatnoća da se dobije najmanje pet partija od osam je

$$R_{8,5}=P_{8,5}+P_{8,6}+P_{8,7}+P_{8,8}=\frac{7}{32}+\left(\frac{8\cdot 7}{2}+8+1\right)\frac{1}{2^8}=\frac{93}{256}.$$

Pošto je $\frac{93}{256}>\frac{5}{16}$, to je verovatnije da se dobije najmanje pet partija od osam;

3° $\sum_{k=0}^{n} p_{k,2n}=\left(1+C_{2n}^1+\cdots+C_{2n}^n\right)2^{-2n}>\left(1+C_{2n}^1+\cdots+C_{2n}^{n-1}\right)2^{-2n}=\left(C_{2n}^{n+1}+\cdots+\right.$ $\left.+C_{2n}^{2n}\right)2^{-2n}=\sum_{k=n+1}^{2n} P_{k,2n}$; 4° jednako verovatno.

4266. 1° Verovatnoća da svih pet potrošača neće biti isključeni jednaka je proizvodu verovatnoća neisključivanja svakog od potrošača, tj. $q=0{,}4\cdot 0{,}8\cdot 0{,}7^4=0{,}077$. Tražena verovatnoća jednaka je verovatnoći isključivanja bar jednog potrošača, tj. $p=1-q=0{,}923$.
2° U tom slučaju neće biti protoka struje ako budu isključeni svi potrošači, proizvoljnih pet, određena četiri ili tri. Pretpostavimo da su prvi i drugi potrošač vezani paralelno. Tada imamo

$$p_{6,6}=p_1p_2p_3^4=0{,}001$$

$$p_{6,5}=(p_1q_2+q_1p_2)p_3^4+4p_1p_2q_3q_3^3=0{,}0136;$$

$$p_{6,4}=4(p_1q_2+q_1p_2)q_3p_3^3+4p_1p_2p_3^2q_3^2=0{,}0635;$$

$$p_{6,4}=4(p_1q_2+q_1p_2)p_3^2q_3^2=0{,}0988.$$

Sumarna verovatnoća je $p\approx 0{,}177$.

4267. Traženi broj n može se odrediti po formuli

$$n>\frac{\log(1-P)}{\log(1-p)}.$$

U datom slučaju je $P=0{,}95$ i $p=0{,}01$. Otuda je $n>\frac{\log 0{,}05}{\log 0{,}99}\approx 296$. 4268. $n>300$.

4269. U datom slučaju je $n=10$, $(n+1)p=4{,}4$. Najverovatniji broj poziva jednak je celom delu broja $(n+1)p$ tj. $n=4$. Verovatnoća četiri zahteva od deset je $p_{10,4}=C_{10}^4\cdot 0{,}4^4\cdot 0{,}6^6=$ $=0{,}251$. 4270. 1° $\frac{63}{256}\approx 0{,}246$; $\frac{957}{1024}\approx 0{,}935$. 2° $0{,}9^4+4\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9^3=0{,}948$.

4271. 0,17.

4272. $1-(1-p)^3$. 4273. $p=1-(0{,}7^4+4\cdot 0{,}7^3\cdot 0{,}3\cdot 0{,}4)=0{,}595$.

4274. $P_1=p^4+C_4^1\,p^4q+C_5^2p^4q^2+C_6^3p^3q^3(p^2+2p^2q)=0{,}723$; $P_{11}=0{,}277$. 4275. 0,73.

4276. Mora biti $0{,}99\cdot 5^{10}=4^{10}+C_{10}^1 4^9+\cdots+C_{10}^n 4^{10-n}$, $n=5$. 4277. $n=29$.

4278. $\mu=4$; $p=0{,}251$. 4279. $\mu_+=3$; $\mu_-=1$; $p=\dfrac{32}{81}$.

4284. Neka A_1 znači da je nasumice uzet deo koji pripada prvom tipu, A_2 drugom tipu i A_3 trećem tipu. Po uslovu je $p_1=0{,}05$, $p_2=0{,}10$, $p_3=0{,}85$. Svega se izvodi $n=100$ opita. Traži se verovatnoća p da pri tome događaji A_1 i A_2 nastupe po pet puta. Tada je $n_1=n_2=5$, $n_3=90$. Otuda je tražena verovatnoća

$$p=P_{100,\,5,\,5,\,90}=\frac{100!}{5!\;5!\;90!}\,0{,}05^5\cdot 0{,}10^5\cdot 0{,}85^{90}.$$

Logaritmujući datu jednakost, nalazimo

$$\log p=\log 100!-\log 90!-2\log 51+5\log 51+90\log 0{,}85-15.$$

Odavde se dobija da je $\log p\approx\bar{3},7824$ tj. $p\approx 0{,}006$.

4285. Obeležimo sa p_k verovatnoću da će se nakon k opita događaj desiti paran broj puta. Data verovatnoća je povezana sa verovatnoćom p_{k-1} nastupanja događaja paran broj puta u $k-1$ opita. Pre k-og opita možemo učiniti dve pretpostavke: u $k-1$ opita događaj se desio paran ili neparan broj puta. Verovatnoće tih hipoteza jednake su respektivno p_{k-1} i $1-p_{k-1}$. Tada je $p_k=p_{k-1}(1-p)+(1-p_{k-1})p$ tj. $p_k=p+p_{k-1}(1-2p)$. Zadnju jednakost možemo još napisati u obliku

$$\left(p_k-\frac{1}{2}\right)=(1-2p)\left(p_{k-1}-\frac{1}{2}\right),\quad (k=1,2,\ldots,n).$$

Množenjem levih i desnih strana svih n takvih jednačina dobijamo

$$\prod_{k=1}^{n}\left(p_k-\frac{1}{2}\right)=(1-2p)^n\prod_{k=1}^{n}\left(p_{k-1}-\frac{1}{2}\right).$$

Skraćivanjem obadve strane ove jednakosti sa $\prod_{k=1}^{n-1}\left(p_k-\frac{1}{2}\right)$ dobijamo

$$p_n-\frac{1}{2}=(1-2p)^n\left(p_0-\frac{1}{2}\right).$$

Pošto je $p_0=1$ to je tražena verovatnoća

$$p_n=\frac{1}{2}[1+(1-2p)^n].$$

4286. Razmotrimo na početku prve tri cifre broja. Pošto su one proizvoljne, možemo smatrati da se izvode tri opita ($n=3$), tako da se kao rezultat svakog od njih pojavljuje jedna od cifara sa verovatnoćom $p=\dfrac{1}{10}$. Verovatnoća, da kao rezultat tih opita cifre uzimaju zadate vrednosti određen broj puta, nalazi se po formuli polinomijalne raspodele ili pomoću funkcije generatrise, koja za $n=3$ i $p_k=\dfrac{1}{10}$ $(k=0,1,\ldots,9)$ ima oblik

$$\varphi_1(x)=\frac{1}{10^3}\left(\sum_{k=0}^{9}x_k\right)^3.$$

Indeks „k“ u x_k ukazuje na to da se kao rezultat opita pojavio broj k. Koeficijenat uz $x_0^{n_0}x_1^{n_1}\ldots x_9^{n_9}\left(\sum_{r=0}^{9}n_r=3\right)$ jednak je verovatnoći da među prve tri cifre broj r figuriše n_r puta ($r=0,1,\ldots,9$). Stavimo $x_k=x^k$ ($k=0,\ldots,9$). Tada je $x_0^{n_0}x_1^{n_1}\ldots x_9^{n_9}=x^{0n_0+1n_1+2n_2+\cdots+9n_9}$. Stepen x-sa je jednak zbiru prve tri cifre broja. Na taj način u funkciji

$$\varphi(x)=\frac{1}{10^3}\left(\sum_{k=0}^{9}x^k\right)^3=\frac{1}{10^3}\left(\frac{1-x^{10}}{1-x}\right)^3$$

koeficijenat uz x^σ jednak je verovatnoći da je zbir prve tri cifre broja srećke jednak σ. Analogno u funkciji

$$\varphi_2(x)=\frac{1}{10^3}\left(\frac{1-x^{-10}}{1-x^{-1}}\right)^3$$

koeficijenat uz $x^{-\sigma}$ jednak je verovatnoći da je zbir tri zadnje cifre broja srećke jednak σ. Prema tome je u funkciji

$$\varphi(x)=\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)=\frac{1}{10^6x^{27}}\left(\frac{1-x^{10}}{1-x}\right)^6$$

koeficijenat uz x^0 jednak traženoj verovatnoći da su zbirovi prve tri i zadnje tri cifre jednaki. Tako imamo da je

$$(1-x^{10})^6=1-C_6^1x^{10}+C_6^2x^{20}-\cdots,$$

$$(1-x)^{-6}=C_5^5+x\,C_6^5+x^2\,C_7^5+\cdots.$$

Otuda je tražena verovatnoća

$$p=\frac{1}{10^6}\left(C_{32}^5-C_6^1C_{22}^5+C_6^2C_{12}^5\right)=0{,}05525.$$

4287. $p=P_{5;\,2,\,2,\,1}+P_{5;\,3,\,2,\,0}=\dfrac{50}{243}$.

4288. 1° $p=\dfrac{9!}{(3!)^3}\cdot\dfrac{1}{3^9}=0{,}085$; 2° $p=6\cdot\dfrac{9!}{4!\,3!\,2!}\cdot\dfrac{1}{3^9}=0{,}385$.

4289. $p=\dfrac{10!}{6!\,3!}\,0{,}15^6\cdot 0{,}22^3\cdot 0{,}13=0{,}13\cdot 10^{-4}$.

4290. 1° $p_1=\dfrac{l^{l_1}m^{m_1}n^{n_1}}{(l+m+n)^{l_1+m_1+n_1}}$; 2° $p=6\,p_1$; 3° $p=\dfrac{(l_1+m_1+n_1)!}{l_1!\,m_1!\,n_1!}\times\dfrac{l^{l_1}m^{m_1}n^{n_1}}{(l+m+n)^{l_1+m_1+n_1}}$.

4291. $p=p_n$, $p_k=p_{k-1}\dfrac{1}{2}+(1-p_{k-1})\dfrac{1}{2}=0{,}5$, $p=0{,}5$.

4292. Neka je p_k verovatnoća nerešenog rezultata posle $2\,k$ odigranih partija.

$$p_{k+1}=\frac{1}{2}p_k\ (k=1,2,\ldots),\ p_0=1,\ p_{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1};\ p=\frac{1}{2}p_{n-1}=\frac{1}{2^n}.$$

4293. $p_I = ?$ $p_{II} = ?$ a p_k verovatnoća poraza prvog igrača kada je kod njega k dinara. Na osnovu formule totalne verovatnoće je $p_k = p p_{k+1} + q p_{k-1}$. Sem toga je $p+q=1, p_0=1$, $p_{m+n}=0$. Otuda je $q(p_k - p_{k-1}) = p(p_{k+1} - p_k)$ 1) $p=q$. Tada je $p_k = 1-kc$, $c=\frac{1}{n+m}$ tj. $p_I = \frac{m}{n+m}$, $p_{II} = \frac{n}{n+m}$; 2) $p \neq q$. Tada je $p_k - p_{k-1} = \left(\frac{p}{q}\right)^k (p_1 - 1)$. Sabirajući ove jednakosti od 1 do n i od 1 do $n+m$, dobijamo

$$1-p_n = (1-p_1)\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\frac{q}{p}}, \quad 1-p_{n+m} = (1-p_1)\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+m}}{1-\frac{q}{p}}.$$

Otuda je

$$p_I = \frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^m}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{n+m}}, \quad p_{II} = 1-p_I = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+m}}.$$

4294. Za $p=\frac{1}{2} \Rightarrow P = \frac{n}{n+m}$; za $p \neq \frac{1}{2} \Rightarrow P = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+m}}$ (uporedi sa zad. 4293).

4295. $P = P_m$; $P_m = 0$ za $m<n$. $P_n = \frac{1}{2^{n-1}}$; za $n<m<2n-1$ $P_m = \frac{1}{2^n}$. U opštem slučaju P_m se određuje iz rekurentne formule $P_m = \frac{1}{2}P_{m-1} + \frac{1}{2^2}P_{m-2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}P_{m-n+1}$, koja se dobija na osnovu formule totalne verovatnoće. Pri tome hipoteza H_k znači da je prvi protivnik pobednika igrao k partija, $P_{m-k} = P(H_k)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$ $(k=1, 2, \dots, n-1)$.

4296. Neka P_k znači verovatnoću da će se igrati tačno k partija. Za $k=1,2,3,4,5 \Rightarrow P_k=0$, $P_6 = 2p^6 = \frac{1}{2^5}$, $P_7 = 2C_6^1 p^6 q = \frac{3}{2^5}$, $P_8 = 2C_7^2 p^6 q^2 = \frac{21}{2^7}$, $P_9 = \frac{7}{2^5}$, $P_{10} = \frac{63}{2^8}$.

1° $R = \sum_{k=1}^{10} p_k = \frac{193}{256}$; 2° ako je n neparno onda je $P_n = 0$. U slučaju kada je n parno biće $P_n = \frac{1}{2}p_{\frac{n}{2}-1}$, gde p_k znači verovatnoću da će nakon $2k$ partija protivnici imati isti broj poena; $p_5 = C_{10}^5 \frac{1}{2^{10}} = \frac{63}{2^8}$, $p_{k+1} = \frac{1}{2}p_k$; tj. $p_k = \frac{63}{2^{k+3}}$ $(k=5, 6, \dots)$,

$$P_n = \frac{63}{2^{\frac{n}{2}+3}}.$$

4297. Razložiti $(1-x)^{-1}$ u red i naći koeficijente uz x^m.

4298. Isto kao u prethodnom zadatku.

4299. 1° Tražena verovatnoća $p_{\check{s}amp}$ jednaka je zbiru koeficijenata uz pozitivne stepene od x u funkciji

$$\varphi(x) = \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4x} + \frac{1}{2}\right)^{24} = \frac{(1+x)^{48}}{4^{24}x^{24}}.$$

$$p_{\check{s}amp} = \frac{1}{4^{24}}\sum_{k=24}^{48} C_{48}^k = \frac{1}{2\cdot 4^{24}}\left(2^{48} + C_{48}^{24}\right), \quad p_{pret} = 0{,}4423;$$

2° verovatnoća suprotnog događaja jednaka je zbiru koeficijenata uz x za sve stepene od -4 do 3 u funkciji

$$\varphi(x) = \frac{1}{4^{20}}\frac{(1+x)^{40}}{x^{20}}; \quad p = 1 - \frac{1}{4^{20}}\sum_{k=16}^{23} C_{40}^k = 0{,}22.$$

4300. 1° $P_m = ?$ P_m se određuje iz funkcije generatrise $\varphi(x) = \frac{1}{6^n}(x+x^2+\dots+x^6) = \frac{x^n(1-x^6)^n}{6^n(1-x)^n}$.

Koristeći jednakost $\frac{1}{(1-x)^n} = 1 + C_n^{n-1}x + C_{n+1}^{n-1}x^2 + \dots$, dobijamo $P_m = \frac{1}{6^n}\left(C_{m-1}^{n-1} - C_n^1 C_{m-7}^{n-1} + C_n^2 C_{m-13}^{n-1} - \dots\right)$, pri čemu red opada kada je $m-6k<n$. 2° $R_m = \sum_{k=n}^{m} P_k$.

Koristeći jednakost $1 + C_n^{n-1} + \dots + C_{s-1}^{n-1} = C_s^n$, dobijamo $R_m = \frac{1}{6^n}\left(C_m^n - C_n^1 C_{m-6}^n + C_n^2 C_{m-12}^n - \dots\right)$. Za $n=10$, $m=20 \Rightarrow P_{20} = \frac{1}{6^{10}}\left(C_{19}^9 - C_{10}^1 C_{13}^9\right) = 0{,}0014$, $R_{20} = \frac{1}{6^{10}}\left(C_{20}^{10} - C_{10}^1 C_{14}^{10}\right) = 0{,}0029$.

4301. Tražena verovatnoća jednaka je koeficijentu uz x^{21} u funkciji $\varphi(x) = \frac{1}{10^6}(1+x+\dots+x^9)^6 = \frac{1}{10^6}\left(\frac{1-x^{10}}{1-x}\right)^6 = \frac{1}{10^6}\left(1 - C_6^1 x^{10} + C_6^2 x^{20} - \dots\right)\left(1 + C_6^5 x + C_7^5 x^2 + \dots\right)$.

$$p = \frac{1}{10^6}\left(C_{26}^5 - C_6^1 C_{16}^5 + C_6^2 C_6^5\right) = 0{,}04.$$

4302. Nek H_k znači hipotezu da je broj grbova nakon k bacanja obadva novčića isti $(k=1, 2, \dots, n)$, A događaj da je posle n bacanja broj grbova jednak, što se moglo desiti i ranije.

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k)\cdot P(A/H_k), \; p = P(H_n), \quad P(A) = P(A/H_0), \; P(A/H_k) = \frac{1}{4^{n-k}} C_{2n-2k}^{n-k}.$$

Otuda je $C_{2n}^n = \sum_{k=1}^{n} 4^k C_{2n-2k}^{n-k} P(H_k)$. Zadavajući različite vrednosti za n možemo naći $p = P(H_n)$. Neka je $R(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k P(H_k)$, $Q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} x^j p_j$, gde je $p_{n-j} = P(A/H_j)$. Grupišući članove uz x^n, dobijamo

$$Q(x)R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{k=1}^{n} p_{n-k}P(H_k) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n P_n(A) = Q(x) - 1; \quad Q(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^k \frac{(2k)!}{(k!)^2} = (1-x)^{-\frac{1}{2}}; \quad R(x) = 1 - \sqrt{1-x} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} x^k \frac{(2k-2)!}{2^{2k-1}k!(k-1)!}; \quad p = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!\,n!}.$$

4303. $n=730$, $p=\frac{1}{365}$, $q=\frac{364}{365}$, $np=2$; $P_{730}(3)=C_{730}^{3}\left(\frac{1}{365}\right)^3\left(\frac{364}{365}\right)^{727}$. Na osnovu lokalne Moivre-Laplaceove teoreme imaćemo

$$P_{730}(3)\cong\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)^2};\quad \frac{m-np}{\sqrt{npq}}\cong 0{,}71;\ P_{730}(3)\cong 0{,}22.$$

4304. $P_{12}(4)\cong 0{,}235$. Primeniti Moivre-Laplaceovu teoremu.

4305. 1° $P_{10}(5)=C_{10}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{63}{256}\cong 0{,}25$; 2° $p=P_{10}(3<m<8)=p(-2<m-np<3)=$

$$=P\left(-\frac{2}{1{,}26}<\frac{m-np}{\sqrt{npq}}<\frac{3}{1{,}58}\right).$$

Primenimo integralnu Moivre-Laplaceovu teoremu: zamenimo tu verovatnoću integralom:

$$p\cong\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1{,}26}^{1{,}89}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\Phi(1{,}89)+\Phi(1{,}26)\cong 0{,}873\left(\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dx\right).$$

4306. $p=\frac{C_{996}^{50}}{C_{1000}^{50}}\cong 0{,}814$. Koristeći Poissonovu formula nalazimo $p\cong\frac{(0{,}2)^0}{0!}e^{-0{,}2}\cong 0{,}819$.

4307. 1° $P_{200}(4)=C_{200}^{4}(0{,}01)^4(0{,}99)^{196}$. Koristeći Poissonovu formulu nalazimo $np=2$, tj.

$$P_{200}(4)\cong\frac{2^4}{4!}e^{-2}\leq 0{,}09;\ 2°\ P(m>4)=1-P_{200}(0)-P_{200}(1)-P_{200}(2)-P_{200}(3)\cong 0{,}15.$$

4308. 1° Neka je μ broj neispravnih svrdlova u sanduku, tada je $P_{100}(\mu=0)=0{,}14$;

$$2°\ P_{100}(\mu<3)\cong 0{,}89;\ 3°\ P_n(\mu<n-100)=\sum_{m=0}^{n-100}\frac{2^m}{m!}e^{-2}=1-\sum_{m=n-99}^{\infty}\frac{2^m}{m!}e^{-2}=$$

$$=1-e^{-2}\left(\frac{2^{n-99}}{(n-99)!}+\frac{2^{n-98}}{(n-98)!}+\cdots\right)>0{,}9.$$

4309. Verovatnoća da će se u toku jednog sata određeni korisnik poslužiti telefonom iznosi $\frac{n}{N}$, pa je tada tražena verovatnoća $P_N(m)=C_N^m\left(\frac{nt}{N}\right)^m\left(1-\frac{nt}{N}\right)^{N-m}$. Granična raspodela verovatnoće je $P_N(m)=C_N^m\left(\frac{nt}{N}\right)^m\left(1-\frac{nt}{N}\right)^{N-m}=\frac{N(N-1)\cdots(N-m+1)(nt)^m}{N^m m!}\times$

$$\times\left(1-\frac{nt}{N}\right)^N\left(1-\frac{nt}{N}\right)^{-m}\to\frac{(nt)^m}{m!}e^{-nt},$$ tj. Poissonova raspodela sa parametrom nt.

1° $P(m<7)\cong 0{,}9881$; 2° 1) $nt=15$; $P(m>3)\cong 0{,}9999$; 1) $P(m>30)\cong 0{,}0004$.

4310. Slično kao u prethodnom zadatku, verovatnoća da od $N-1$ korisnika tačno m njih zauzimaju različite linije iznosi

$$P_m=C_{N-1}^m\left(\frac{nt}{N}\right)^m\left(1-\frac{nt}{N}\right)^{N-m-1},$$

pa je otuda

$$P(\text{„zauzeto"})=\sum_{m=l}^{N-1}C_{N-1}^m\left(\frac{nt}{N}\right)^m\left(1-\frac{nt}{N}\right)^{N-m-1}.$$

Asimptotska verovatnoća je $P_N\cong\frac{(nt)^m}{m!}e^{-nt}$; 1° 0,011; 2° 1) 14, 2) 11, 3) 13; 3° 39.

4311. 1° $P_n(m)=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}p^m(1-p)^{n-m}$; neka je $m>0$; $P_n(m)=$

$$=\frac{a^m}{m!}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)}{\left[\frac{\varphi(n)}{n}\right]^n}\left[1-\frac{a}{\varphi(n)}\right]^{n-m}<\frac{a^m}{m}\frac{1}{\left[\frac{\varphi(n)}{n}\right]^n}\to 0 \text{ kada je } n\to\infty.$$

Neka je $m=0$, $P_n(0)=\left[1-\frac{a}{\varphi(n)}\right]^{\frac{\varphi(n)}{a}\left[-\frac{na}{\varphi(n)}\right]}\to 1$. 2° $P_n(m)\to\frac{\left(\frac{a}{c}\right)^m}{m!}e^{-\frac{a}{c}}$ — Poissonova formula. 3° $P_n(m)\to 0$ za proizvoljno m.

4312. 1° $n=1000$, $p=0{,}006$, $q=0{,}994$. Verovatnoća da će zavod biti u gubitku je isto što i verovatnoća da će u toku godine umreti više od 120 osiguranika, tj. $P(m>120)=$

$$=P(60<m-np<\infty)=P\left(\frac{60}{7{,}7}<\frac{m-np}{\sqrt{npq}}<\infty\right)\cong\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{7{,}8}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\cong 0$$ (sa tačnošću većom od desetog decimalnog mesta). 2° Zavod će imati dobitak od 40000 ili više, ako je u toku godine umrlo najviše 80 osiguranika.

1) $P(m<80)=P\left(-7{,}8<\frac{m-np}{\sqrt{npq}}<2{,}6\right)\cong\Phi(2{,}6)+\Phi(7{,}8)\cong 0{,}99534$;

2) $P(\text{„dobitak}>60000\text{"})=P(m<60)\cong 0{,}6$; 3) 0,00466.

4313. 1° $P\left(\left|\frac{m}{1500}-0{,}4\right|<0{,}02\right)\cong 2\,\Phi\left(0{,}02\sqrt{\frac{1500}{0{,}4\cdot 0{,}6}}\right)=0{,}8859$. 2° 1) $P(570<m<620)=0{,}8859$,

2) $P(600<m<660)=0{,}4991$ 3) $P(620<m<680)\cong 0{,}1468$, 4) 0,8353;

3° $P\left\{\left|\frac{m}{120}-\frac{2}{3}\right|<\alpha\right\}=0{,}985$. Izražavajući levu stranu jednačine koristeći integralnu Moivre-Laplaceovu teoremu preko $2\,\Phi\left(\alpha\sqrt{\frac{1200}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}}\right)$, dobijamo $\Phi(73{,}5\,\alpha)=0{,}442$;

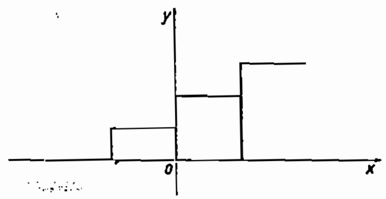
$\alpha\cong 0{,}03$, tj. $\left|\frac{m}{1200}-\frac{2}{3}\right|<0{,}03$, ili $764<m<836$; 4° $P\left\{\left|\frac{m}{n}-\frac{3}{8}\right|<0{,}01\right\}\cong$

$\cong 2\,\Phi\left(0{,}08\sqrt{\frac{n}{15}}\right)\cong 0{,}995$ tj. $n=18500$.

4314. Sličan zadatak je već dat (vid. zad. 4281). 1° $P\left(\left|\frac{S}{400}-\frac{100}{N}\right|<\alpha\right)>0{,}9$, ili na osnovu integralne Moivre-Laplaceove teoreme, $2\Phi\left(\alpha\sqrt{\dfrac{400}{\frac{100}{N}\frac{N-100}{N}}}\right)>0{,}9$, odakle je $\frac{2\alpha N}{\sqrt{N-100}}>1{,}65$, tj. $\alpha>0{,}825\,\frac{\sqrt{N-100}}{N}$, te prema tome da bi verovatnoća bila najmanje 0,9 imamo $-66\sqrt{N-100}<N-800<66\sqrt{N-100}$. Stavljajući $z=\sqrt{N-100}$, nalazimo za desnu nejednačinu $z^2-7900<-66\,z$, tj. $z<127{,}8$. Analogno dobijamo za levu nejednačinu $z^2-7900>-66\,z$, $z>61{,}8$. Na taj način je $100+(61{,}8)^2<N<100+(127{,}8)^2$ ili $P(3919<N<16432)>0{,}9$. 2° Slično nalazimo da je $P(5488<N<11634)>0{,}6$.

4315. Neka je $n=2$. Tada je $P_{02}=(1-p_1)(1-p_2)$; $P_{12}=p_1(1-p_2)+p_2(1-p_1)$; $P_{22}=p_1p_2$; kako je $P_{12}^2-P_{02}P_{22}=[p_1(1-p_1)+p_2(1-p_1)]^2-p_1p_2(1-p_1)(1-p_2)=p_1^2(1-p_2)^2+p_2^2(1-p_1)+p_1p_2(1-p_1)(1-p_2)>0$, to je $\frac{P_{12}}{P_{02}}>\frac{P_{22}}{P_{12}}$. Dalje koristiti metod matematičke indukcije.

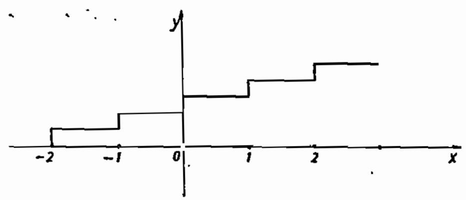
4316.



Sl. 88

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ za } x<-1,\\ \frac{1}{4} \text{ za } -1<x<0,\\ \frac{3}{4} \text{ za } 0<x<1,\\ 1 \text{ za } x>1,\end{cases}$$

4317.



Sl. 89

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ za } x<-2,\\ 0{,}1 \text{ za } -2<x<-1,\\ 0{,}3 \text{ za } -1<x<1,\\ 0{,}5 \text{ za } 0<x<1,\\ 0{,}9 \text{ za } 1<x<2,\\ 1 \quad \text{za } x>2.\end{cases}$$

4318.

$$1^\circ \begin{cases}0 \text{ za } x<0\\ \frac{1}{2^n}\sum\limits_{m=0}^{x-1} C_n^m, \text{ ako je } 0<x<n \text{ i } x\in C\\ \frac{1}{2^n}\sum\limits_{m=0}^{[x]} C_n^m, \text{ za } 0<x<n \text{ i } x\notin C\end{cases}$$

2° Odnos broja pojavljivanja grba prema broju pojavljivanja pisma je slučajna veličina μ sa raspodelom:

$$0,\ \frac{1}{n-1},\ \frac{2}{n-2},\ \dots,\ \frac{n-1}{n},\ \infty,\ P_n(0),\ P_n(1),\ P_n(2),\dots,\ P_n(n-1),\ P_n(n)$$

pa je otuda njena funkcija raspodele

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ za } x<0\\ \frac{1}{2^n}\sum\limits_{m=0}^{k-1} C_n^m, \text{ ako je } 0<x \text{ i } x=\frac{k}{n-k}, \text{ gde } k\in C\\ \frac{1}{2^n}\sum\limits_{m=1}^{[k]} C_n^m \text{ ako je } x=\frac{k}{n-k}, k>0; k\notin C; k=\frac{nx}{1+x}\end{cases}$$

4319.

$$\begin{cases}0 \text{ za } x<0\\ \frac{1}{6^n}\sum\limits_{m=0}^{x-1} C_n^m 5^{n-m}, \text{ ako je } 0<x<n \text{ i } x\in C,\\ \frac{1}{6^n}\sum\limits_{m=0}^{[x]} C_n^m 5^{n-m}, \text{ ako je } 0<x<n \text{ i } x\notin C,\\ 1 \text{ za } x>n\end{cases}$$

4320.

$$\begin{aligned}&0 \text{ za } x<0,\\ &1-p^x \text{ za } x\in N,\\ &1-p^{[x]+1} \text{ za } x>0 \text{ i } x\notin C\end{aligned}$$

4321. Neka μ znači broj pojavljivanja grba. Neka je, dalje, $x\in N$, onda je

$$F(x)=P(\mu<x)=\sum_{m=0}^{x-1}\frac{1}{2^{m+1}}=1-\frac{1}{2^x}$$

ako $x\notin C$, $F(x)=1-\frac{1}{2^{[x]+1}}$.

4322. 1° $M\xi=0{,}442$; $M\xi^2=0{,}4684$; $D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2=0{,}273$

2° $P(-0{,}5<\xi<0{,}5)=0{,}738$.

4323. $M\mu=3{,}868$; $M\mu^2=18{,}806$; $D\mu=3{,}85$ $P(\mu>4)=0{,}541$.

4324. $M\xi^4=0{,}7$; $D\xi^4=0{,}77$.

4325. Srednji broj impulsa smetnji, koji padaju u vremenski interval od 10 *mksec* je $\lambda=0{,}1$. Neka je ξ broj impulsa smetnji koji padnu u radni interval stanice; tada je

$$P(\xi=m)=\frac{(0{,}1)^m}{m!}e^{-0{,}1},\quad m=0,\ 1,\ 2,\ \dots.$$

Verovatnoća da će biti onemogućena predaja je

$$P(\xi>0)=1-P(\xi=0)=1-e^{-0{,}1}=0{,}09516.$$

4326. Neka je z_1 broj belih kuglica prebačenih prvi put a z_2 prebačenih drugi put. Tada je $Mz_1 = 3\cdot\frac{2}{6} = 1$. Broj kuglica u drugoj kutiji nakon prvog prebacivanja je 8,

$Mz_2 = 4\cdot\frac{6}{8} = 3$ tj. $Mx_1 = 2\cdot 1 + 3 = 4$; $Mx_3 = 6 - 3 = 3$.

4327. Kako je

$$\sin\frac{\pi}{2}n = \begin{cases} 0 & \text{za } n \text{ parno} \\ 1 & \text{za } n = 4k+1 \\ -1 & \text{za } n = 4k+3 \end{cases}$$

to će tablica raspodele funkcije $\sin\frac{\pi}{2}\xi$ biti

$\sin\frac{\pi}{2}\xi$	0	1	−1
	p_0	p_1	p_{-1}

gde je:

$$p_0 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \cdots = \frac{1}{4\left(1-\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{3};$$

$$p_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^9} + \cdots = \frac{1}{2\left(1-\frac{1}{16}\right)} = \frac{8}{15};$$

$$p_{-1} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^{11}} + \cdots = \frac{1}{8\left(1-\frac{1}{16}\right)} = \frac{2}{15}.$$

4328. Neka je ξ broj poena pri bacanju jedne kocke $M\xi = 3{,}5$; $D\xi = \frac{35}{12}$. Za dve kocke je

$\eta = \xi_1 + \xi_2$; $M\eta = M\xi_1 + M\xi_2 = 7$; $D\eta = D\xi_1 + D\xi_2 = \frac{35}{6}$.

4329. Obeležimo sa ξ slučajan broj defektnih artikala, sadržanih u izboru. Slučajna veličina ξ uzima sledeće posebne vrednosti: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$; $x_5 = 4$; $x_6 = 5$. Verovatnoća $p_i = P(\xi = x_i)$, da će ξ uzeti (datu) određenu vrednost x_i, iznosi

$$p_i = \frac{C_{10}^{i-1} C_{90}^{6-i}}{C_{100}^5} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Traženo matematičko očekivanje je

$$M\xi = \sum_{i=1}^{6}(i-1)\frac{C_{10}^{i-1}\cdot C_{90}^{6-i}}{C_{100}^5} = \frac{1}{C_{100}^5}\sum_{j=0}^{5} C_{10}^j C_{90}^{5-j} j.$$

Pošto je $\sum_{j=0}^{5} C_{10}^j C_{90}^{5-j}$ koeficijenat uz x^5 u proizvodu

$$(1+x)^{10}(1+x)^{90}, \text{ to je } \sum_{j=0}^{5} j C_{10}^j C_{90}^{5-j}$$

koeficijenat uz x^5 u izrazu

$$\frac{\partial}{\partial t}(1+tx)^{10}(1+x)^{90}\Big|_{t=1} = 10x(1+x)^{99}$$

Otuda je $\sum_{j=0}^{5} j C_{10}^j C_{90}^{5-j} = 10\,C_{99}^4$ a $\bar{x} = \frac{10\,C_{99}^4}{C_{100}^5} = 0{,}5$.

4330. $M\xi = 2$; $D\xi = 1{,}1$. 4341. $\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{n} m_i k_i$.

4332. Za prvoga $\frac{7}{11}$, za drugoga $\frac{7}{11}$ novčića, tj. igra je izgubljena za drugog igrača??).

4333. $M\xi = p\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^k = \frac{1}{p}$.

4334. $M\xi = \omega$; $D\xi = \omega(\omega - 1)$, gde je $\omega = \frac{1}{1-e^{-a}}$. Sumiranje reda izvodi se po formulama:

$$\sum_{m=1}^{\infty} m e^{-am} = -\frac{d}{d\alpha}\sum_{m=0}^{\infty} e^{-am} = -\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{1-e^{-a}}\right);$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^2 e^{-am} = \frac{d^2}{d\alpha^2}\sum_{m=0}^{\infty} e^{-am} = \frac{d^2}{d\alpha^2}\left(\frac{1}{1-e^{-a}}\right).$$

4335. $$M\xi_r = 1\cdot\frac{nm}{(n+m)(n+m-1)} + 2\cdot\frac{n}{n+m}\cdot\frac{n-1}{n+m-1}\cdot\frac{m}{n+m-2} + \cdots + n\,\frac{n(n-1)(n-2)\cdots 1}{(n+m)(n+m-1)\cdots(m+1)}\cdot\frac{m}{n}.$$

4336. 1° $P(t) = 1-(1-p)^k$ 2° $M\xi = \frac{N}{K}(1-p)^k + \frac{N}{K}(k+1)[1-(1-p)^k] = N[1-(1-p)^k + \frac{1}{K}$.

4337. Ako je l_1 put koji pređe radnik duž redova a l_2 popreko redova, tada je

$$Ml = Ml_1 + Ml_2 = \frac{n^2-1}{3n}a + \frac{m^2-1}{3m}b.$$

4339. Na osnovu defi... je matematičko očekivanje slučajne veličine je

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k.$$

S druge strane, vrednost izvoda funkcije generatrise, izračunatog za $u = 1$, iznosi

$$S'(1) = \frac{dS(u)}{du}\Big|_{u=1} = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k u^{k-1}\Big|_{u=1} = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k.$$

Otuda je $M\xi = S'(1)$.

4340. Razmotriti disperziju kao funkciju verovatnoće pojave događaja. 4341. Dva dinara.

4342. $q = 0{,}9$; $P_{10} = 1 - q^{10} \approx 0{,}651$. 4343. $M\xi = \frac{3}{2}$. 4344. $M\xi = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

4345. $p = C_m^k\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(\frac{n-1}{n}\right)^{m-k}$; $M\xi = \frac{m}{n}$; $D\xi = \frac{m(n-1)}{n^2}$.

4346. $M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}$; razmotrimo identitet $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{(a+1)^{k+1}} = \frac{1}{1+a-x}$, diferencirajmo ga po x, stavljajući $x = a$ i množeći član po član sa a, nalazimo $M\xi = a$; $D\xi = a(a+1)$.

4347. Neka je μ_i broj pojavljivanja događaja A u i-tom opitu, tada je

$$M_{\mu i} = p_i;\quad D_{\mu i} = p_i q_i;\quad \mu = \mu_1 + \mu_2 + \cdots \mu_n$$

pri čemu su sabirci nezavisni, pa je $M\mu = \sum_{i=1}^{n} p_i$; $D\mu = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i$.

4348. $M\xi = M\eta = 0.$

4349. 1° $P(\xi=0)=q,\ \dfrac{P(\xi=1)}{P(\xi=0)}=p.$ Tada je $q=1-p,$

$$M\xi=\frac{p}{q},\quad M\xi^2=\frac{p+p^2}{q^2},\quad D\xi=[illegible]=M\xi+(M\xi)^2\qquad 2^\circ\ M\xi=\frac{p}{q}=a,$$

$$P(\xi=n)=qp^n=p^{n+1}a^n,\quad q\sum_{n=0}^{\infty}(aq)^n=1,\ \text{tj.}\ \frac{q}{1-aq}=1,\ q=\frac{1}{a+1},\ p=\frac{a}{[illegible]}$$

$$P(\xi=n)=\frac{a^n}{(1+a)^{n+1}}\quad \text{(Paskalova raspodela).}$$

4350. $C_i\sum_{j=1}2^{-|i-j|}=C_i\sum_{j=1}^{i-1}2^{-|i-j|}+C_i\sum_{j=i}^{\infty}2^{-|j-i|}=C_i(3-2^{-|i-1|})=1,$

$$C_i=\frac{1}{3-2^{-|i-1|}};\quad C_i\sum^{\infty}(j-1)2^{-(j-1)}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}\frac{n}{2^{n-1}}=1.$$

4351. $M\xi=e^{-\lambda t}\sum_{n=1}^{\infty}n(1-e[illegible]$ $\qquad D\xi=e^{2\lambda t}-e^{\lambda t}.$

4352. Očigledno je $P(\xi=k)=p_k=\dfrac{C_n^k[illegible]}{C_N^m}$ [illegible] $\sum^{n}\dfrac{kC_n^kC_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}=m\dfrac{n}{N};$

$$M\xi(\xi-1)=\frac{1}{C_N^m}\sum_{k=2}^{n}k(k-1)C_n^kC_{N-n}^{m-k}=\frac{[illegible]}{N(N-1)}m(m-1)[illegible]$$

odakle nalazimo $M\xi^2=\dfrac{n(n-1)m(m-1)}{N(N-1)}+\dfrac{nm}{N}$ pa je otuda

$$D\xi=m\frac{n}{N}\cdot\frac{N-n}{N}\cdot\frac{1-\frac{n}{N}}{1-\frac{1}{N}}.$$

4353. Obeležimo sa $P_n(A)$ verovatnoću dostizanja naznačenog rezultata za n opita. Ako sa $P_{n,m}$ obeležimo tačno m uspešnih opita od ukupnog broja n opita, onda saglasno formuli totalne verovatnoće biće

$$P_n(A)=\sum_{m=0}^{n}P_{n,m}\,G(m).$$

Pošto su opiti nezavisni, a verovatnoća uspešnog ishoda u svakom od njih iznosi p, to je

$$P_{m,n}=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$$

Stavljajući u formulu za $P_n(A)$ vrednosti $P_{n,m}$ i $G(m)$ dobijamo

$$P_n(A)=\sum_{m=0}^{n}C_n^mp^m(1-p)^{n-m}\left\{1-\left(1-\frac{1}{\omega}\right)^m\right\}=\sum_{m=0}^{n}C_n^mp^m(1-p)^{n-m}-$$

$$-\sum_{m=0}^{n}C_n^m\left[p\left(1-\frac{1}{\omega}\right)\right]^m(1-p)^{n-m}=1-\left[p\left(1-\frac{1}{\omega}\right)+(1-p)\right]^n=1-\left(1-\frac{p}{\omega}\right)^n.$$

Da bi bio postignut naznačeni rezultat potrebno je tačno n opita, ako pri n-tom opitu on bude postignut. Verovatnoća zadnjeg događaja iznosi $P_n(A)-P_{n-1}(A)$. Otuda je $M\xi$ matematičko očekivanje slučajnog broja opita potrebnih radi postizanja naznačenog rezultata

$$M\xi=\sum_{n=1}^{\infty}n[P_n(A)-P_{n-1}(A)]=\sum_{n=1}^{\infty}n\left\{\left(1-\frac{p}{\omega}\right)^{n-1}-\left(1-\frac{p}{\omega}\right)^n\right\}=\frac{p}{\omega}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(1-\frac{p}{\omega}\right)^{n-1}.$$

Da bismo izračunali zadnji zbir koristimo poznatu jednakost

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}\qquad \text{za } |x|<1$$

koja se dobija diferenciranjem beskonačne geometrijske progresije

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}.$$

Kao rezultat dobijamo

$$M\xi=\frac{p}{\omega}\frac{1}{\left[1-\left(1-\frac{p}{\omega}\right)\right]^2}=\frac{\omega}{p}.$$

4354. $\bar{x}=\dfrac{q}{p};\quad D\xi=\dfrac{q^2}{p^2}+\dfrac{q}{p}$ gde je $q=1-p.$

4355. $M\xi=\sum_{n=1}^{\infty}2np_n=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-2)!}{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}=\infty$, jer je $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x}{4}\right)^n\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}=(1-x)^{-\frac{1}{2}}.$

4356. Ako je m broj izvučenih belih kuglica, onda je

$$Mm=\sum_{m=0}^{n}\frac{m\cdot C_M^mC_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}=n\frac{M}{N}\sum_{m=0}^{n}\frac{C_{M-1}^{m-1}C_{N-M}^{n-m-1}}{C_{N-1}^{n-1}}=n\frac{M}{N}$$

1° $Mm=Np=n\dfrac{M}{N};\quad Dm=npq=n\dfrac{M}{N}\left(1-\dfrac{M}{N}\right).$

U slučaju 2° stavljamo $m=m_1+m_2+\cdots+m_n$, gde je m_i broj belih kuglica, izvučenih iz kutije u i-tom izvlačenju, tj. $m_i=1$, ili 0 respektivno sa verovatnoćama $\dfrac{M}{N}$ i $1-\dfrac{M}{N}$; tada je $M(m_i,m_j)=1+\dfrac{M}{N}\cdot\dfrac{M-1}{N-1}$, pa je tako

$$Mm^2=M\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}Mm_i^2+\sum_{i,j=1}^{n}M(m_i,m_j)=\frac{nM}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1};$$

pa pošto je u drugom slučaju disperzija manja nego u prvom, to je odstupanje od srednjeg manje pri uzimanju bez vraćanja.

4357. Broj izvučenih belih kuglica u prvom tipu obeležimo sa ξ, a u drugom sa η. U prvom opitu je $\xi = \xi_1 + \xi_2$, gde je ξ_i broj belih kuglica izvučenih iz i-te kutije, kako su ξ_1 i ξ_2 nezavisni, to je $M\xi = M\xi_1 + M\xi_2$ i $D\xi = D\xi_1 + D\xi_2$; $M\xi_1 = \frac{Na}{a+b}$; $M\xi_2 = \frac{Nb}{a+b}$, tada je

$$M\xi = N;\ D\xi = 2N\frac{ab}{(a+b)^2};\ N\eta = 2N\cdot\frac{1}{2} = N;\ D\eta = \frac{N}{2}.$$

Kako je $a \neq b \Rightarrow \frac{2ab}{(a+b)^2} < \frac{1}{2}$, to je, s obzirom na manje rasipanje u prvom opitu, verovatnije da broj izvučenih belih kuglica leži u intervalu $(N-K,\ N+K)$ sa centrom u matematičkom očekivanju.

4358. 1° $M\xi = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \cdots = \sum_{i\geq 1} p_i + \sum_{i\geq 2} p_i + \cdots + = \sum_{m\geq 1} P_m$;

$$\sum_{i\geq 1} p_i + 3\sum_{i\geq 2} p_i + 5\sum_{i\geq 3} p_i + \cdots = P_1 + 3P_2 + 5P_3 + \cdots = (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \cdots) -$$

$$-\sum_{m\geq 1} P_m = 2\sum_{m\geq 1} mP_m - M\xi;\ \text{tada je } D\xi = 2\sum_{m\geq 1} P_m - M\xi(M\xi+1).$$

4359. 1° $p_{-2} = p_2 = \frac{1}{24}$, $p_{-1} = p_1 = \frac{1}{3}$, $p_0 = \frac{1}{4}$,

2° $p_{-2} = p_2 = \frac{1}{6}$, $p_{-1} = p_1 = \frac{1}{3}$, $p_0 = 0$,

3° $p_{-2} = p_2 = \frac{b-a}{24}$, $p_{-1} = p_1 = \frac{4a-b}{b}$, $p_0 = 1 - \frac{5a-b}{4}$;

potrebni uslovi su

$$4 > 5a - b > 0;\quad 4a > b > a > 0 \text{ tj. } 4a > b > 0,\ 0 < a < 4.$$

4360. Pošto niz $\{x_n\}$ konvertira, onda je on ograničen: $|x_n| < M$, $n = 1, 2, \ldots$ za proizvoljno $\varepsilon > 0$ može se naći $N = N(\varepsilon)$ tako da je $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ za $n > N$. Ako izaberemo n toliko veliko da je

$$P_{n1} < \frac{\varepsilon}{4MN},\ P_{n2} < \frac{\varepsilon}{4MN},\ \ldots,\ P_{nN} < \frac{\varepsilon}{4MN},$$

onda je

$$|M\xi - a| = \left|\sum_{i=1}^{n} P_{ni}(x_i - a)\right| < \frac{\varepsilon}{4MN} + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=N+1}^{n} P_{ni},$$

odakle n sledi potrebnost uslova.

4361. Očigledno je

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } x < -1 \\ x+1 & \text{za } -1 < x < 0 \\ 1-x & \text{za } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{za } x > 1. \end{cases}$$

Tada je

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } x < -1 \\ \frac{(x+1)^2}{2} & \text{za } -1 < x < 0 \\ 1 - \frac{(1-x)^2}{2} & \text{za } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{za } x > 1. \end{cases}$$

$$M\xi = \int_{-1}^{0} (x^2 + x)\,dx + \int_{0}^{1} (x - x^2)\,dx = 0;$$

$$D\xi = \int_{-1}^{0} (x^3 + x^2)\,dx + \int_{0}^{1} (x^2 - x^3)\,dx = \frac{1}{6}.$$

4362. 1° Da bi funkcija $F(x)$ bila neprekidna potrebno je da bude $F(-a) = 0$ i $F(a) = 1$. Iz tih uslova dobijaju se dve jednačine za nalaženje nepoznatih A i B.

$$A + B\arcsin\left(\frac{-a}{a}\right) = A - \frac{\pi}{2}B = 0,$$

$$A + B\arcsin\left(\frac{a}{a}\right) = A + \frac{\pi}{2}B = 1.$$

Otuda je $A = \frac{1}{2}$ i $B = \frac{1}{\pi}$. Prema tome je funkcija raspodele slučajne veličine ξ jednaka

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{za } x > a, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{a} & \text{za } -a < x < a, \\ 0 & \text{za } x < -a. \end{cases}$$

2° Verovatnoća $P\left(-\frac{a}{2} < \xi < \frac{a}{2}\right)$ da će slučajna veličina ξ biti u intervalu $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ iznosi

$$P\left(-\frac{a}{2} < \xi < \frac{a}{2}\right) = F\left(\frac{a}{2}\right) - F\left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\left(\frac{a}{2a}\right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arcsin\left(-\frac{a}{2a}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{6} + \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}.$$

3° Gustina verovatnoće $f(x)$ slučajne veličine ξ iznosi 1) za svako $x \in (-a, a)$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

2) Nula za sve ostale vrednosti x. Dobijena gustina verovatnoće

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} \quad \text{za } |x| < a$$

naziva se zakon arkussinusa.

4363. 1° Koeficijent A određuje se pomoću jednačine

$$\int_0^\infty Ax^2 e^{-kx}\,dx = 1.$$

Otuda je

$$A = \frac{1}{\int\limits_0^\infty x^2 e^{-kx}\,dx}.$$

Nakon dvostruke primene parcijalne integracije dobijamo

$$\int_0^\infty x^2 e^{-kx}\,dx = \frac{2}{k^3}.$$

Otuda je $A = \frac{k^3}{2}$, pa gustina verovatnoće ima oblik

$$f(x) = \frac{k^3}{2} x^2 e^{-kx}.$$

2° Verovatnoća $P\left(0<\xi<\frac{1}{k}\right)$ da slučajna veličina ξ bude u zadatom intervalu izračunava se po formuli

$$P\left(0<\xi<\frac{1}{k}\right) = \frac{k^3}{2}\int_0^{1/k} x^2 e^{-kx}\,dx = \frac{k^3}{2}\left(-\frac{x^2}{k}e^{-kx} - \frac{2}{k^2}xe^{-kx} - \frac{2}{k^3}e^{-kx}\right)\Bigg|_0^{1/k} = \frac{2e-5}{2e}.$$

3° Funkcija raspodele $F(x)$ slučajne veličine ξ definiše se formulom

$$F(x) = \int_0^x \frac{k^3}{2} x^2 e^{-kx}\,dx = 1 - \frac{k^2x^2+2kx+2}{2}e^{-kx}.$$

4364. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 = A\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = A\pi$, tj.

$$A = \frac{1}{\pi};\quad F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg} x;$$

$$P(-1<\xi<1) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}.$$

Matematičko očekivanje ne postoji. Moduo n i medijana su jednaki nuli.

4365. $M\xi = \frac{a+b}{2} = 4$; $D\xi = \frac{(b-a)^2}{12} = 3$, odakle nalazimo $a=1$, $b=7$, tj.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b} & \text{za } 1<x<7 \\ 0 & \text{van tog intervala} \end{cases}$$

4366. $M\xi = 0$; $D\xi = \frac{1}{2}$. **4367.** $A = \frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}$; $M\xi = (\alpha+1)\beta$; $D\xi = \beta^2(\alpha+1)$.

4368. $M\xi = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} x\cos^2 x\,dx = 0$; $D\xi = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}$.

4369. $M\xi = \frac{E}{\varrho\sqrt{\pi}}$; $D\xi = \frac{E^2}{\varrho^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\right)$ **4370.** $D\xi = \frac{a^2}{2}$; $E = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

4371. $P(a<\bar{a}) = 1 - e^{-\frac{\pi}{4}}$; $P(a>\bar{a}) = e^{-\frac{\pi}{4}}$; $\frac{P(a<\bar{a})}{P(a>\bar{a})} = \frac{0{,}544}{0{,}456} = 1{,}19$.

4372. $M\xi = D\xi = m+1$. **4373.** $M\xi = \frac{3}{2}x_0$; $D\xi = \frac{3}{4}x_0^2$.

4374. $A = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}$; $M\xi = \frac{a}{a+b}$; $D\xi = \frac{ab}{(a+b)^2\,(a+b+1)}$.

4375. $A = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$; $M\xi = 0$; $D\xi = \frac{1}{n-2}$.

Radi izračunavanja integrala $\int\limits_0^\infty (1+x^2)^{-\frac{n+1}{2}}\,dx$ koristiti smenu $x = \sqrt{\frac{y}{1-y}}$, koja dovodi do beta-funkcije, a nju zatim izraziti pomoću gama funkcije.

4376. $A = \frac{1}{2^{\frac{n-3}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$; $M\xi = \frac{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}$; $D\xi = n-1-\bar{x}^2$.

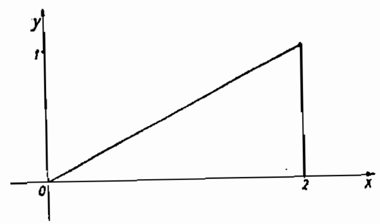
4377. 1° $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{za } 0<x<2 \\ 0 & \text{van tog intervala} \end{cases}$

2° Moduo $x=2$; $\frac{1}{2}\int\limits_0^a x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_a^2 x\,dx$,

$a = \sqrt{2}$ medijana.

$M\xi = \frac{4}{3}$; $P(0{,}5<\xi<1{,}5) = \frac{1}{2}$

(sl. 90).



Sl. 90

4378. Pri rešavanju zadatka nameće se potreba da se izračunaju integrali oblika

$$I_n=\int_0^\infty t^n e^{-t^2}\,dt \qquad (n\in N)$$

koji se smenom $t^2=u$ svode na poznati Eulerov integral

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty u^{p-1}e^{-u}\,du \qquad (p>0)$$

koji definiše gama-funkciju, tj.

$$I_n=\frac{1}{2}\int_0^\infty u^{\frac{n-1}{2}}e^{-u}\,du=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

Na osnovu svojstva gama-funkcije $\Gamma(p+1)=p\,\Gamma(p)$, za $p\in N$ biće $\Gamma(p+1)=p!$ a

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}\,du=2\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt=\sqrt{\pi}.$$

Otuda, ako je k ceo broj biće

$$I_{2k}=\frac{1}{2}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}}\sqrt{\pi},$$

gde je

$$(2k-1)!!=(2k-1)(2k-3)(2k-5)\cdots 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1;$$

$$I_{2k+1}=\frac{1}{2}\Gamma(k+1)=\frac{k!}{2}$$

Zadnje dve formule mogu biti dobijene i neposredno ponovljenom parcijalnom integracijom polazne formule I_n, ne koristeći svojstva gama-funkcije.

1° Matematičko očekivanje slučajne amplitude bočne strane iznosi

$$M\xi=\int_0^\infty x f(x)\,dx=\frac{1}{\sigma^2}\int_0^\infty x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx.$$

Uvođenjem smene $\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}=t$ dobijamo

$$M\xi=2\sqrt{2}\sigma\int_0^\infty t^2e^{-t^2}\,dt=2\sqrt{2}\,\sigma I_2=2\sqrt{2}\frac{\sqrt{\pi}}{4}\sigma=\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

I tako je $M\xi=\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. 2° Kako je $D\xi=M\xi^2-\overline{x}^2$, to je dovoljno izračunati drugi moment

$$M\xi^2=\int_0^\infty x^2\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx.$$

Nakon zamene promenljivih, dobijamo

$$M\xi^2=4\sigma^2\int_0^\infty t^3e^{-t^2}\,dt=4\sigma^2 I_3=4\sigma^2\frac{1}{2}=2\sigma^2$$

Otuda je

$$D\xi=2\sigma^2-\frac{\pi\sigma^2}{2}=\sigma^2\left(2-\frac{\pi}{2}\right).$$

Srednje kvadratno odstupanje σ_x slučajne veličine ξ je

$$\sigma_x=\sigma\sqrt{2-\frac{\pi}{2}}.$$

3° Pri izračunavanju centralnog momenta trećeg reda zgodno je da se on izraz pomoću momenta

$$\mu_3=M[(\xi-\overline{x})^3]=\int_0^\infty(\xi-\overline{x})^3\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}\,dx=m_3-3\,\overline{x}\,m_2+2\,\overline{x}^3.$$

Kako je $\overline{x}=\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $m_2=2\sigma^2$ to izračunavajući $m_3=\int_0^\infty x^3\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx$,

ili

$$m_3=4\sqrt{2}\sigma^3\int_0^\infty t^4e^{-t^2}\,dt=4\sqrt{2}\sigma^3 I_4=4\sqrt{2}\,\sigma^3\frac{3}{8}\sqrt{\pi}=3\sigma^3\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Stavljajući vrednosti $\overline{x}$, m_2 i m_3 u formulu za μ_3, dobijamo

$$\mu_3=3\sigma^3\sqrt{\frac{\pi}{2}}-3\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,2\sigma^3+2\left(\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^3=\sigma^3(\pi-3)\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Analogno za centralni moment četvrtog reda dobijamo

$$\mu_4=M[(x-\overline{x})^4]=\int_0^\infty(x-\overline{x})^4\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx=m_4-4\,\overline{x}\,m_3-6\,\overline{x}^2m_2-3\,\overline{x}^4.$$

Moment četvrtog reda je

$$\alpha_4=\int_0^\infty x^4\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx=8\sigma^4\int_0^\infty t^5e^{-t^2}\,dt=8\sigma^4 I_5=8\sigma_4.$$

Stavljajući $\overline{x}$, m_2, m_3, m_4 u formulu za μ_4, dobijamo

$$\mu_4=\sigma^4\left(8-\frac{3}{4}\pi^2\right)$$

4379. $M\xi=a$; $D\xi=2a^2$. 4380. $Mv=\frac{4h^3}{\sqrt{h}}\int_0^\infty v^3e^{-h^2v}\,dv=\frac{2}{h\sqrt{\pi}}$; $Dv=\frac{1}{h^2}\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{\pi}\right)$.

4381. Funkcija raspodele radnog vremena razboja do zastoja je

$$F(t)=1-P(t)=1-e^{-\alpha t};\quad M\xi=\frac{1}{\alpha};\quad D\xi=\frac{1}{\alpha^2}.$$

4382. $f'(x)=ak(x-x_0)\dfrac{a-1-k(a+1)(x-x_0)^a}{[1+k(x-x_0)^a]^3}$ odakle nalazimo moduo $x_m=x_0+\left[\dfrac{a-1}{(a+1)^k}\right]^k$.

Ako obeležimo medijanu sa M tada je

$$\int_M^\infty \frac{ak(x-x_0)^{a-1}}{[1+k(x-x_0)^a]^2}\,dx=\frac{1}{2}=\frac{1}{1+k(M-x_0)^a},\quad 1+k(M-x_0)^a=a,\ \text{tj.}\ M=x_0+\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{a}};$$

4383. $A=2h^2,\ M\xi=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2h};\ D\xi=\dfrac{4-\pi}{4h};$ moduo $x=\dfrac{1}{4\sqrt{2}};$ medijana $a=\dfrac{\sqrt{\ln 2}}{h}.$

4384. $M\xi=\dfrac{1}{\beta\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^\infty e^{-\frac{(\ln x-\alpha)^2}{2\beta^2}}\,dx=e^{\alpha+\frac{\beta^2}{2}};\ M\xi^2=e^{2\alpha+2\beta^2};\ D\xi=e^{2\alpha}\left(e^{\beta^2}-1\right)e^{\beta^2}.$

4385. $P(a<\xi<b)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{\frac{a}{\sigma}}^{\frac{b}{\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx;\ P'_\sigma=-\dfrac{b}{\sigma^2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{b^2}{2\sigma^2}}+\dfrac{a}{\sigma^2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}=0$

$$\sigma=\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2(\ln b-\ln a)}}.$$

4386. $M|\xi-M\xi|=\sigma\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}=\sqrt{\dfrac{2D\xi}{\pi}}.$

4387. Neka su A i B proizvoljni pozitivni brojevi. Tada je

$$\int_{-A}^{B} x\,dF(x)=\int_{-A}^{0} x\,dF(x)+\int_0^B x\,dF(x)$$

primenjujući postupak parcijalne integracije i prelazeći na granicu kada $A\to\infty$ i $B\to\infty$ (nezavisno jedan od drugoga), dobijamo traženu formulu.

4388. $M\xi=\dfrac{4R}{\pi}.$

4389.

$$F(d)=\begin{cases}0 & \text{za } d<0,\\ \left(\dfrac{d}{r}\right)^2 & \text{za } 0<d<r,\\ 1 & \text{za } d>r\end{cases}$$

4390. Neka je T vreme potpunog obilaska tačke po orbiti. Obeležimo sa $R(t)$ daljinu posmatranja u momentu t. Kako je gustina verovatnoće trenutka posmatranja u granicama intervala $(0,T)$ konstantna, to je matematičko očekivanje daljine posmatranja

$$\bar r=M[R]=\int_0^T r(t)\frac{1}{T}\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T r(t)\,dt.$$

Pređimo dalje sa promenljive t na promenljivi polarni ugao u, koji se menja u granicama od 0 do 2π. Kako se materijalna tačka kreće pod dejstvom centralne sile, to važi integral površine $r^2\dot u=c$ (gde je c — konstantna veličina) odakle sledi da je

$$dt=\frac{1}{c}r^2\,du,\quad T=\frac{1}{c}\int_0^{2\pi} r^2(u)\,du,\quad \bar r=\frac{1}{cT}\int_0^{2\pi} r^3(u)\,du.$$

Stavljajući u zadnju jednakost $cT=\displaystyle\int_0^{2\pi} r^2(u)\,du$ dobijamo

$$\bar r=\frac{\displaystyle\int_0^{2\pi} r^3(u)\,du}{\displaystyle\int_0^{2\pi} r^2(u)\,du},$$

gde je u saglasnosti sa jednačinom elipse $r(u)=\dfrac{a(1-e^2)}{1-e\cos u}$. Analogno disperzija

$$D[R]=\int_0^T (r-\bar r)^2\frac{dt}{T}=\frac{1}{T}\int_0^T r^2\,dt-\bar r^2$$

posle prelaska na novu promenljivu ima oblik

$$D[R]=\frac{\displaystyle\int_0^{2\pi} r^4(u)\,du}{\displaystyle\int_0^{2\pi} r(u)\,du}-\bar r^2.$$

Na taj način, radi izračunavanja $\bar r$ i $D[R]$ potrebno je izračunati integral oblika

$$A_n=\int_0^{2\pi}\frac{du}{(1-e\cos u)^n}\quad \text{za } n\in N.$$

Za ovaj integral važi rekurentna formula

$$A_n=\frac{2n-3}{(n-1)(1-e^2)}A_{n-1}-\frac{n-2}{(n-1)(1-e^2)}A_{n-2}.$$

Kako je

$$A_0=\int_0^{2\pi} du=2\pi,\quad A_1=\int_0^{2\pi}\frac{du}{1-e\cos u}=\frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,\mathrm{tg}\,\frac{u}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-e^2}},$$

to primenom rekurentne formule dobijamo

$$A_2=\frac{2\pi}{(1-e^2)^{3/2}};\quad A_3=\frac{\pi(2+e^2)}{(1-e^2)^{5/2}};\quad A_4=\frac{2\pi}{(1-e^2)^{7/2}}\left(1+\frac{3}{2}e^2\right).$$

Otuda je

$$r=a(1-e^2)\frac{A_3}{A_2}=a\left(1+\frac{e^2}{2}\right).$$

4391. Smatraćemo određenosti radi, da je $a>b$. Moda ξ je očigledno $x=0$;

$$M\xi=\frac{2}{b(a+b)}\int_{-b}^{a} x(b+x)\,dx+\frac{2}{a(a+b)}\int_0^a x(a-x)\,dx=\frac{a-b}{3}.$$

Neka je x_M medijana. Tada je $P(\xi>x_M)=\frac{1}{2}=\frac{(a-x_M)^2}{a(a+b)}$, odakle je $4x_M^2-4ax_M+a^2-$ $-ab=0$, tj. $x_M=a-\sqrt{\frac{a(a+b)}{2}}$.

4392. $1-y_0\int_{-2/a}^{\infty}\left(1+\frac{ax}{2}\right)^{\frac{4}{a^2}-1}\cdot e^{-\frac{2x}{a}}dx$ ako se uvede smena $x=\frac{a}{2}t-\frac{2}{a}$ onda je

$$1-y_0\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{8}{a^2}}e^{\frac{4}{a^2}}\int_0^\infty e^{-t}\,t^{\frac{4}{a^2}-1}\,dt=\frac{\left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{3}{a^2}-1}}{\frac{4}{a^2}\Gamma\left(\frac{4}{a^2}\right)};$$

$$M\xi=\frac{\frac{a^2}{4}\Gamma\left(\frac{4}{a^2}+1\right)\Gamma\left(\frac{4}{a^2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{a^2}\right)},\quad \mu_2=1;\ \mu_3=a;\ \mu_4=\frac{3}{2}a^2+3.$$

4393. $F_\eta(y)=P(\eta<y)=P\left\{-\frac{1}{\xi}<y\right\}=1$ za $y>0$

$$F_\eta(y)=P\left\{\xi<-\frac{1}{y}\right\}=F_\xi\left(-\frac{1}{y}\right)=e^{-(-y)^\alpha}\ \text{za}\ y<0.$$

4394. Neka je $X=h(y)$ inverzna funkcija funkcije $y=g(x)$. Ona je takođe monotona i diferencijabilna. Tada je $P\{x<\xi<x+\Delta x\}$ jednaka $P\{y<\eta<y+\Delta y\}$ ili $P\{y+\Delta y<\eta+y\}$ u zavisnosti od toga da li je $\Delta y>0$ ili $\Delta y<0$. U jednom i drugom slučaju je

$$f_\xi(x+\theta\Delta x)=f_\eta(y+\theta_1\Delta y)\,|\Delta y|$$

gde je $0<\theta,\ \theta_1<1$, odakle je $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f_\eta(y+\theta_1\Delta y)=\lim\limits_{\Delta y\to 0} f_\xi[h(y)+\theta_2\Delta y]\left|\frac{\Delta x}{\Delta y}\right|=$ $=f_\xi[h(y)]\,|h'(y)|$.

4395. 1° $\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}f(\sqrt[3]{y^2}),\ 0<y<\infty$; 2° $\frac{1}{y^2}f\left(\frac{s}{y}\right),\ 0<y<\infty$; 3° $2yf(y^2),\ 0<y<\infty$;

4° $\frac{1}{y}f(\ln y),\ 1<y<\infty$; 5° $\frac{1}{y}f\left(\ln\frac{1}{y}\right),\ 0<y<1$, 6° $e^y f(e^y)$. $-\infty<y<\infty$.

4396. $f_\xi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}};\ \eta=\xi^3,\ h(y)=\sqrt[3]{y},\ h'(y)=\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$,

$f_\eta(y)=\frac{1}{3\sigma\sqrt[3]{y^2}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^{2/3}}{2\sigma^2}}$. Vid. zad. 4394.

4397. $\eta=\xi^2;\ f_\eta(y)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi y}}\left\{e^{-\frac{(\sqrt{y}-a)^2}{2\sigma^2}}+e^{-\frac{(\sqrt{y}+a)^2}{2\sigma^2}}\right.$.

4398. $M\xi=1{,}9;\ M\xi^2=4{,}9;\ D\xi=1{,}29$

4399. $M\xi=0{,}55;\ M\eta=0{,}10;\ D\xi=0{,}2475;$ $D\eta=0{,}59;\ M[(\xi-M\xi)(\eta-M\eta)]=-0{,}055\ r_{\xi\eta}\cong 0{,}144.$

4400 $M\xi=-6;\ D\xi=4D\xi+9D\eta-12K_{\xi\eta}=29.$

4401. $\sigma_A=1{,}2;\ \sigma_B=1{,}1;\ K_{AB}=r\sigma_A\sigma_B=0{,}44;\ \sigma_{A+B}=\sqrt{\sigma_A^2+\sigma_B^2+2K_{AB}}\cong 1{,}88.$

4402. Stavimo $\eta=a\xi+(\eta-a\xi)=\eta_1+\eta_2;\quad M(\xi\eta_2)=M[\xi(\eta-a\xi)]=M(\xi\eta)-aM\xi^2;\quad M\xi_1=0,$ tada je $a=\frac{M(\xi\eta)}{M\xi^2}$, pošto je $\eta_1=a\xi$, to je $r_{\xi\eta_1}=\pm 1$ što je i trebalo dokazati.

4403. $M(\xi\eta)=aMx^2+M(xy)$, stavimo $M(xy)=0$; tada je $a=0{,}16$; $D\eta=a^2Mx^2+My^2=$ $=a^2D\xi+Dy$, tj. $Dy=22{,}44$.

4404. $M\xi=\alpha a+\beta b+\gamma;\ D\xi=\alpha^2\sigma_1^2+\beta^2\sigma_2^2+2\alpha\beta r\sigma_1\sigma_2.$

4405. $0{,}977=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\iint_D e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[(x-a)^2+(y-b)^2]}\,dx\,dy$ uzimajući da je poluprečnik kruga R i stavljajući $x-a=\sigma\varrho\cos\varphi,\ y-b=\sigma\varrho\sin\varphi\Rightarrow$

$$0{,}997=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{R/\sigma}e^{-\frac{\varrho^2}{2}}\varrho\,d\varrho=1-e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}},\ \text{tj.}\ e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}}=0{,}003.$$

4406. $M\varrho=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}f(x,y)\,dx\,dy=\frac{1}{\pi a^2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r^2\,dr=\frac{2}{3}a;\ M\varrho^2=\frac{a^2}{2};\ D\varrho=\frac{a^2}{18}.$

4407. $M\xi=\sum\limits_{k=0}^{n}kp_k,\ p_k=P(\xi=k)=\sum\limits_{m=0}^{n-k}\frac{n!}{m!\,(n-k-m)!}\cdot p^k q^m(1-p-q)^{n-k-m}=$ $=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}p^k\sum\limits_{m=0}^{n-k}\frac{(n-k)}{m!\,(n-k-m)!}\cdot q^m(1-p-q)^{n-k-m}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$, tj. ξ je raspodeljeno po binomnom zakonu. Analogno je i η. Tada je $M\xi=np,\ M\eta=nq,$

$D\xi = np(1-p);\ D\eta = nq(1-q);\ M(\xi\eta) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{n-k} \frac{kmn!}{k!\,m!\,(n-k-m)!}\,p^k q^m (1-p-q)^{n-k-m} =$

$$= \sum_{k=0}^{n} k\,C_n^k p^k \sum_{m=0}^{n-k} m\,C_{n-k}^m q^m (1-p-q)^{n-k-m};\ \text{kako je } (1-p)^{n-k} =$$

$$= (1-p-q+q)^{n-k} = (r+q)^{n-k} = \sum_{m=0}^{n-k} C_{n-k}^m q^m r^{n-k-m}$$

to, diferenciranjem ove jednakosti po q i množenjem sa q, nalazimo

$$q(n-k)(1-p)^{n-k-1} = \sum_{m=0}^{n-k} m\,C_{n-k}^m q^m r^{n-k-m},$$

$$\Rightarrow M(\xi,\eta) = q\sum_{k=0}^{n} k(n-k)\,C_n^k p^k (1-p)^{n-k-1}$$

pa pošto je

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = (1-p+q)^n = (a+p)^n$$

to diferenciranjem ove jednakosti po jedanput po $a = 1-p$, a zatim po p i množenjem sa p, dobijamo $M(\xi,\eta) = n(n-1)pq$.
No kako je $K_{\xi\eta} = M[(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)] = -npq$, tada je

$$r_{\xi\eta} = \frac{K_{\xi\eta}}{\sqrt{D\xi\,D\eta}} = -\sqrt{\frac{pq}{(1-p)(1-q)}}$$

4408. 1°

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{a^2} & \text{za } |x \pm y| < \dfrac{a\sqrt{2}}{\pi}, \\ 0 & \text{za } |x \pm y| > \dfrac{a\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

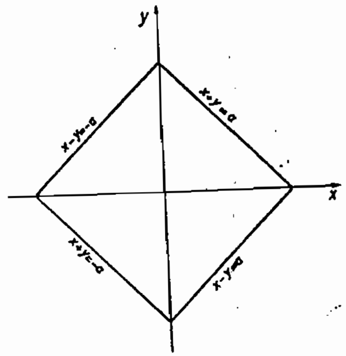
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{a} - 2|x| & \text{za } |x| < \dfrac{a}{\sqrt{2}}, \\ 0 & \text{za } |x| > \dfrac{a}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

$$f_\eta = \begin{cases} \dfrac{a\sqrt{2} - 2|y|}{a^2} & \text{za } |y| < \dfrac{a}{\sqrt{2}}, \\ 0 & \text{za } |y| > \dfrac{a}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

$$f_\xi(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_\xi(x)} = \frac{1}{a\sqrt{2} - 2|x|} \quad \text{za } |x \pm y| < \frac{a}{\sqrt{2}},$$

tj. $f_\xi(x) \neq f_\xi(x/y)$; znači da su slučajne veličine ξ i η zavisne.

$M\xi = 0;\ M\eta = 0;\ M(\xi\eta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\,f(x,y)\,dx\,dy = 0$, tj. slučajne veličine ξ i η su nekorelativne (sl. 91).



Sl. 91

4409. 1° $f_\xi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2{,}5\pi}}\,e^{-0{,}4x^2},\ f_\eta(y) = \dfrac{e^{-2y^2}}{\sqrt{0{,}5\pi}}$;

2° $f_\xi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(u, x-u)\,du = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$;

3° $F(x,y) = P\{u<x,\ v<y\} = P\{\xi+\eta<x,\ \xi-\eta<y\} =$

$$= \frac{1}{\pi}\iint_{\substack{u+v<x\\ u-v<y}} e^{-\frac{1}{2}(u^2+2uv+5v^2)}\,du\,dv = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\frac{x+y}{2}} du \int_{u-y}^{x-u} e^{-\frac{1}{2}(u^2+2uv+5v)}\,dv$$

$$F(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}[x^2+(x-y)^2]}.$$

4410. $\theta = \zeta + \eta + \zeta;\ F_\theta(x) = \dfrac{x^3}{(1+x)^3};\ f_\theta(x) = \dfrac{3x^2}{(1+x)^4}$.

4411. 1° $f_\xi = \begin{cases} 0 & \text{za } x<0, \\ \dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{za } x>0; \end{cases}$

2° $$f_\xi(x)=\begin{cases}0 & \text{za } x<0,\\ \dfrac{1}{2} & \text{za } 0<x<1,\\ \dfrac{1}{2x^2} & \text{za } x>1\end{cases}$$

4412. $$f_\xi(x)=\int_0^\infty v\, f_\xi(x u)\, f_\eta(v)\, dv=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty nv\left(\frac{v\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} e^{-\frac{nv^2}{2}(x^2+1)}\, dv.$$

Ako se stavi $z=\frac{u v^2}{2}(x^2+1)$, onda je

$$f_\xi(x)=\frac{(x^2+1)^{-\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty z^{\frac{n-1}{2}}e^{-z}\,dz=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}(1+x^2)^{-\frac{n+1}{2}},$$

tj. dobija se gustina Stydentova zakona raspodele.

4413. $r=\sqrt{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2+(\zeta-c)^2}$; $f_r(x)=\frac{x^2}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$.

4414. Gustina vektora (ξ,η) je $f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{(x-a)^2+(y-b)^2}{2\sigma^2}}$; $r=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$,

$$F_r(x)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\iint_{u^2+v^2<x^2} e^{-\frac{(u-a)^2+(v-b)^2}{2\sigma^2}}\,du\,dv.$$

Prelaskom na polarne koordinate $u=\varrho\cos\varphi$; $v=\varrho\sin\varphi$ dobija se:

$$F_r(x)=\frac{e^{-\frac{a^2+b^2}{2\sigma^2}}}{2\pi\sigma^2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^x e^{-\frac{\varrho^2-2\varrho(a\cos\varphi+b\sin\varphi)}{2\sigma^2}}\varrho\,\delta\varrho$$

$$f_r(x)=\frac{x\,e^{-\frac{x^2+a^2+b^2}{2\sigma^2}}}{2\pi\sigma^2}\int_0^{2\pi}e^{\frac{x\sqrt{a^2+b^2}}{\sigma^2}}\,d\varphi.$$

4415. Gustina vektora (ξ,η) očigledno će biti

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & \text{za } |y|<\pi,\ -\infty<x<\infty\\ 0 & \text{za } |y|>\pi\end{cases}$$

tada je

$$F_\xi(x)=\iint_{u\sin v<x} f(u,v)\,du\,dv=\int_{-\pi}^0 dv\int_{\frac{x}{\sin v}}^\infty f(u,v)\,dv+\int_0^\pi dv\int_{-\infty}^{\frac{x}{\sin v}} f(u,v)\,du;$$

$$f_\xi(x)=\frac{1}{\pi\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^\pi e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2\sin^2 v}}\cdot\frac{dv}{\sin v}.$$

Ako se stavi $\cos v=-th\frac{z}{2}$, onda se ovaj integral svodi na oblik

$$f_\xi(x)=\frac{e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}}{\pi\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}\operatorname{ch} z}\,dz=\frac{e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}}{\pi\sigma\sqrt{2\pi}}K_0\left(\frac{x^2}{4\sigma^2}\right),$$

gde je $K_0(x)$ Besselova funkcija imaginarnog argumenta, drugog reda, nultog indeksa. Nacrtati njen grafik.

4416. Slučajna veličina ξ, tj. broj defektnih proizvoda koji su se pojavili pri proveri, može uzimati sve cele-vrednosti u intervalu $[0, m]$. Obeležimo sa $p_k=p(\xi=k)$, gde je $k=0, 1, 2, \ldots m$. Polazeći od definicije verovatnoće, dobijamo

$$p_k=\frac{C_m^k\,C_{n-m}^{r-k}}{C_n^r},$$

Prema tome karakteristična funkcija biće

$$E(u)=\sum_{k=0}^m\frac{C_m^k\,C_{n-m}^{r-k}}{C_n^r}e^{iku}.$$

4417. Pošto je karakteristična funkcija

$$E(u)=M[e^{iu\xi}]$$

to je

$$E(u)=\frac{1}{2}\cdot\int_{-\infty}^\infty e^{iux-|x|}\,dx=\int_0^\infty e^{-x}\cos ux\,dx$$

s obzirom da je $e^{iux}=\cos ux+i\sin ux$, a

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-|x|}\sin ux\,dx=0.$$

Primenom postupka parcijalne integracije dobijamo

$$\int_0^\infty e^{-x}\cos ux\,dx=\left[\frac{u\sin ux-\cos ux}{1+u^2}e^{-x}\right]_0^\infty=\frac{1}{1+u^2}\quad\text{tj. } E(u)=\frac{1}{1+u^2}.$$

4418. Gustina verovatnoće $f(x)$ vezana je sa karakterističnom funkcijom $E(u)$ relacijom

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux}E(u)\,du.$$

Zamenjujući vrednost za $E(u)$ dobijamo

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iux}}{1+u^2}\,du.$$

Radi izračunavanja ovog integrala razmotrimo integral po zatvorenoj konturi

$$\frac{1}{2\pi}\oint\frac{e^{-ixw}}{1+w^2}\,dw.$$

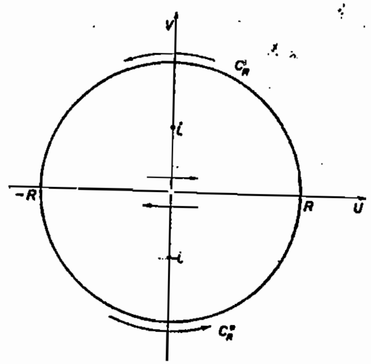
Funkcija $\dfrac{e^{-ixw}}{1+w^2}$ kompleksne promenljive w, koja ima dva pola: jedan u tački $w=i$ i drugi u tački $w=-i$ (sl. 92).

Razmotrimo dva slučaja:

Prvi slučaj $(x<0)$.

Izabirajući za konturu integracije polukrug C_R' zatvorenim delom realne ose $(-R, R)$ dobijamo

$$\frac{1}{2\pi}\oint\frac{e^{-ixw}}{w^2+1}\,dw=\frac{1}{2\pi}\int_{C_R'}\frac{e^{-ixw}}{1+w^2}\,dw+\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\frac{e^{-ixu}}{u^2+1}\,du.$$



Sl. 92

Na osnovu teoreme o reziduumu biće

$$\frac{1}{2\pi}\oint\frac{e^{-ixw}}{w^2+1}\,dw=\frac{1}{2\pi}\,2\pi i\ \mathrm{Rez}\left(\frac{e^{-ixw}}{w^2+1}\right)_{w=i}=i\left(\frac{e^{-ixw}}{2w}\right)_{w=i}=\frac{1}{2}e^{x},$$

ili, pošto je x negativno

$$\frac{1}{2\pi}\oint\frac{e^{-ixw}}{w^2+1}\,dw=\frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

S druge strane, kada $R\to\infty$

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{C_R'}\frac{e^{-ixw}}{w^2+1}\,dw=0.$$

Granica pak trećeg integrala

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\frac{e^{-ixu}}{u^2+1}\,du=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iu}}{u^2+1}\,du$$

jednaka je traženoj. Na taj način je za $x<0$

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

Drugi slučaj $(x>0)$. Ponavljajući analogan račun, samo zamenjujući realnu osu sa drugom polovinom kruga C_R'', dobijamo

$$\frac{1}{2\pi}\oint\frac{e^{-ixw}}{w^2+1}\,dw=\frac{1}{2\pi}\int_{C_R''}\frac{e^{-ixw}}{w^2+1}\,dw+\frac{1}{2\pi}\int_{R}^{-R}\frac{e^{-ixu}}{u^2+1}\,du.$$

Na osnovu teoreme o reziduumu biće

$$\frac{1}{2\pi}\oint\frac{e^{-ixw}}{w^2+1}\,dw=\frac{1}{2\pi}\,2\pi;\ \mathrm{Rez}\left(\frac{e^{-ixw}}{w^2+1}\right)_{w=-i}=i\left(\frac{e^{-ixw}}{2w}\right)_{w=-i}=\frac{1}{2}e^{-x}$$

ili pošto je x pozitivno $\dfrac{1}{2\pi}\oint\dfrac{e^{-ixw}}{w^2+1}\,dw=-\dfrac{1}{2}e^{-|x|}.$

Drugi integral $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{C_R''}\dfrac{e^{-ixw}}{w^2+1}\,dw\to 0$ kada $R\to\infty$, a treći integral daje traženu granicu, ali sa suprotnim znakom

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\frac{e^{-ixu}}{u^2+1}\,du=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ixu}}{u^2+1}\,du=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ixu}}{u^2+1}.$$

I tako za $x>0\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{e^{-ixu}}{u^2+1}\,du=-\dfrac{1}{2\pi}\oint\dfrac{e^{-ixw}}{w^2+1}\,dw=\dfrac{1}{2}e^{-|x|}.$

Tako se u oba slučaja dobija da je $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{-|x|}$.

4419. Ako momenti postoje u šta se lako može uveriti, znajući gustinu verovatnoće dobijanu u prethodnom primeru, onda se oni izračunavaju po formuli

$$m_k=\frac{1}{i^k}\left.\frac{d^kE(u)}{du^k}\right|_{u=0}.$$

Radi nalaženja izvoda $\left.\dfrac{d^kE(u)}{du^k}\right|_{u=0}$ koristmo to što su ti izvodi koeficijenti uz $\dfrac{u^k}{k!}$ razvoja u Mac-Laurinov red funkcije $\dfrac{1}{1+u^2}$, tj. $\dfrac{1}{1+u^2}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{d^kE(0)}{du^k}\,\dfrac{u^k}{k!}$

Radi dobijanja toga reda primetimo da je funkcija $\dfrac{1}{1+u^2}$ za $|u|<1$ geometrijska progresija

$$\frac{1}{1+u^2}=\frac{1}{1-(iu)^2}=\sum_{m=0}^{\infty}(iu)^{2m}.$$

Koristeći identične transformacije zadnji red može biti preobražen u Mac-Laurinov red

$\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}(iu)^{2m}=\sum_{m=0}^{\infty}i^{2m}(2m)!\,\frac{u^{2m}}{(2m)!}$. Otuda Mac-Laurinov red za funkciju $\dfrac{1}{1+u^2}$,

$\dfrac{1}{1+u^2}=\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}i^{2m}(2m)!\,\dfrac{u^{2m}}{(2m)!}$ sadrži samo parne stepene od u. Tako će biti

$$\left.\frac{d^kE(u)}{dx^k}\right|_{u=0}=\begin{cases} i^k k! & \text{za } k \text{ parno}\\ 0 & \text{za } k \text{ neparno,}\end{cases}\quad \text{a polarni momenti}\quad m_k=\begin{cases} k! & \text{za } k \text{ parno,}\\ 0 & \text{za } k \text{ neparno.}\end{cases}$$

4420. $E(u)=q+pe^{iu}$ gde je $q=1-p$.

4421. $E(u)=(q+pe^{iu})^n$; $\bar{x}=np$; $D\xi=npq$.

4422. $E(u)=\dfrac{1}{1+a(1-e^{iu})}$; $\overline{x}=a$; $D\xi=a(1+a)$. 4423. $E(u)=e^{a(e^{iu}-1)}$; $\overline{x}=D\xi=a$.

4424. $E(u)=e^{iu\overline{x}-\frac{\sigma^2u^2}{2}}$. 4425. $E(u)=\dfrac{1}{1-iu}$; $m_k=k!$.

4426. $E(u)=\dfrac{e^{iub}-e^{iua}}{iu(b-a)}$; $m_k=\dfrac{b^{k+1}-b^{k+1}}{(k+1)(b-a)}$.

4427. $E(u)=1+v\sqrt{\pi}\,e^{-v}[i-\Phi(v)]$, gde je $v=\dfrac{u}{2h}$; $\Phi(v)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^v e^{-z^2}dz$. Primeniti parcijalnu integraciju, a zatim se koristiti formulama

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\sin 2px\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-p^2}\Phi(p);\quad \int_0^\infty e^{-px^2}\cos qx\,dx=\frac{1}{2}e^{-\frac{q^2}{4p}}\sqrt{\frac{\pi}{p}}.$$

4428. $E(u)=\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{iu}{a}\right)^\lambda}$; $m_k=\dfrac{\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+k-1)}{a^k}$.

4429. $E(u)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi e^{iau\cos\varphi}\,d\varphi=I_0(au)$. Preći na polarne koordinate i koristiti jednu od integralnih reprezentacija Besselovih funkcija.

4430. $E(u)=e^{i\overline{x}u-a|u|}$. Zamenom promenljivih dobija se $E(u)=e^{i\overline{x}u}\dfrac{a}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{e^{ixu}}{x^2+a^2}dx$. Zadnji integral izračunava se pomoću teoreme o reziduumu, radi čega je potrebno razmotriti integral po zatvorenoj konturi, tj.

$$\frac{a}{\pi}\oint\frac{e^{izu}}{z^2+a^2}dz.$$

Za pozitivno u integracija se izvedi po gornjem polukrugu zatvorenom prečnikom, a pri negativnom u po donjem polukrugu zatvorenom prečnikom.

4431. $f(x)=\dfrac{a}{\pi(a^2+x^2)}$ (Cauchyev zakon). 4432. $f_1(x)=\begin{cases}e^{-x} & \text{za } x>0\\ 0 & \text{za } x<0\end{cases}$ $f_2(x)=\begin{cases}0 & \text{za } x>0\\ e^{x} & \text{za } x<0\end{cases}$.
Do rezultata se dolazi korišćenjem teoreme o reziduumu, razmatrajući odvojeno pozitivne i negativne vrednosti od x.

4433. Očigledno je $E(0)=1$ i $E(u)$ neprekidna; dalje je

$$E(u)=\frac{1-\beta}{1+\alpha}[(1+\alpha e^{-iu})(1+\beta e^{iu}+\beta^2e^{2iu}+\cdots)]=\frac{1-\beta}{1+\alpha}\left[\alpha e^{-iu}+(1+\alpha\beta)\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n e^{iut}\right]$$

pa je otuda $E(u)$ karakteristična funkcija slučajne veličine ξ, koja uzima vrednosti $-1, 0, 1, 2, \ldots$, sa verovatnoćama

$$P(\xi=u)=\frac{1-\beta}{1+\alpha}(1+\alpha\beta)\beta^u,\ u=0,1,2,\ldots,\qquad P(\xi=-1)=\frac{1-\beta}{1+\alpha}\cdot\alpha.$$

4434. 1° i 2° nije ispunjena osobina karakteristične funkcije: $E(-u)=\overline{E(u)}$. 3° Ako primenimo inverznu Fourierovu transformaciju na $E(u)$ dobijamo

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}(1-u^2)e^{-iux}du=\frac{2}{\pi x^2}\left(\cos x+\frac{\sin x}{x}\right).$$

Ova funkcija nije gustina raspodele verovatnoće pošto u tački O ima pol drugog reda, tj. $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx$ divertira. 4° Realna karakteristična funkcija mora biti parna, dok funkcija $e^{-x^2(\pi-\operatorname{arctg} x)}$ nije parna.

4435. Pošto je $E(u)$ realna funkcija to je

$$E(u)=\int_{-\infty}^{\infty}\cos ux\,dF(x)$$

pa je tada

$$1-E(2u)=\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos 2ux)\,dF(x)=2\int_{-\infty}^{\infty}\sin^2 ux\,dF(x)=2\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos ux)(1+\cos ux)dF(x)\le$$

$$\le 4\int_{-\infty}^{\infty}1-\cos ux)\,dF(x)=4\ \ 1-E(u)].$$

4436. $1+E(2u)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}(1+\cos 2ux)\,dF(x)=2\int_{-\infty}^{\infty}\cos^2 ux\,dF(x)\ge 2\left(\int_{-\infty}^{\infty}\cos ux\,dF(x)\right)^2=2[E(u)]^2$,
što je i trebalo dokazati.

4437. $|E(u+h)-E(u)|=\left|\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}(e^{ihx}-1)e^{iux}\,dF(x)\right|\le$

$$\le\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}|e^{ihx}-1|^2\,dF(x)}=\sqrt{2\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos hx)\,dF(x)}=\sqrt{2[1-R_e E(h)]}$$